

## 초음파검사의 수치적 모델링 기법 - 유한차분법 및 유한요소법

### Numerical Techniques for Modeling of Ultrasonic Testing - The Finite Difference and Finite Element Methods

임현준\* · 유승현\*\*

Hyunjune Yim\* and Seung-Hyun Yoo\*\*

**초 록** 초음파검사에서 발생하는 물리적 현상의 복잡성을 고려할 때, 이를 이론적으로 모델링하기 위해 수치적인 기법을 이용하는 것이 효과적인 경우가 많다. 본 논문에서는 초음파검사를 수치적으로 모델링하는 기법들에 대하여 개괄적으로 살펴보고, 특히 유한차분법과 유한요소법에 대하여 상세히 알아본다. 즉, 유한차분법과 유한요소법을 이용한 해석의 개요를 설명하고, 이들의 적용시 고려사항 및 문제점에 대해 알아 본 후, 기존의 연구결과 중 중요한 것들을 참고문헌으로 열거하고 몇 가지 예를 소개한다. 계속되는 컴퓨터의 기술적 발전으로 인하여 초음파검사에 대한 수치적 모델링 기법의 신뢰성과 편의성이 지속적으로 증대될 것으로 기대된다.

**주요용어** : 초음파검사, 비파괴평가, 수치해석, 모델링, 유한차분법, 유한요소법, 질량-스프링 모델

**Abstract** Due to the great complexity of the physical phenomena involved in most ultrasonic nondestructive testing, the numerical method is effective in many cases of their theoretical modeling. A brief overview is provided in this paper of the numerical methods used in modeling ultrasonic nondestructive testing, with an emphasis on the finite difference and the finite element methods. The procedures of execution, special considerations required, and some previous research results of the finite difference and the finite element methods are presented, with a rather extensive list of work reported in the literature. These numerical modeling techniques for ultrasonic nondestructive testing are expected to be more reliable and more convenient, as a result of the continuing technological development of computers.

**Keywords:** ultrasonic testing, nondestructive testing, numerical analysis, modeling, finite difference method, finite element method, mass-spring model

#### 1. 서 론

1970년대 중반 이후부터 초음파 비파괴검사의 정량적 신뢰성 향상을 위한 노력의 일환으로 그 이론적 뒷받침의 필요성이 부각되기 시작하였다. 여타의 비파괴검사와 마찬가지로 초음파검사도 측정된 실험 결과로부터 피검사체의 상태를 추정하는 역방향문제(inverse problem)이다. 그러나, 초음파검사의 역방향문제에

대한 해를 해석적으로 구할 수 있는 경우는 극히 드물기 때문에, 우선 초음파의 전파 및 산란에 관한 전방향문제(forward problem)의 해법을 확보한 후 그로부터 역방향문제의 해를 구하는 것이 타당한 접근 방법이다. 초음파의 전파 및 산란이라는 물리적 현상은 매우 복잡하여 극히 예외적인 경우를 제외하고는 전방향문제에 있어서도 엄밀한 해석해를 구할 수 없으므로, 주파수가 매우 낮거나 매우 높은 경우에 적용되는 근사해법

을 이용하는 경우가 많다. 따라서, 초음파 문제의 해는 수치적인 방법으로 모델링하여 구하는 것이 효과적인 경우가 많다. 물론, 근사해법은 수치해법에 비해 계산 시간이 훨씬 적게 소요되므로 실시간 모델링을 필요로 하는 경우 유리하여 이를 적용하는 모델링 연구도 매우 활발하게 진행되고 있다[1,2]. 본 논문에서는 수치해법을 이용한 초음파검사의 모델링 기법에 관해 개괄적으로 살펴보고, 특히 유한차분법과 유한요소법에 대하여 상세히 설명한다. 모델링 기법에 관한 개괄적 설명에 있어서는 Bond가 저술한 우수한 논문[3]을 참조하였으며, 유한차분법과 유한요소법에 관해서는 저자들의 연구 경험과 지식에 주로 의존하였음을 밝혀 둔다.

초음파검사의 많은 경우에 있어서 초음파는 고체 내를 전파하는 탄성파이므로, 그 수치적 모델링은 지진학(seismology), 지구물리학(geophysics), 응용역학(applied mechanics) 등의 다른 분야에서 오랜 기간에 걸쳐 탄성파의 해석에 적용되어 온 기법을 이용하여 수행될 수 있다. 유한차분법(FDM, finite difference method)이 하나의 좋은 예인데, 이는 지구물리학 분야에서 탄성파의 수치적 모델링을 위해 가장 많이 사용되어 온 방법으로서 보통 이스라엘의 Alterman[4] 연구 그룹과 미국의 Bertholf[5] 그룹에 의해 1960년대에 확립된 것으로 본다. 유한차분법은 편미분방정식의 미분항들을 차분형태의 식으로 바꿔 씌으로써 이산화(discretization)된 차분방정식을 전개하고, 그 차분방정식을 수치적으로 풀어 해를 구하는 방법이다. 이 방법이 확립되어 본격적으로 적용되기 시작하던 1960년대에는 간단한 문제도 CRAY와 같은 슈퍼컴퓨터를 사용하여 계산해야 했지만, 그 후 컴퓨터의 급속한 발달로 인하여 계산 가능한 절점(node)의 수가 점차 증가하고 계산 속도도 크게 빨라져서 최근에는 개인용 컴퓨터에서도 간단한 초음파검사 문제를 시뮬레이션 할 수 있게 이르렀다.

유한차분법에 비해 비교적 최근에 적용되기 시작한 방법으로서 유한요소법(FEM, finite element method)이 있다. 유한요소법은 1960년대 이후 많은 노력이 투입되어 이제는 몇 가지 특수한 문제를 제외하고는 안정적인 수치해석 방법으로서 위치를 굳히고 있다. 유한요소법에 대한 연구는 매우 활발해서 모든 변화를 다 쫓아가기는 어렵지만, 그래도 가능한 한 많은 자료를 모아 놓은 인터넷 사이트를 찾아보면 도움이 된다[6]. 유한요소법은 초음파검사 이외에도 와전류검사(eddy current testing)나 자속누설검사

(magnetic flux leakage testing)와 같은 비파괴검사의 모델링에 매우 활발하게 적용된 바 있다[7,8]. 초음파검사의 모델링에 있어서 유한요소법은 유한차분법에 비하여 비교적 덜 확립되어 있지만, 임의 형상의 산란체를 쉽게 모델링할 수 있다는 큰 장점을 가지고 있다. 이로 인하여, 유한요소법과 유한차분법을 접목하여 기하학적 형상이 복잡한 문제를 모델링하려는 시도도 많이 이루어지고 있다[9].

유한차분법이나 유한요소법과 같이 이산화를 통해 수치해를 구하는 또 다른 방법으로서 경계요소법(BEM, boundary element method)이 있다. 경계요소법은 유한차분법이나 유한요소법과 달리 매질의 경계만을 모델링하면 되는 장점을 가지고 있어서, 특히 무한 매질 내에서 발생하는 초음파의 산란현상을 모델링함에 있어 가장 적합한 방법이다[10]. 마지막으로, 파동의 전파를 고려할 때 가장 많이 연상하는 방법인 파선추적법(ray tracing method)을 적용하여 초음파의 수치 모델링을 수행할 수도 있다. 이 방법의 근간은 Pao와 Gajewski[11]의 논문에 잘 설명되어 있는데, 그 해석 결과가 정확하기 위해서는 파장이 매우 짧아야 한다는 단점이 있다. 파선추적법을 적용함에 있어서 파동의 회절현상을 모사하기 위해 산란체의 표면에 파동을 방사하는 극점(pole)들을 등간격으로 배치하는 방법도 사용된 바 있다[12].

본 논문에서는 주로 유한차분법과 유한요소법의 기본 사항, 초음파검사 모델링에 적용할 때 고려해야 하는 사항, 최신 연구 동향, 그리고 적용 예를 제시함으로써, 이 기법들에 관한 기초지식을 제공하고 또한 그 유용성을 보이고자 한다.

