

유한 고체내 탄성동역학 문제의 모델링

Modeling of Elastodynamic Problems in Finite Solid Media

조 윤 호*
 Younho Cho*

초 록 본 논문에서는 유한 고체내 초음파 전파 및 산란 현상의 해석을 위한 다양한 경계요소 모델링 기법이 제시되었다. 박판 재료내 유도초음파 전파에 대한 모드해석을 위해 비균질 적층 박판 구조물에 대한 탄성동역학 경계치 문제가 설정되었으며 이에 대한 수치해로부터 유도초음파의 전파특성을 나타내는 분산곡선이 얻어졌다. 파동 산란시 발생하는 기하학적 복잡성과 모드변환 문제를 수치적으로 모델링하기 위해 탄성 동역학 경계요소법을 적용하였고 이를 박판내 유도초음파의 이론적 직교 모드의 중첩해와 결합시킨 혼합형 경계요소법으로 확장하여 유한 고체내 다중 모드변환의 효율적 모델링법이 제안되었다. 주파수 영역의 수치해로부터 시간 의존 문제의 파동신호 예측을 위해 역 푸리에(Fourier) 변환을 통한 시간 영역 파동산란 신호가 얻어졌다. 이와 함께 실제 초음파 탐상조건에 보다 가까운 파동산란 문제의 모델링을 위해 3차원 경계요소법을 소개하고, 개발중인 3차원 경계요소 프로그램을 이용하여 유한 직경을 갖는 봉재내의 파동 전파를 수치적으로 해석하여 해석해와 비교 검증하였다. 본 논문에서 제시된 탄성파동 모델링 기법은 정량적 비파괴 평가법을 확립하는데 다양하게 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

주요어: 초음파 모델링, 파동전파 및 산란, 유도초음파, 경계치문제, 경계요소법

Abstract Various modeling techniques for ultrasonic wave propagation and scattering problems in finite solid media are presented. Elastodynamic boundary value problems in inhomogeneous multi-layered plate-like structures are set up for modal analysis of guided wave propagation and numerically solved to obtain dispersion curves which show propagation characteristics of guided waves. As a powerful modeling tool to overcome such numerical difficulties in wave scattering problems as the geometrical complexity and mode conversion, the Boundary Element Method(BEM) is introduced and is combined with the normal mode expansion technique to develop the hybrid BEM, an efficient technique for modeling multi mode conversion of guided wave scattering problems. Time dependent wave forms are obtained through the inverse Fourier transformation of the numerical solutions in the frequency domain. 3D BEM program development is underway to model more practical ultrasonic wave signals. Some encouraging numerical results have recently been obtained in comparison with the analytical solutions for wave propagation in a bar subjected to time harmonic longitudinal excitation. It is expected that the presented modeling techniques for elastic wave propagation and scattering can be applied to establish quantitative nondestructive evaluation techniques in various ways.

Keywords: ultrasonic wave modeling, wave propagation and scattering, guided waves, boundary value problems, boundary element method

1. 서 론

각종 재료나 구조물의 초음파 비파괴평가는 피시험체

내로 전파되는 탄성파의 산란신호를 분석하는데 기초하므로, 정량적인 비파괴 평가기법의 확립을 위해서는 고체 매질내 탄성파의 전파 및 산란현상에 관한 물리적

이해가 필수적으로 선행되어야 하며 Achenbach 나 Bond 등은 다양한 탄성과 모델링 기법의 장단점을 비교 분석하여 탐상조건에 맞는 최적의 모델링 기법을 제시한 바 있다[1,2]. 특히 입사되는 초음파의 파장이 피시험체의 두께에 비해 무시할 수 없을 경우에는 탄성과의 전파 및 산란특성이 매질내 산란체 뿐만 아니라 피시험체의 외부 경계면에서의 경계조건에도 크게 영향을 받게되어 수신되는 초음파 신호는 더욱 복잡 다양하게 나타난다[3-12]. 최근 대형 구조물에 대한 광범위 평가법으로 많은 관심을 불러일으키고 있는 유도초음파 (ultrasonic guided wave) 탐상법이나 표면파 탐상법등이 이에 해당되며 이는 피시험체의 외부 경계면으로부터 다중반사된 초음파의 모드변환과 이들 산란파가 피시험체 내에서 중첩되는 과정에서, 입사된 초음파 음장과 매질내 산란체로부터의 산란음장에 많은 영향을 주게되기 때문이다. 따라서 이 경우에는 실제 탐상조건에 맞는 초음파 신호를 예측하기 위해 피시험체를 유한고체로 정의하여 초음파의 전파 및 산란에 관한 모델링을 수행하여야 한다[6-11].