## 2. 파동방정식

균질이고 등방성이며 선형탄성인 고체 시험체에 대한 초음파검사 문제를 수치적으로 모델링할 때, 유한차분법이나 유한요소법을 통해 푸는 수학적 문제는 식 (1)과 같은 선형 동탄성 파동방정식(elastodynamic wave equation, Navier equation)의 해를 구하는 것이다[13].

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \dots\dots\dots (1)$$

식 (1)에서  $\mathbf{u}$  는 3차원 변위벡터,  $\nabla$  는 gradient 연산자이고,  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 Lamé 상수,  $\rho$ 는 밀도이다.

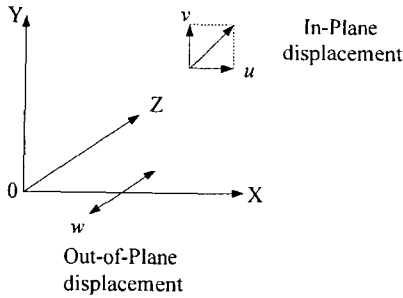


Fig. 1 Two-dimensional elastic wave

적용하는 기법과 계산에 사용되는 컴퓨터에 따라 차이가 있지만, 아직도 컴퓨터의 계산용량과 속도의 한계로 인하여 3차원 초음파 모델링 및 수치계산은 별로 실용성이 없는 경우가 많다. 따라서, 문제를 2차원화하여 다루는 경우가 많으며, 주로 평면변형을 조건하에서 면내 변위만 존재하는 경우와 면외 변위만 존재하는 두 가지 경우를 고려한다. 즉, Fig. 1과 같이 XY 평면에서의 2차원 탄성파를 고려할 때, 전자의 경우에는 X축과 Y축 방향의 변위 성분인  $u$  및  $v$ 만 존재하고, 후자의 경우에는 Z축 방향의 변위 성분  $w$ 만 존재한다. 면내 변위의 문제에 대한 지배방정식은 식 (1)을 단순화하여 다음의 식으로 표현되고,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

면외 변위의 경우에는 다음의 식으로 정리된다[13].

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

식 (2)로부터 면내 변위의 경우에는 두 변위 성분  $u$  및  $v$ 가 서로 연계(coupling)되어 있음을 알 수 있다. 이 경우에는 종파(P파, pressure wave, longitudinal wave)와 수직편향횡파(SV파, vertically-polarized shear wave)가 모두 존재하며, 초음파가 산란될 때 모드변환(mode conversion)이 발생하여 항상 새로운 P파와 SV파가 생성된다. 한편, 면외 변위의 경우에는 식 (3)과 같이 하나의 변위 성분  $w$ 만 존재하고 이러한 변위 성분을 갖는 파동은 수평편향횡파

(SH파, horizontally-polarized shear wave)로서 산란될 때 모드변환이 발생하지 않는다. 즉, 후자의 경우에는 마치 음파가 유체 내에서 전파될 때와 같은 스칼라파(scalar wave)가 되어 그 해석이 매우 간단해지고, 음파의 해석에 적용되는 모든 기법이 그대로 적용된다. 실제 초음파검사의 많은 문제는 전자의 경우에 보다 가깝다고 볼 수 있으므로 주로 이 경우에 대해 연구가 이루어져 왔다.

### 3. 유한차분법

#### 3.1. 차분방정식

본 절에서는 Fig. 1의 XY 평면 내에서 식 (2)에 의해 지배되는 2차원 파동 현상을 수치적으로 모델링하기 위한 유한차분 정식화(formulation)에 대해 살펴본다. 먼저, 2차원 공간을 효과적으로 이산화(discretization)하기에 적합한 격자를 선택하여야 한다. 가장 일반적으로 사용되는 격자는 X축 및 Y축에 평행한 직선군으로 구성되는 바둑판 형태의 직사각형(rectangular) 격자이지만, 필요에 따라서는 원통형(cylindrical), 평행사변형(skew rectangular) 등이 보다 적합한 경우도 있다. 본 논문에서는 매질이 등방성일 때 적합한 격자로서 X축과 Y축 방향으로의 절점 간격이  $h$ 로 동일한 정사각형 격자를 사용하는 경우에 대해 논의할 것이다. 그러나, 이방성 매질의 경우에 적합한 직사각형 격자나 여타 형상의 격자를 사용하는 경우에도 아래 논의의 대부분이 성립된다.

식 (2)를 유한차분법으로 정식화하기 위해서는 위에 설명한 공간 이산화 뿐만 아니라 시간에 관해서도 이산화하여야 한다. 이산화하는 시간 간격을  $\Delta t$ 라 하고, 식 (2)의 2차 미분항들을 중앙차분(central difference)으로 표현하면 매질 내부 절점에서의 차분방정식은 다음과 같이 된다[14].

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} &= 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) \\ &\quad + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k) + \frac{\lambda + \mu}{4\rho} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 (v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k) \\ v_{i,j}^{k+1} &= 2v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 (v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 (v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k) + \frac{\lambda + \mu}{4\rho} \cdot \\
 & \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 (u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k) \\
 & \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

식 (4)에서 첨자를 갖는  $u, v$ 는 각 절점에서의  $X, Y$  방향 변위를 나타내는데, 상첨자는 시간(time)을 나타내는 지수(index)이고 하첨자는  $(X, Y)$  위치를 나타내는 지수이다. 예를 들면,  $u_{i,j}^k$ 는 원래 위치의  $(X, Y)$  지수가  $(i, j)$ 인 절점의  $k$ 번째 시간에서의  $X$  방향으로의 변위를 나타낸다. 식 (4)는 explicit 차분방정식의 형태이므로 좌변에 나타나있는  $(i, j)$  절점의  $(k+1)$ 번째 시간에서의 변위는 우변의 모든 항, 즉 그 절점 및 인접한 절점의  $k$ 번째와  $(k-1)$ 번째 시간에서의 변위로부터 구해진다. 따라서, 초기조건으로서 두 인접한 시간에서 모든 절점에서의 변위값을 알고 있으면, 식 (4)로부터 그 이후 모든 시간의 변위를 구할 수 있다.

물론, 식 (4)가 Fig. 1의 문제에 대한 차분방정식으로서 유일한 것은 아니다. 중앙차분법 이외에도 미분항을 차분화하는 방법은 매우 다양하므로, 용도에 따라 적합한 차분법을 사용하여 식 (2)를 차분화함으로써 새로운 차분방정식을 얻을 수 있다. 이외에도, Alterman과 Aboudli[15]는 불균질 매질(heterogeneous media)에 대한 차분방정식을 개발하였고, Ilan 등[16]과 Bond[17]는 두 개의 상이한 매질로 구성된 문제에 대한 차분방정식을 전개하였다. 또한, Kishoni와 Ta'asan[18]은 장거리에 걸친 파동의 전파를 효과적으로 계산할 수 있는 차분방정식을 제안하였고, Schechter 등[19]은 parallel processing으로 계산을 수행하여 계산 시간을 절약할 수 있는 형태의 차분방정식을 개발하였으며, Yamawaki[20]는 표면파를 계산하기에 적합한 차분기법을 제시하였다. 최근에는 Lin이 유체역학의 유한차분법을 응용하여 개발한 다양한 차분기법을 단행본으로 정리하여 출판하기도 하였다[21].

위의 차분방정식 (4)는 매질 내부에서 성립되는 식 (2)를 차분화한 것이므로, 매질 내부의 절점에서만 성립된다. 매질의 경계에 위치한 절점에서는 그 경계에서의 경계조건을 차분화한 차분식을 적용하여야 한다. 예를 들어, 고정 경계(fixed boundary)에서는 변위를 0(zero)으로 하여야 하고, 자유표면에서는 트래션

(traction)이 0이 되도록 하여야 한다. 이를 위해서도 다양한 방법이 사용되는데, 예를 들면 자유표면의 외부에 실제로는 존재하지 않는 의사절점(pseudo-nodes)들을 설정하여 트래션 경계조건을 만족하도록 하는 방법이 많이 쓰인다. 또, 일직선의 자유표면 뿐 아니라 코너와 같은 다양한 형상을 갖는 자유표면의 경계조건을 차분식으로 표현하는 기법도 개발되어 있다[17, 22, 23].