일반적으로 유도초음파 전파에 관한 모델링 기법은 등방성재료와 이방성재료의 경우로 나누어 생각할 수 있으며, 주어진 모델의 표면 경계조건과 함께 전자의 경우는 지배방정식에 Helmholtz decomposition[3]으로부터 유도된 파동 포텐셜(potential)을 이용하거나, 후자의 경우는 부분파(partial wave) 중첩법[14]을 적용하여 경계치 문제의 해를 구함으로써 각 모드의 전파속도와 입사신호를 얻게 된다.

주파수에 비해 두께가 충분히 얇은 고체 박판 재료의 경우에 그 판에서 전파되는 유도초음파를 판파라고 하는데 최근에 그에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다[3-12]. Rose 등[5]은 항공기내 접합연결부(bonded joint)를 판파를 이용하여 비파괴적으로 조사하였으며, 결합과 박리현상 검출에 판파를 이용하기 위해서는 모드와 주파수 선정이 중요하다고 지적하였고, 이 선정이 잘못되면 비파괴검사가 되지 않는다고 하였다. Rose 등[3,4,8]은 증기발생기의 튜브의 비파괴 검사를 판파에 의해 수행하기 위해, 특별한 모드와 주파수의 선정이 매우 중요함을 이론과 실험을 통해 입증하였다. 튜브와 같은 원통형 유한 고체내의 탄성파의 전파현상에 관한 경계치 문제의 해석 기법은 Gazis, Cho, Nagy 등에 의해 제시된바 있다[3,13,14].

판파는 그 특성상 판재의 표면이 유체와 닿아 있을 경우 감쇠가 일어난다. 이에 대한 연구로서 Nagy[14]

는 부분파 중첩법을 이용하여 물에 잠긴 봉에서의 종파의 전파와 파의 감쇠를 계산한 결과 특정 주파수 영역에서는 위상속도가 큰 영향을 받는다는 것을 밝혔다. 최근에는 감쇠가 없는 경우의 위상속도를 초기치로 하여 복소수 영역에서의 파수를 계산함으로써 유도초음파의 각 모드에 대해 주파수에 따른 감쇠의 크기를 계산하는 모델링 기법이 발표된 바 있다[3,15].

유도초음파의 전파에 관한 모델링과 달리 유한 두께의 피시험체 내에 존재하는 각종 결함과 같은 산란체를 포함한 초음파 산란 모델링은 다중모드 변환과 수치모델의 기하학적 복잡성에 기인하여 해석적인 방법으로는 어렵다. 이를 극복하기 위해서는 임의의 산란주기 및 피시험체 형상을 요소분할에 의한 수치적분의 도움으로 모델링 할 수 있는 유한요소법(FEM, finite element method)이나 경계요소법(BEM, boundary element method)의 적용이 필수적이며, 특히 파동문제와 같이 구하는 수치해가 모델의 경계면에서 중요시되는 경계치 문제의 경우에는 경계면에서의 수치해의 정확도와 모델링의 효율성을 고려하여 경계요소법이 널리 활용되고 있다[7,9,16,17]. 파동문제의 경계요소법은 무한체 내의 산란체에 대한 산란 모델링에 사용되는 외부영역 경계요소법(exterior BEM)과 유한체내의 파동 산란 모델링을 위한 내부영역 경계요소법(interior BEM)으로 나누어진다[16,17]. 전자의 경우에는 무한체 내에 고립된 산란체의 경계면을 분할하여 경계면의 경계조건과 입사파동의 음장으로부터 산란체 표면의 산란음장을 얻게되며, 후자의 경우에는 산란체 표면뿐만 아니라 매질의 외부경계면을 모두 고려하여 전체 모델링 영역이 해석하려는 유한체의 내부영역으로 정의된다.