다양한 종류의 유한차분법에 대해 살펴보았지만, 위의 예 이외에도 정식화와 계산 방식에 있어서 유한차분법과 매우 유사한 질량-스프링 모델도 초음파검사의 모델링에 많이 적용되어 왔다. 질량-스프링 모델은 자유표면의 처리에 있어서 유한차분법에 비해 훨씬 편리하다는 것이 큰 장점이다. 질량-스프링 모델에 대해서는 3.4절에서 자세히 살펴본다.

### 3.2. 계산 수행시 고려 사항

이산화된 차분방정식으로부터 초음파검사 문제의 수치해를 구하기 위해 반드시 검토하고 고려하여야 하는 몇 가지 사항에 대해 언급하고자 한다. 먼저, 사용하고 자 하는 유한차분 알고리즘의 신뢰성, 즉 부합성(consistency), 안정성(stability), 정확성(accuracy)을 검토하여야 한다. 이와 같이 미분방정식을 차분화한 차분 알고리즘의 신뢰성 평가는 이미 잘 확립되어 있는 방법을 사용하여 체계적으로 수행할 수 있다[24, 25]. 특히, 파동방정식은 쌍곡선형(hyperbolic) 미분방정식이므로 차분법으로 계산을 수행해나가기 위해서는 안정성이 확보되어야 하는데, 폰노이만(von Neumann) 해석법을 적용하면 안정성의 조건은 시간 간격과 절점 거리의 비, 즉  $\Delta t/h$ 에 관한 부등식의 형태로 나타난다. 안정성의 조건만을 고려하면  $\Delta t/h$ 의 비만 중요하나, 파형을 제대로 표현하기 위해서는 한 파장 내에 적어도 7개 이상의 절점이 포함되도록  $h$ 값을 결정하여야 한다[26]. 특히, 짧은 펄스(pulse) 형태의 파동은 넓은 주파수 스펙트럼(spectrum)을 가지므로, 짧은 파장을 갖는 주파수 성분도 정확하게 계산하기 위해서는  $h$ 값을 매우 작게 해야 하는 문제가 있다.

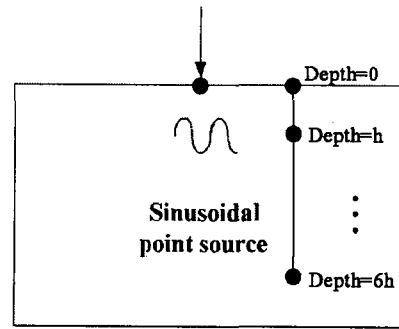
유한차분법으로 실제 계산을 수행할 때 부딪히는 큰 문제 중 하나는 격자의 경계로부터 발생하는 반사파이다. 즉, 컴퓨터의 계산용량이 유한하기 때문에 실제 계산 수행에서 고려되는 격자는 부득이 실제 매질보다 작은 영역이 되고, 따라서 실제로는 존재하지 않는 인위

적인 경계를 갖게 되어 이 경계에서 수치적으로 반사파가 생성되는 것이다. 이러한 가상의 반사파가 격자의 중심부 쪽으로 전파됨에 따라 연구자가 관심을 가지고 관찰하고 있는 영역의 변위장이 해석할 수 없을 정도로 복잡해지게 된다. 이 문제를 해결하기 위하여, 다양한 종류의 특수 경계조건이 고안되어 왔다. 예를 들면, Clayton과 Enquist가 개발한 음파 및 탄성파에 관한 파동흡수형 경계조건 (wave absorbing boundary condition)이 있고[27], 또 Kausel과 Tassoulas가 개발한 투과형 경계조건 (transmitting boundary condition)도 있다[28]. 특히, 최근에는 이러한 기법들 보다 우수한 성능을 갖는 완전부합층(perfectly matched layer)이라는 기법이 개발되었는데, 이는 Berenger[29]에 의해 전자기파에 대해 먼저 개발된 후 Chew and Liu[30]에 의해 탄성파에 적합한 형태로 발전되었다.

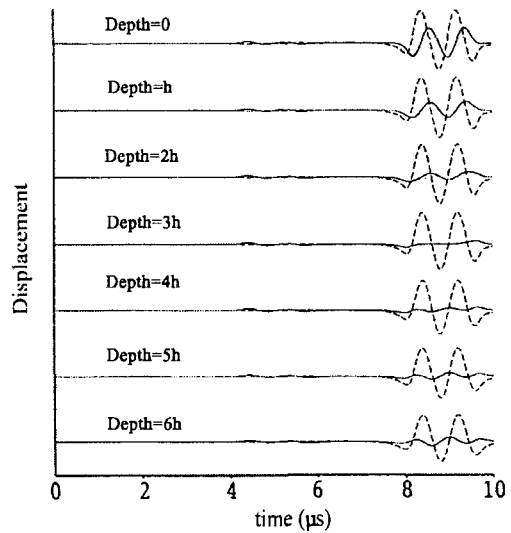
3.3. 적용 예

본 절에서는 다양한 유한차분법을 이용하여 얻은 계산 결과를 몇 가지 소개한다. 먼저, Yamawaki [20]가 개발한 유한차분법을 이용하여 표면파의 변위를 구한 결과가 Fig. 2에 나타나있다. 즉, Fig. 2(a)와 같이 자유표면의 한 점에서 사인(sine) 함수 형태의 수직 방향 힘으로 가진할 때, 가진점보다 우측의 자유표면상의 한 점(깊이=0) 및 같은 위치에서 깊이= $h, 2h, 3h, \dots, 6h$ 인 점들에서 발생하는 수평변위(실선)와 수직변위(점선)를 시간에 따라 그래프로 그려 Fig. 2(b)에 나타내었다[20]. Fig. 2(b)에서 7.5  $\mu\text{sec}$  근처에서 시작되는 변위가 표면파로 인한 변위이고 4.5  $\mu\text{sec}$  근처의 미세한 변위는 종파에 의한 변위이며, 이러한 결과는 해석해[31]와 잘 일치한다.

Fig. 3은 차분법을 이용하여 쌍특성곡선법(method of bicharacteristics)의 수치해를 구함으로써, 평면 종파가 균열에 입사되어 균열이 성장하는 경우의 변위장을 계산한 결과이다[21]. 즉, Fig. 3(a)와 같이 세로길이가  $2H$ 인 평판의 중앙에 판 길이의 반만큼 가로 방향으로 균열이 있고, 평판의 아래면으로부터 위쪽으로 판 길이 전체에 걸쳐 평면 종파가 입사하는 경우이다. 입사 종파는 폭  $3H/2$ 인 계단(step) 형태의 종파로서 그 선단은 갑자기 하중이 작용하여 계단 모양으로 변위가 발생하는 재하파/loading wave)의 형태이고 그 후미는 갑자기 하중이 제거되어 계단 모양



(a)

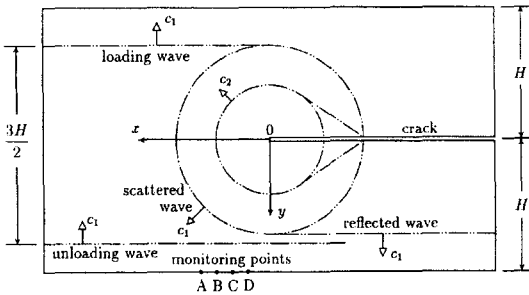


(b)

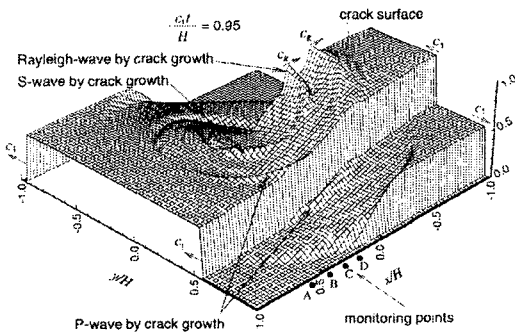
Fig. 2 Displacements associated with surface wave: (a) sinusoidal excitation on free surface, and (b) resulting horizontal displacement (solid) and vertical (dashed) displacements at locations near free surface [20]