본 논문에서는 유한 고체내의 탄성파동에 대한 경계치 문제로부터 유도초음파의 전파를 모델링하기 위한 수치적 기법을 소개하며 나아가 이를 내부영역 경계요소법과 결합하여 유도초음파 산란문제의 모델링까지 가능한 혼합형 경계요소법(hybrid BEM)[7,9]을 제시하고자 한다. 특히 기존 파동산란 문제의 수치 연구를 살펴볼 때 무한체 내의 산란문제에 경계요소법이 적용된 사례는 많이 보고된 바 있으나[1,2,16-20], 유도초음파의 산란과 같이 산란체와 외부경계면 모두로부터의 산란장을 고려해야 하는 것과 같은 수치해석의 어려움을 포함하는 유한 고체내의 탄성과 산란 모델링에 대한 적용 예는 Cho 등의 연구[7,9]를 제외하고는 그 사례를 찾기 어려운 것으로 사료된다. 유도초음파의 전파

및 산란에 관한 수치모델은 시간조화(time harmonic) 파동의 입사하에 있는 2차원 등방성 재료를 가정하며 산란문제의 모델링은 균질재료의 경우로 가정한다. 시간조화 입사파동에 의한 주파수 영역의 신호로부터 시간영역 산란신호를 얻기 위해서 역 푸리에(Fourier)변환이 사용되었으며, 논문의 후반부에는 현재 개발중인 3차원 초음파 모델 해석용 경계요소법 프로그램에 의한, 유한 직경을 갖는 봉재내 파동전파의 수치해를 제시함으로써 향후 보다 실질적인 초음파 신호의 모델링 가능성을 검토해 보고자 한다.

2. 유한고체내 탄성파동 전파에 관한 수치해석

2.1. 판파의 위상속도 분산선도와 군속도 분산선도

2.1.1. 단일 판재

Fig. 1 과 같은 단일 판재에서의 파동의 지배방정식은 Navier의 변위 운동 방정식으로 주어진다[7].

$$\mu \nabla^2 \bar{U} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{U}) + \rho \bar{f} = \rho \bar{U} \quad (1)$$

여기서 체적력 $\bar{f} = 0$ 으로 하고 $\bar{U}(x_1, x_2, x_3, t)$ 는 좌표의 항과 시간의 항으로 분리한 다음 좌표항에 대하여 Helmholtz decomposition을 적용하여 파동방정식을 푼 뒤 변위 변형을 관계식과 Hooke의 법칙을 통해 각 층에서의 변위 및 응력을 결정하면 다음과 같다[7].

$$u_1 = [ik \cos(px_2)A_1 + ik \sin(px_2)A_2 - q \sin(qx_2)A_3 + qc \cos(qx_2)A_4]e^{ikx_1} \quad (2)$$

$$u_2 = [-p \sin(px_2)A_1 + p \cos(px_2)A_2 - ik \cos(qx_2)A_3 - ik \sin(qx_2)A_4]e^{ikx_1} \quad (3)$$

$$\sigma_{11} = \left\{ [-\lambda(k^2 + p^2) - 2\mu k^2] \cos(px_2)A_1 + [-\lambda(k^2 + p^2) - 2\mu k^2] \sin(px_2)A_2 - 2\mu ikq \sin(qx_2)A_3 + 2\mu ikq \cos(qx_2)A_4 \right\} e^{ikx_1}$$

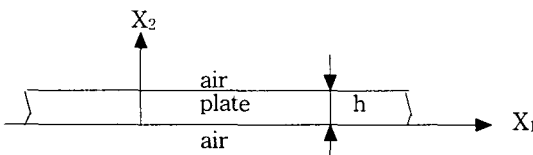


Fig. 1 A single plate

$$(qx_2)A_4 \left. \right\} e^{ikx_1} \quad (4)$$

$$\sigma_{22} = \left\{ [-\lambda(k^2 + k^2) - 2\mu k^2] \cos(px_2)A_1 + [-\lambda(k^2 + p^2) - 2\mu p^2] \sin(px_2)A_2 - 2\mu ikq \sin(qx_2)A_3 + 2\mu ikq \cos(qx_2)A_4 \right\} e^{ikx_1} \quad (5)$$

$$\sigma_{12} = \left\{ -2\mu ikp \sin(px_2)A_1 + 2\mu ikp \cos(px_2)A_2 + \mu(k^2 - q^2) \cos(qx_2)A_3 + \mu(k^2 - q^2) \sin(qx_2)A_4 \right\} e^{ikx_1} \quad (6)$$