으로 변위가 소멸되는 제하파(unloading wave)의 형태이다. Fig. 3(a)에는 입사파의 선단이 균열을 충분히 통과하였을 때 발생하는 여러 파동의 위치와 형상이 도식적으로 나타나있다. 즉, 입사 종파의 선단 (loading wave)에서 그 좌측부는 균열을 만나지 않으므로 그대로 전파하고 우측부는 균열에서 반사되어 아래면 쪽으로 돌아오는 한편, 균열선단에서 회절 종파(속도  $c_1$ )와 회절 횡파(속도  $c_2$ )가 발생 되어 균열 선단 (crack tip)을 중심으로 하는 원형파의 형상으로 전파

된다. Fig. 3(a)의 경우, 입사파의 후미(unloading wave)는 아직 평판의 아래면에 가까이 위치하고 있지만, 시간이 지나 균열부에 도달하면 선단(loading wave)과 마찬가지로 반사 및 회절될 것이다. Fig. 3(a) 보다 시간이 약간 더 경과하여 입사파의 후미가 선단의 반사파 보다 균열에 더 가까워진 한 시각에 대하여 실제 계산을 수행한 결과가 Fig. 3(b)에 나타나 있다. 이 계산을 수행함에 있어서, 탄성파에 의해 발생되는 응력세기계수(stress intensity factor)  $K_I$ 이 재료의 파괴인성치(fracture toughness)  $K_{Ic}$ 에 도달할 때부터, 균열이 표면파 속도  $c_R = 0.48526 c_1$ 으로 성장하는 것으로 가정하였다. 따라서, Fig. 3(b)의 결과에는 Fig. 3(a)에 표시된 파 이외에도 균열의 성장으로 인해 발생하는 파들이 함께 표시되어 있다.



(a)



(b)

Fig. 3 Wavefield due to reflection and diffraction of incident P wave step from growing crack: (a) schematic view of waves, and (b) computed result [21]

### 3. 4. 질량-스프링 모델

질량-스프링 모델은 경우에 따라 유한차분법과 상이한 방법으로 분류되기도 하지만, 그 차분방정식의 형태가 유한차분법과 유사하므로 본 논문에서는 유한차분법의 범주에 포함시켜 설명한다. 질량-스프링 모델은 탄성체를 질점(lumped mass point)과 스프링의 조합으로 생각하는 매우 기초적인 물리적 모델에 근거하고 있다. 예를 들면, Harumi 등 [32-34]에 의해 개발된 2차원 질량-스프링 모델에서는 Fig. 4와 같이 탄성체를 모델링한다. 그림을 단순화시키기 위하여 Fig. 4에는  $(i, j)$ 에 위치한 중앙의 질점과 연결된 스프링만을 표시하였다. Fig. 4의 모델에 사용된 스프링에는 두 가지 종류가 있는데, 하나는 질점과 질점을 직선으로 연결하는 직선형 스프링(extensional spring)이고, 또 하나는 두 질점을 연결하는 직선의 각도 변화에 따라 토크를 발생시키는 나선형 스프링(torsional spring)이다. Fig. 4의 모델에서 각 질점의 질량은  $m = \rho h^2$ 으로 결정되고, 스프링들의 스프링 상수는 매질의 밀도 및 탄성상수의 항으로 구해진다[35].

앞에서 언급한 바와 같이 질량-스프링 모델의 차분방정식이 식 (4)와 같은 형태이므로 질량-스프링 모델을 이용하여 수치해를 구해나가는 방법은 유한차분법과 동일하다. 시간 간격과 절점 거리도 3.2절에 설명된 바와 같이 안정성의 조건을 고려하여 결정하면 되고, 인위적인 격자 경계에서의 반사파를 제거하기 위해서도 동일한 원리의 반사파 제거용 경계조건을 적용할 수 있다. 따라서, 질량-스프링 모델은 계산을 수행함에 있어서

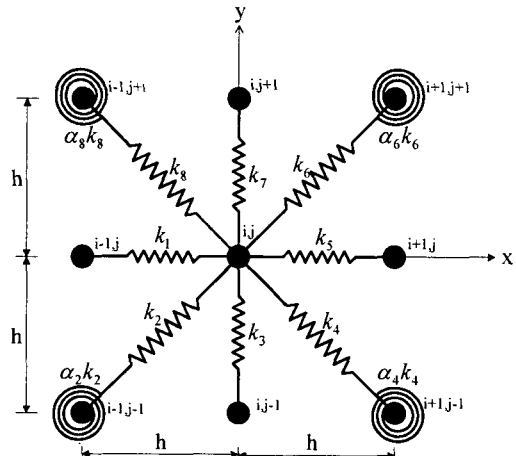


Fig. 4 Schematic of mass-spring lattice model

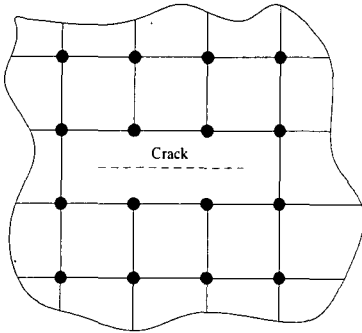
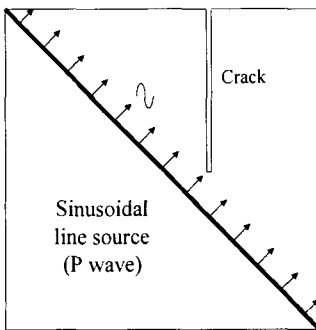


Fig. 5 Modeling of crack in mass-spring lattice model [32]

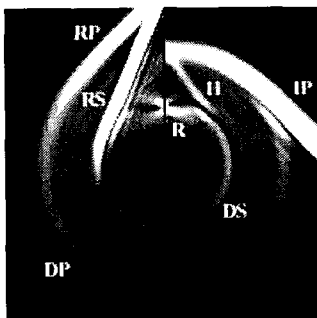
유한차분법과 동일한 방법이지만, 탄성체를 질점과 스프링의 조합으로 생각하는 물리적인 모델에 기초하고 있다는 개념적인 차이가 있다. 그리고, 실제 적용에 있어서 하나의 큰 차이점이 있는데, 질량-스프링 모델에

서는 매질의 경계면이나 균열면과 같은 자유표면의 처리가 매우 간단하다는 것이다. 예를 들어, 질량-스프링 모델을 이용하여 균열을 모델링하면 Fig. 5와 같이 된다[32]. 즉, 이 모델에서는 균열의 양쪽 면이 서로 구속 없이 자유롭게 변위될 수 있다는 점에 착안하여 균열면을 가로지르는 스프링을 제거(실제로는 스프링 상수를 0으로 놓음)하는 것이다.

개발된 질량-스프링 모델을 이용하여 파동해석을 수행한 두 가지 결과를 Fig. 6 및 7에 나타내었다[36]. Fig. 6(b)는 Fig. 6(a)에 보인 바와 같이 수직방향의 균열에 평면 종파가 45° 방향으로 입사할 때의 변위장을 질량-스프링 모델로 계산한 결과이다. Fig. 6(b)에서는 변위장의 각 픽셀(pixel)을 변위의 크기에 따라 명암이 서로 다른 256개의 회색(gray scale)으로 표현한 것이며, 변위가 클수록 밝아져서 흰색에 가까워진다. Fig. 6(b)에서 많은 파동이 나타나는 이유는 입사파가 좌측 균열면에서 반사될 때와 균열선단(crack tip)에서 회절될 때 발생하는 모드변환 때문이다. 이들 파동들을 Fig. 6(b)에서 흰 글자로 표시하였는데, 이들은 입사종파(IP), 반사종파(RP), 반사횡파(RS),

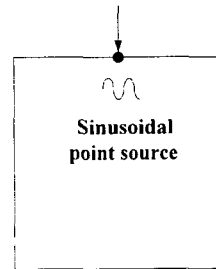


(a)

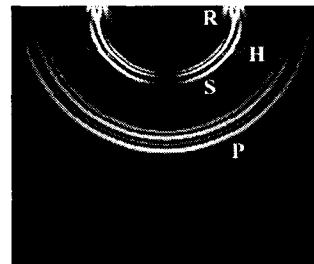


(b)

Fig. 6 Reflection and diffraction of plane P wave incident on vertical crack in 45° direction: (a) problem configuration, and (b) computed wavefield [35]



(a)



(b)

Fig. 7 Elastic waves generated by point excitation on free surface: (a) problem configuration, and (b) computed wavefield [35]

회절종파(DP), 회절횡파(DS), 표면파(R) 및 헤드파(H)이다. 두 번째 계산 예는 Fig. 7(a)와 같이 수평 자유표면의 한 점을 가진했을 때이며, 그 계산결과가 Fig. 7(b)에 나타나있다. Fig. 7(b)의 결과에서는 반원 모양으로 퍼져나가는 종파(P), 횡파(S), 표면파(R) 및 헤드파(H)를 명확하게 볼 수 있으며, 이러한 결과는 문헌[13]의 해석해와 정확하게 일치한다.

4. 유한요소법

4. 1. 초음파검사의 유한요소 해석

이미 언급한 바와 같이, 초음파검사 문제의 지배방정식은 2절에서 설명한 파동방정식 또는 동탄성방정식 (elastodynamic equation)으로서 수학적으로는 쌍곡선형(hyperbolic) 편미분방정식으로 분류된다. 유한요소 해석은 주로 구조해석이나 진동 모드해석과 같이 타원형(elliptic) 및 포물선형(parabolic) 편미분방정식의 해를 구하기 위해 적용되어 왔다. 일반적으로 쌍곡선형 편미분방정식은 타원형 및 포물선형에 비하여 어려운 문제로 인식되어 있으며, 이러한 문제에 대한 수치해의 정확성은 파동수(wavenumber)와 관련되어 있다. 구체적으로는, 유한요소 격자망의 크기를  $h$ 라 할 때  $h$  와 파동 수  $k$  사이에는 다음과 같은 식이 성립하는 것을 기본 규칙으로 한다[37].

$$kh = \text{constant} \dots\dots\dots (5)$$

즉, 주파수가 낮아서  $k$  값이 작을 때는 그다지 세밀한 격자망을 사용하지 않아도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있지만,  $k$ 가 커지면 격자망이 매우 촘촘해져야 한다. 그러나,  $h$ 가 작아지는 데에는 한계가 있으므로 해가 부정확해진다. 예를 들어, mm 크기의 결함을 찾기 위해 10 MHz이상의 초음파를 사용하는 경우, 한 파장당 20개 정도의 요소를 사용해야 한다면 철의 경우 파장이 0.03 mm 정도이므로 격자망은 쉽게  $1000 \times 1000$  (2차원) 또는  $1000 \times 1000 \times 1000$  (3차원)을 넘게 된다[38].

더구나 파동의 반사, 회절 등의 동적인 현상을 해석하기 위해서는 시간 축으로도 매우 작게 분할하여야 한다. 이러한 계산을 위해서 집중질량(lumped mass)을 사용한 explicit 시간적분법이나 동일 질량을 사용한 implicit 시간적분법을 이용하게 된다. 시간 축의 간격을  $\Delta t$ 라고 하면 결과의 정확성만을 위해서는  $\Delta t$ 가 작

을수록 좋으나, 계산 시간이 너무 길어지므로 실제로는 한계가 있다. Newmark 시간 적분을 사용하는 경우, 고주파 영역의 문제를 잘 표현하기 위해  $\Delta t$  값이 만족해야 하는 최소한의 조건은 한 cycle이 20개로 분할되어야 한다는 것이다[39]. 즉,

$$\Delta t \leq \frac{1}{20 f_{\max}} \dots\dots\dots (6)$$

식 (6)에서  $f_{\max}$ 는 관심 주파수 영역의 최대값이다. 그러나, 파형이 조화함수가 아니고 계단함수와 같이 급격히 변하는 형태일 때에는 더 세밀한 시간 간격이 요구된다. 즉,

$$\Delta t \leq \frac{1}{180 f_{\max}} \dots\dots\dots (7)$$

까지  $\Delta t$ 를 줄여야 하는 경우도 있다.

유한요소법을 실제 적용하는 경우 그 계산량과 정확성을 알아보기 위하여, 내경 51.05 mm, 외경 63.15 mm의 링(ring)에서 링의 중심 방향으로 최대 6 N/m의 톱날형(saw tooth) 수직 하중을 3  $\mu$ s 동안 가한 경우의 해석 결과를 살펴본다[39]. Table 1에는 WindowNT 개인용 컴퓨터(PC, 200 MHz CPU, 128 MB RAM)를 사용하여 특정한 격자망에서 55 s 동안 초음파 전달을 해석하는 경우,  $\Delta t$ 를 달리함에 따른 계산 소요시간 및 계산 가능한 최대주파수의 변화를 비교하여 놓았다. 또, 같은 문제에 있어서, 위에서 설명한 방법으로 시간 간격과 격자망을 결정하여 얻은 유한요소 해석 결과를 낮은 주파수 영역에서 흔히 쓰이는 모드중첩법(mode superposition)에 의해 얻은 결과와 비교한 것이 Fig. 8에 나타나있다. 링의 반경 방향의 변위를 60 $\mu$ s까지 두 가지 방법으로 구한 결과를 비교한 것인데, 유한요소법이 모드중첩법과 비교하여 상

Table 1 Comparison of total computation time and allowable maximum frequency for various time step size used in finite element analysis executed on personal computer [39]

Time step size $\Delta t$	Total computation time	Maximum frequency $f_{\max}$
0.2 $\mu$ s	8.5 h	0.25 MHz
0.1 $\mu$ s	17 h	0.5 MHz
0.05 $\mu$ s	36 h	1.0 MHz
0.025 $\mu$ s	78 h	2.0 MHz



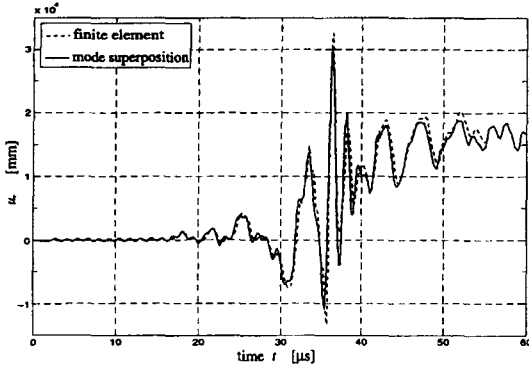


Fig. 8 Comparison between ultrasonic displacements calculated by finite element analysis and by mode superposition [39]

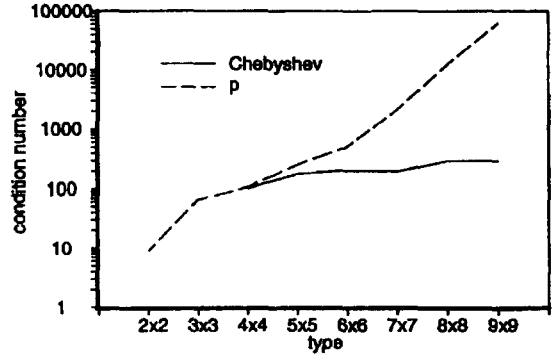


Fig. 9 Comparison between condition numbers of matrices generated by general p-method and by Chebyshev method [38]

당히 정확한 해를 제공하는 것을 확인할 수 있다.

그러나, 이 모든 방법이 구조 진동의 영역인 낮은 주파수에서는 비교적 정확한 결과를 제공해주지만, 고주파수 영역인 초음파 문제에 있어서는 이미 설명한 바와 같은 한계로 인해 큰 어려움이 있다. 앞에서와 같이 필요에 따라 격자망의 개수를 늘리고 그 크기를 줄여나가는 유한요소 해석법을  $h$  방법 이라고하고, 근사함수로 쓰이는 형상함수의 차수를 높여 나가는 방법을  $p$  방법 이라 하는데,  $h$  방법은 한계가 있으므로,  $p$  방법으로의 연구가 많이 진행되고 있다. 앞에서 언급한 explicit 방법은 한 시각에서의 계산은 빠르나 안정성 조건으로 인해 시간 분할에 제한을 받아 한계에 부딪히므로, 안정성에 의한 제한이 없는 implicit 방법을 사용하는 것을 고려해 볼 수 있지만 이 또한 단위 시간 당의 계산량이 너무 많아지는 문제점을 갖고 있다. 더욱이, 이 두 방법은 모두 수치적인 분산(numerical dispersion)을 갖고 있어서 초음파 문제에 적용하기에는 충분하지 않다. 따라서 상당한 노력이  $p$  방법에 경주되어 왔다[40].