여기에서

$$p^2 \equiv k_L^2 - k^2 \equiv \left(\frac{\omega}{c_L} \right)^2 - k^2 \quad (7)$$

$$q^2 \equiv k_T^2 - k^2 \equiv \left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 - k^2$$

이들은 판재내에서 모드전환에 의해 발생하는 종파와 횡파의 X_2 방향 파수(wave number)성분을 나타낸다. 식 (5)와 식 (6)을 이용하여 판의 표면에 식 (8)의 자유 표면 경계조건을 대입하여 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{12} = 0, \sigma_{22} = 0 \text{ at } x_2 = 0, x_2 = h \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서 $A_{11} - A_{44}$ 는 식 (5), (6)에 식 (8)의 경계조건을 대입하여 결정할 계수들이다. 파동방정식의 해가 의미 있는(non-trivial) 해가 되는 조건으로부터 $|A| = 0$ 이 되는 ω 와 k 를 bi-section 방법으로 찾은 후 $v = \omega/k$ 의 관계에 의하여 판파의 위상속도를 결정하면 Fig. 2와 같이 가진 주파수에 따라 유한 고체내에서 생성되는 유

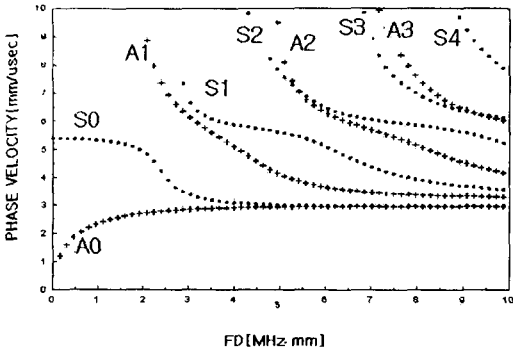


Fig. 2 Phase velocity dispersion curve of a steel plate

도초음파의 위상속도 분산곡선(dispersion curves)을 얻게된다.

2.1.2. 적층판재

Fig. 3과 같이 N 개의 층으로 되어있는 판재에서의 위상속도를 구하기 위해서는 각 층에 해당하는 응력과 변위의 식을 구한 후 적층판재의 외부 표면에서의 자유 표면 경계조건과 각 층의 경계면에서의 변위 및 응력의 연속조건을 적용한다[15].

판재내의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12,1} &= 0, & \sigma_{22,1} &= 0 & \text{at } x_2 &= 0 \\
 \sigma_{12,1} &= \sigma_{12,2}, & \sigma_{22,1} &= \sigma_{22,2} & \text{at } x_2 &= H_1 \\
 u_{1,1} &= u_{1,2}, & u_{2,1} &= u_{2,2} & & \\
 & \vdots & & & & \\
 \sigma_{12,N} &= 0, & \sigma_{22,N} &= 0 & \text{at } x_2 &= H_N
 \end{aligned} \tag{10}$$

그러나 N 개의 층으로 이루어진 경우에는 식 (9)로 나타내어지는 A 행렬의 크기가 $4N \times 4N$ 이 되어서 행렬식을 계산하기가 어려워지므로, 다음과 같은 전달 행렬의 방법을 이용한다. Fig. 3에서 각 층에서는 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}_{n,top} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,top} \tag{11}$$

식 (11)에서 n 은 n 번째 층을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}_{n,bottom} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,bottom} \tag{12}$$

식 (11)과 (12)로부터

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,bottom} &= \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{n,bottom} \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{n,top}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,top} \\
 &= \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,top} \tag{13}
 \end{aligned}$$

각 층의 경계에서는 변위와 응력이 연속이므로

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,top} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n+1,bottom} \tag{14}$$

N 개의 층일 경우에는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{n,bottom} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}_{N,top} \tag{15}$$

여기에서

$$\begin{bmatrix} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_2 \dots \dots \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_N \text{ 이다.}$$

Fig. 3의 적층판재와 같이 자유표면 조건이 판재의 외부표면에 주어진다면 식 (15)에서 $\sigma_{12(1,bottom)} = 0$, $\sigma_{22(1,bottom)} = 0$, $\sigma_{12(N,top)} = 0$, $\sigma_{22(N,top)} = 0$ 이 되고 이것을 다시 정리하면 다음과 같다. 즉 $4N \times 4N$ 의 행렬이 2×2 행렬로 된다.