표준적인  $p$  방법은 일반적으로 형상함수로 많이 쓰이는 다항식(Lagrange polynomial)의 차수를 높여가는 방법이다. 현재 사용되는 대부분의 상용패키지들에서는 저차의 다항식이 사용되고 있다. 3차원의 고유진동수 해석에서 형상함수의 차수를 1차에서 4차로 올렸을 때, 더 정확한 해를 얻음을 보여 주는 결과 등이 발표된 바 있지만, 차수를 높임에 따라 수치해석적인 문제를 일으키게 되므로 너무 많이 높일 수는 없다.

다항식의 차수를 높이는  $p$  방법과 달리 아예 다른 중

류의 함수를 사용하기도 한다. Chebyshev 다항식은 잘 알려진 직교다항식(orthogonal polynomial)인데 여러 종류의 파동 해석에 많이 적용되어 왔고, 특히 유체역학에서는 기본적인 도구로 사용되어 왔다[41]. 이 Chebyshev 다항식을 이용하고 시간에 대해서는 중앙차분방정식(central difference)을 사용하여 2차원 파동 해석에서 좋은 결과를 얻고 있다. Fig. 9는 일반적인  $p$  방법과 Chebyshev 방법을 사용할 때 생성되는 행렬의 condition number를 격자망의 크기에 따라 그래프로 그려 비교한 것인데, Chebyshev 다항식을 사용하는 것이 실제 계산량에 있어서 어느 정도의 이익이 있는지를 살펴볼 수 있다[38].

초음파검사에 관하여 유한요소법을 적용하여 수행된 1995년까지의 연구 성과는 NDT&E의 Abstract 난에 잘 정리되어 있다[42]. 파동전달을 해석하기 위하여 유한요소법을 적용할 때 보통 Galerkin 정식화(formulation)를 사용하는데, 전통적인 Galerkin 방법(G)은 수치적인 문제가 발생하므로 Galerkin/Least-Square (GLS), Galerkin/Gradient-Least Square (GGLS) 등이 도입되어 음향문제에 있어서 더 좋은 결과를 얻은 바 있으나 강성(stiffness)이 방향에 따라 변하는 탄성 초음파 전달 문제에서는 GGLS 만이 좋은 결과를 제공한다[43]. 또 하나의 다른 방법으로서 Fourier - FEM이 시도되고 있다. 이 방법은 유체-구조 병합 음향 문제를 푸는데 효과적이어서 앞으로 초음파검사의 모델링에 있어서 기대가 되는 방법이나 아직 초음파 전달 문제의 해를 구하는 결과까지는 발표된 바 없다[44].

4.2. 적용 예

아직도 활발하게 연구가 진행되고 있는 분야인 만큼 최근에 많은 연구 결과가 발표되고 있다. 이 논문에서는 비교적 중요한 결과들을 참고문헌과 함께 언급하고자 한다. 우선, 초음파검사를 시뮬레이션하기 위하여 반드시 필요한 것이 초음파 탐촉자의 모델링이다. 이러한 연구는 초음파의 방사장을 미리 예측하여 실험 계획을 수립하기 위해서도 필요한데, 많은 연구가 주로 전자공학 분야에서 수행되었다. 특히 IEEE의 초음파 부문(UFFC) 논문집 제 44권 3호는 유한요소 해석에 관한 특집호로서 이 분야의 연구 결과를 심도 있게 다루고 있다[45]. 이미 압전현상에 대한 모델링은 잘 되어 있으므로, 이 특집호에서는 재질이나, 탐촉자의 형상, 초음파의 전달특성 등에 대한 연구 결과를 주로 실고 있다.

이러한 노력의 결과가 실제적인 설계에 반영되어 좋은 결과를 낳은 예를 하나 들고자 한다[46]. 생체조직 검사를 할 때 X선이나 초음파를 이용하여 검사의 전 과정을 화면으로 관찰할 수 있다. 인체에 대한 영향을 고려하면 초음파를 사용하는 것이 좋은데, 그 동안의 어려움은 화면상에서 초음파 침이 보이지 않는 것이었다. 이 문제는 침을 진동시키므로써 해결되었는데, 침에 색차 도플러 장치를 장착하여 초음파 영상 화면에서 침의 위치가 보이도록 한 것이다. 이러한 시스템을 설계하기 위하여 매우 정밀한 해석이 필요하였는데, 이 연구에서는 상용 유한요소 해석 패키지인 Algor[47]를 사용하

여 침이 화면상에서 가장 잘 나타나는 고유진동수를 가지도록 그 형상과 크기를 최적화한 것이다. 이는 수 백 개의 모형(prototype)을 실제로 만들어 비교하는 대신 유한요소법으로 정확하게 초음파 모델링을 수행함으로써 많은 시간과 비용을 절약한 결과이다.

이외에도 상용 유한요소 해석 소프트웨어를 사용한 결과가 많이 있다. 예를 들면, Sansalone 등은 DYNA2D[48]를 이용하여 2차원의 문제에  $h$  방법을 적용하여 연구하였으며[49], Moser 등은 ANSYS [50]를 사용하여 판 및 링에서의 초음파 전달을 2차원으로 해석하여 실험과 잘 일치하는 결과를 얻었다[39].

산업현장에서 초음파 모델링의 연구 결과가 사용되려면, 사용자 편의성이 확보된 소프트웨어의 형태로 주어지지 않으면 안 된다. 그러나, 현재까지는 모든 목적에 맞는 범용의 초음파검사 모델링용 유한요소 해석 소프트웨어는 나와 있지 않다. 따라서, 위에 소개한 바와 같이 이미 개발되어 있는 매우 일반적인 용도의 범용 상용 소프트웨어로 초음파 문제를 해석하기 위해 많은 노력을 기울이고 있는 것이다. 단, 특정한 목적을 가지고 유한요소법으로 초음파 모델링을 수행하기 위하여, 그 목적에 맞는 전용 프로그램을 개발하는 경우는 더러 있다. 예를 들면, 다층구조상에서 판파의 분산곡선(dispersion curve)을 구할 수 있는 전용 프로그램이 개발된 바 있는데, 보다 복잡한 형상에 대한 해석이 가능하기 위해서는 유한요소 기법을 보다 발전시켜야 할 것이다[51].

또, 재료의 물성을 초음파로 평가하기 위한 연구로서 Romano 등은 NRL에서 개발된 축대칭 문제를 해석할 수 있는 AXFEM을 사용하여 재료의 물성을 비파괴적으로 계산하였다[52]. 이승석 등은 더욱 일반적인 문제로서 ABAQUS[53]를 이용하여 이방성을 포함한 문제를 해석하기도 하였다[54].

다른 방법의 결과와 비교하거나 다른 방법과 결합하여 하이브리드(hybrid) 모델로 해석을 수행한 예로서는 Gauss-Hermite beam 모델과 비교한 것[55], 유한차분법과 결합한 것[56], 진동학에서 많이 도입된 정상모드와의 결합방법[57] 등이 있다. 이외에도, 레이저 초음파[58], 파괴역학과 연관된 균열의 해석[59], 무한요소소의 도입[60], 유한요소법에 파동의 개념을 도입[61], 다공성 재료에 대한 해석[62], 비선형문제[63] 등에 대해 연구가 이루어지고 있다.

실제 해석 결과의 한 예로서, Fig. 10 과 같이 유체/고체 경계면이 있는 문제에서 초음파의 전파 및 산란현

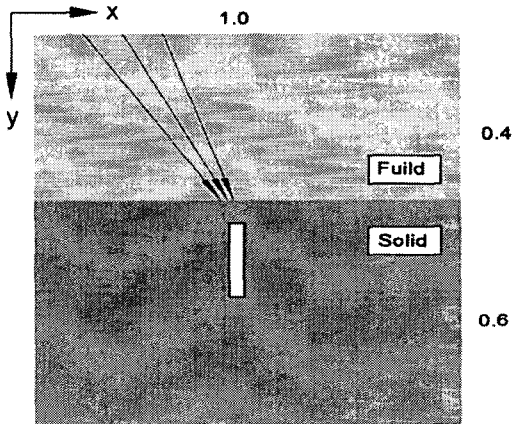


Fig. 10 Two dimensional geometries with fluid/solid interface [64]

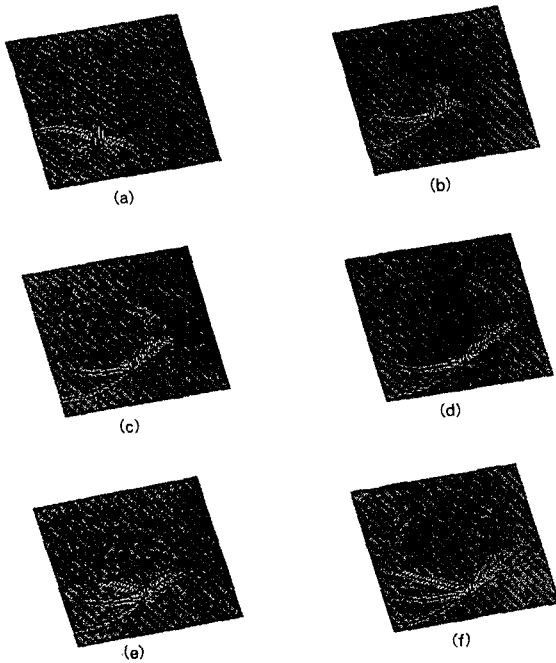


Fig. 11 Wavefields for problem in Fig. 10, at (a)  $t=3$ , (b)  $t=4.5$ , (c)  $t=5$ , (d)  $t=5.5$   $\mu\text{sec}$  (without void), and (e)  $t=5$ , (f)  $t=5.5$   $\mu\text{sec}$  (with void) [64]

상을 유한요소법으로 계산한 결과를 고찰하고자 한다 [64]. 유체는 물 (음파속도,  $c = 1500$  m/s; 밀도,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>), 고체는 알루미늄 (종파속도,  $v_1 = 6300$  m/s; 횡파속도,  $v_2 = 3100$  m/s; 밀도,  $\rho = 2700$  kg/m<sup>3</sup>)이다. 가진 신호는 중앙 주파수가 5 MHz, 밴드폭 (bandwidth)이 2.2 MHz인 코사인(cosine) 함수 형태이다. 1 cm<sup>2</sup>의 면적에 500×500 개의 정사각형 요소가 사용되었고 시간 분할은  $\Delta t = 2.5$  ns이다. 가진 신호는 0.3 cm의 너비로  $x = 0.2$  cm 에 위치하여  $x = 0.347$  cm의 위치의 경계면에 초점을 맞추었다. 각 시간별로 파동의 전달을 Fig. 11에 표시하였다. Fig. 11(a)-(d)는 기공(void)이 없는 경우이고, (e), (f)는 기공이 있는 경우이다[64]. 이 그림은 Fig. 10을 좌상에서 바라본 결과이다.

## 5. 결 언

본 논문에서는 주로 유한차분법과 유한요소법을 중심으로 하여 초음파검사의 수치적 모델링 기법에 관해 살

펴보았다. 유한차분법과 유한요소법 모두 초음파검사 분야에서 매우 활발하게 연구되어 온 기법으로서 수행된 모든 연구 결과를 소개하는 것은 불가능하므로, 본 논문에서는 이들 기법의 개요를 설명하고 실제 적용시의 고려사항이나 문제점을 살펴본 후 대표적인 연구 결과를 소개하는 것으로 만족하였다. 두 기법 모두 아직 완성되지 않은 방법으로서 많은 연구·개발이 활발히 진행되고 있으며, 그 결과 점차로 보다 정확한 수치적 모델링이 가능해지고 있다. 아직까지는 두 기법 모두, 임의의 매질, 임의의 주파수를 갖는 초음파검사 문제에 적용 가능한 범용 초음파모델링 소프트웨어의 형태로 개발되어 있지 않다. 그러나, 주지하는 바와 같이 컴퓨터 하드웨어 및 소프트웨어 기술의 발전과 더불어 초음파 검사에 대한 물리적 이해가 증진됨에 따라, 멀지 않은 미래에 이러한 범용의 소프트웨어가 개발될 수 있을 것으로 기대한다. 그 때에는, 이러한 소프트웨어를 이용하여 누구나 쉽게 최적의 초음파검사법을 설계할 수 있고, 또한 검사 결과를 쉽고 정확하게 분석할 수 있게 될 것으로 믿는다.

아직까지는 초보적이거나 개선의 여지가 많이 있지만 초음파의 수치적 모델링만을 위해 상용으로 또는 연구용으로 개발된 소프트웨어들 중 인터넷에서 쉽게 접할 수 있는 것들을 소개하는 것으로 본 논문을 맺고자 한다.

- 1) PZFlex (<http://www.wai.com/AppliedScience/Software/Pzflex>): 압전현상을 이용한 탐촉자의 모델링을 유한요소법으로 해석할 수 있는 소프트웨어이다.
- 2) Imagine3D (<http://www.utex.com>): 파선추적법을 사용하여 UTEX사에서 개발한 3차원 시뮬레이션 소프트웨어로 탐촉자로부터 출발하여 초음파의 전파 및 A, B 스캔 결과를 관찰할 수 있다.
- 3) Wave2000, Wave3000 (<http://www.cyberlogic.com>): 유한차분법에 근거한 시뮬레이션 소프트웨어로서 현재는 2차원 모델러(modeler)인 Wave2000이 시판되고 있고, 3차원인 Wave3000은 개발중이다.
- 4) WinUT (<http://www.cnde.iastate.edu/cnde/WinUtHomePage.htm>): Iowa State University에서 개발하고 있는 무료 소프트웨어인데 현재 개발 최종 단계이다.

## 후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

- [1] 송성진, "단일 매체에서의 평면 초음파 탐촉자의 방사 음장 모델링 기법", 비파괴검사학회지, Vol. 20, No. 2, pp. 91-101, (2000)
- [2] 정현조, "고주파수 근사 이론을 이용한 결함으로부터의 초음파 산란장 해석", 비파괴검사학회지, Vol. 20, No. 2, pp. 102-109, (2000)
- [3] L. J. Bond, "Methods for the Computer Modelling of Ultrasonic Waves in Solids", Research Techniques in NDT, ed. R. S. Sharpe, Vol. 6, Academic Press, pp. 312-328, (1982)
- [4] Z. S. Alterman, and J. Abodi, Israel J. Technol., Vol. 7, pp. 135-147, (1969)
- [5] L. D. Bertholf, J. Appl. Mech., Vol. 34, No. 3, pp. 725-734, (1967)
- [6] [http://www.engr.usask.ca/~macphed/finite/fe\\_sub\\_resources/fe\\_sub\\_resources.html](http://www.engr.usask.ca/~macphed/finite/fe_sub_resources/fe_sub_resources.html)
- [7] C. V. Dodd, in Research Techniques in NDT, ed. R. S. Sharpe, Vol. 3, Academic Press, pp. 429-480, (1977)
- [8] G. Dobmann and P. Höller, in Research Techniques in NDT, ed. R. S. Sharpe, Vol. 4, Academic Press, pp. 39-70, (1979)
- [9] I. E. Alsop and A. S. Goodman, I.B.M. J. Res. Dev., Vol. 16, pp. 365-371, (1972)
- [10] 이준현, 이서일, "경계요소법을 이용한 초음파 산란장 해석에 관한 연구", 비파괴검사학회지, Vol. 20, No. 2, pp. 130-137, (2000)
- [11] Y.-H. Pao and R. R. Gajewski, in Physical Acoustics, ed. Mason and Thurston, Vol. 8, Academic Press, p. 183, (1977)
- [12] V. M. Baborovsky, D. M. Marsh and E. A. Slater, NDT, Vol. 6, No. 4, pp. 200-207, (1973)
- [13] J. D. Achenbach, Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, (1976)
- [14] Z. S. Alterman and D. Loewenthal, "Seismic Waves in a Quarter and Three-Quarter Plane", Geophys. J. R. Astr. Soc., Vol. 20, No. 2, pp. 101-126, (1970)
- [15] Z. S. Alterman and J. Aboudi, Geophys. J. R. Astr. Soc., Vol. 21, pp. 47-64, (1970)
- [16] A. Ilan, A. Unger and Z. S. Alterman, Geophys. J. R. Astr. Soc., Vol. 43, pp. 727-742, (1975)
- [17] L. J. Bond, Ph.D. Thesis, The City University, London, U.K., (1978)
- [18] D. Kishoni and S. Ta'asan, "Improved Finite Difference Method for Long Distance Propagation of Waves", Rev. Prog. Quant. NDE, D. O. Thompson and D. E. Chimenti (Eds.), Vol. 12A, Plenum Press, pp. 139-146, (1993)
- [19] R. S. Schechter, H. H. Chaskelis, R. B. Mignogna and P. P. Delsanto, "Visualization of 2-Dimensional Acoustic Waves in Solids Using Parallel Processing Techniques", Rev. Prog. Quant. NDE, D. O. Thompson and D. E. Chimenti (Eds.), Vol. 13A, Plenum Press, pp. 109-116, (1994)
- [20] H. Yamawaki and T. Saito, "Numerical calculation of surface waves using new nodal equation", Nodestr. Test. Eval., Vol. 8-9, pp. 379-389, (1992)
- [21] X. Lin, Numerical Computation of Stress Waves in Solids, Akademie Verlag, Berlin, (1996)
- [22] A. Ilan, J. Comp. Phys., Vol. 29, pp. 389-403, (1978)
- [23] M. Fuyuki and Y. Masumoto, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 70, pp. 2051-2069, (1980)
- [24] W. F. Ames, Numerical methods for partial differential equations, Academic Press, pp. 236-284, (1992)
- [25] L. Lapidus and G. F. Pinder, Num-