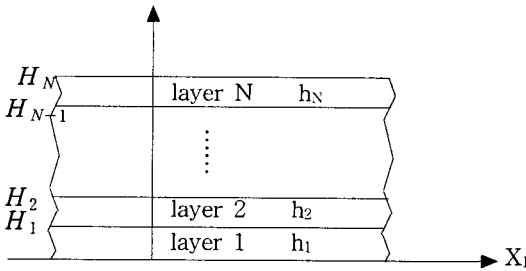


Fig. 3 A multi-layered plate

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{1, \text{bottom}} = \begin{bmatrix} S_{31} & S_{32} \\ S_{41} & S_{42} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{n, \text{top}} \dots (16)$$

식 (16)에서 $S_{31} \times S_{42} - S_{32} \times S_{41} = 0$ 가 되는 ω 와 k 를 구하면 적층판재에서의 위상속도를 결정할 수 있다.

Fig. 4는 전달행렬 방법으로 구한 0.3mm의 두 강판 사이에 0.4mm의 마그네슘판이 접합되어 있는 3층 적층판재의 위상속도 분산선도이다. 여기서 각 층의 재료상수는 Table 1에 나타내었다.

군속도는 판재안에서 유한한 주파수 영역 내의 파동이 합성된 실제파형의 envelope가 진행되는 속도로 판파의 위상속도 분산선도를 수치미분하여 구하게 되며 그 관계식은 기존 문헌에 자세히 언급된다[3, 7, 8]. Fig. 5는 Fig. 4의 3층 적층판재의 군속도 분산선도이다.

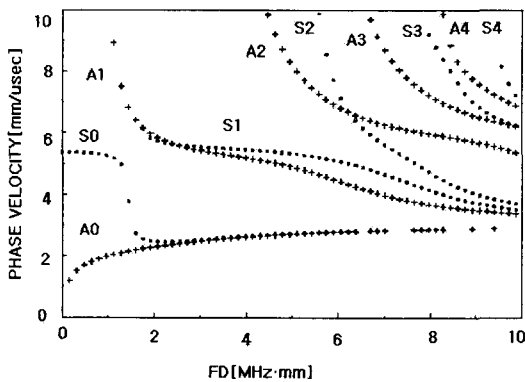


Fig. 4 Phase velocity dispersion curve of a steel-magnesium-steel plate

Table 1 Material properties

| | C_L (mm/ μ sec) | C_T (mm/ μ sec) | σ (g/cm ³) |
|-----------|-----------------------|-----------------------|-------------------------------|
| steel | 5.94 | 3.2 | 7.8 |
| magnesium | 5.8 | 3.1 | 1.72 |

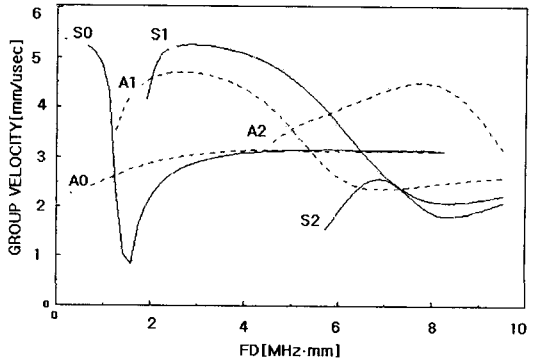


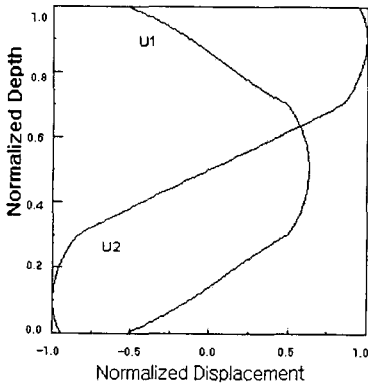
Fig. 5 Group velocity of a steel-magnesium-steel plate