- erical solution of partial differential equations in science and engineering, John Wiley & Sons, pp. 162-185, (1982)
- [26] R. M. Alford, K. R. Kelly and D. M. Boore, *Geophys.*, Vol. 39, No. 6, pp. 834-842, (1974)
- [27] R. Clayton and B. Engquist, "Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations", *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 67, No. 6, pp. 1529-1540, (1977)
- [28] E. Kausel and J. L. Tassoulas, "Transmitting boundaries: A close-foro-man comparison", *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 71, No. 1, pp. 143-159, (1981)
- [29] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, pp. 185-200, (1994)
- [30] W. C. Chew and Q. H. Liu, "Perfectly matched layers for elastodynamics: A new absorbing boundary condition", *J. Comp. Acoust.*, Vol. 4, No. 4, pp. 341-359, (1996)
- [31] J. Miklowitz, *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, (1973)
- [32] K. Harumi and T. Igarashi, "Computer simulation of elastic waves by a new mass-point system with potentials", *J. Nondestr. Test. of Japan*, Vol. 12, pp. 807-816, (1978)
- [33] K. Harumi, "Computer simulation of ultrasonics in a solid", *NDT Intl.*, Vol. 19, No. 5, pp. 315-332, (1986)
- [34] K. Harumi, M. Uchida, T. Miyajima and Y. Ogura, "Defect sizing of small inclined cracks on a free surface using multi-tip waves", *NDT&E International*, Vol. 25, No. 3, pp. 135-144, (1992)
- [35] 손영훈, 유한차분 모델과 질량-스프링 모델을 이용한 고체내 탄성과 전파의 수치적 연구, 석사학위 논문, 홍익대학교, (1998)
- [36] H. Yim and Y. Sohn, "Numerical simulation and visualization of elastic waves using mass-spring lattice model", *IEEE Trans. UFFC*, Vol. 47, No. 3, pp. 549-558, (2000)
- [37] F. Ihlenburg and I. Babuska, "Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part I: The h-Version of the FEM", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 30, pp. 9-37, (1995)
- [38] W. Dauksher and A. F. Emery, "An Evaluation of the Cost Effectiveness of Chebyshev Spectral and p-Finite Element Solutions to the Scalar Wave Equation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 45, pp. 1099-1113, (1999)
- [39] F. Moser, L.J. Jacobs and J. Qu, "Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method", *NDT&E International*, Vol. 32, pp. 225-234, (1999)
- [40] C. A. Issa, K. S. Iyer, and K. Balasubramaniam, "Numerical modelling of ultrasonic wave propagation using the efficient p-version finite element method", *Ultrasonics*, Vol. 32, pp. 13-20, (1994)
- [41] J. P. Boyd, *Chebyshev & Fourier spectral methods*, Springer-Verlag, (1989)
- [42] *NDT Abstracts*, *NDT&E International*, Vol. 29, No. 4, pp. 243-256, (1996)
- [43] I. Harari, "Improved finite element methods for elastic waves", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 166, pp. 143-164, (1998)
- [44] F. Ihlenburg, *Finite element analysis of acoustic scattering*, Springer-Verlag, (1998)
- [45] R. Lerch, "Introduction to the Special Issue on Finite Element Applications", *IEEE Trans.*, UFFC, Vol. 44, May, (1997)
- [46] F. DeBernardis, "Finite Element Analysis

- Software to Improve Reliability of Ultrasound-Guided Biopsies", *Materials Evaluation*, March, (1996)
- [47] <http://www.algor.com/homepag2.htm>
- [48] <http://www.macsch.com/>
- [49] M. Sansalone, N.J. Carino, and N.N. Hsu, "Finite element studies of transient wave propagation, Review of Progress in Quantitative NDE", Vol. 6A, Plenum Press, New York, pp. 123-133, (1986)
- [50] <http://www.ansys.com/>
- [51] 유승현, 다층구조상에서 판파의 분산곡선 작성용 해석 프로그램 개발에 관한 연구, 연구보고서, 표준과학연구원, (1998)
- [52] A. J. Romano, J. J. Shirron and J. A. Bucaro, "On the Noninvasive Determination of Material Parameters from a Knowledge of Elastic Displacements: Theory and Numerical Simulation", *IEEE Trans., UFFC*, Vol. 45, May, (1998)
- [53] <http://www.hks.com>
- [54] S. S. Lee, U.-S. Min, B.Y. Ahn and S. H. Yoo, "Elastic constants determination of thin cold-rolled stainless steels by dynamic elastic modulus measurements", *J. of Materials Science*, Vol. 33, pp. 687-692, (1998)
- [55] A. Minachi, Z. You, R. B. Thompson and W. Lord, "Predictions of the Gauss-Hermite Beam Model and Finite Element Method for Ultrasonic Propagation through Anisotropic Stainless Steel", *IEEE Trans., UFFC*, Vol. 40, 338-346, Jul., (1993)
- [56] A. Monorchio and R. Mittra, "A Hybrid Finite-Element Finite-Difference Time-Domain (FE/FDTD) Technique for Solving Complex Electromagnetic Problems", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 8, pp. 93-95, Feb., (1998)
- [57] R. Le Letty, F. Claeysen, N. Lhermet, B. Hamonic, J. N. Decarpigny and R. Bossut, "Combined Finite Element-Normal Mode Expansion Methods in Electroelasticity and their Application to Piezoactive Motors", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 40, pp. 3385-3403, (1997)
- [58] J. H. Lee and C. P. Burger, "Finite Element Modeling of Laser-Generated Lamb Waves", *Computer & Structure* Vol. 54, pp. 499-514, (1995)
- [59] Z. Chang and A. Mal, "Scattering of Lamb Waves from a rivet hole with edge cracks", *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 197-204, (1999)
- [60] L. F. Kallivokas, J. Bielak, R. C. MacCamy, "A Simple Impedance-Infinite Element for the Finite Element Solution of the Three-Dimensional Wave Equation in Unbounded Domain", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 147, pp. 235-262, (1997)
- [61] B. F. Shorr, "A Wave Approach to Finite Element Analysis of Solids", *Mechanical Research Communications*, Vol. 26, pp. 191-196, (1999)
- [62] P. Goransson, "A 3-D, Symmetric, Finite Element Formulation of the Biot Equations with Application to Acoustic Wave Propagation through an Elastic Porous Medium", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 41, pp. 167-192, (1998)
- [63] A. Ravasoo, "Nonlinear Waves in Characterization of Inhomogeneous Elastic Material", *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 205-213, (1999)
- [64] T. Xue, W. Lord, and S. Udpa, "Finite Element Simulation and Visualization of Leaky Rayleigh Waves for Ultrasonic NDE", *IEEE Trans., UFFC*, Vol. 44, 557-564, (1997)