2.2. 파형구조 선도

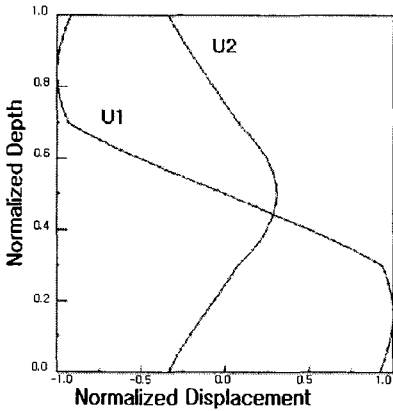
파형구조(wave structures)는 유한고체내에 입사된 임의 유도초음파 모드가 매질내 두께 방향으로 만들어 내는 변위, 응력 에너지의 분포를 일컬으며 이에 대한 수치해는 특정 유도초음파 모드의 전파 현상을 모델링 하는데 활용된다.

단일 판재의 경우 식 (9)에서 ω 와 k 를 구하면 파동의 진폭비 $A_2/A_1, A_3/A_1, A_4/A_1$ 을 구할 수 있고 이것을 이용하여 각 모드의 판재내 파형선도인 $u_1/A_1, u_2/A_1, \sigma_{11}/A_1, \sigma_{12}/A_1, \sigma_{22}/A_1$ 를 계산해 낼 수 있다. 이는 그 모드의 판파가 판재내로 진행할 때 두께방향의 입자들이 가진되는(excitation)형태를 나타내며 모드의 전파 특성을 결정짓게 된다.

적층판재의 경우에는 $4N \times 4N$ 의 행렬방정식을 구성한 후 $A_2/A_1, A_3/A_1, \dots, A_{4N}/A_1$ 을 구하여 각층에서 $u_{1,n}/A_1, u_{2,n}/A_1, \sigma_{11,n}/A_1, \sigma_{12,n}/A_1, \sigma_{22,n}/A_1$ 을 구할 수 있다. Fig. 6은 강-마그네슘-강(steel-magnesium-steel)판에서 두께내의 최대 진폭값에 대해 정규화(normalization)된 변위의 파형구조를 나타낸다.



(a)



(b)

Fig. 6 Normalized displacement of a steel-magnesium-steel plate

2.3. 감쇠계수

Fig. 7과 같이 적층판재의 양쪽 표면이 유체와 접촉하고 있는 경우에는 적층 판재내에 생성된 판파는 적층 판재 내를 진행하면서 감쇠가 일어나게 된다(3,8,14,15,18). 이러한 현상을 해석하기 위해서는 파수 k 를 복소수로 놓고 앞에서 설명한 방법으로 경계치 문제를 풀게되며, 이때 k 의 실수부는 판파의 전파특성을 허수부는 특성을 나타낸다. 이 문제에서 적용되는 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{12,1b} = 0, \quad \sigma_{22,1b} = \sigma_{22,wb} \quad x_2 = 0$$

$$u_{2,1b} = u_{2,wb}$$

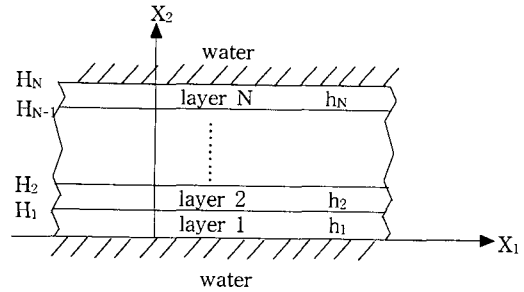


Fig. 7 A multi-layered plate under water

$$\sigma_{12,1t} = \sigma_{12,2b}, \quad \sigma_{22,1t} = \sigma_{22,2b} \quad x_2 = H_1$$

$$u_{1,1t} = u_{1,2b}, \quad u_{2,1t} = u_{2,2b}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{12,Nt} = 0, \quad \sigma_{22,Nt} = \sigma_{22,wt} \quad x_2 = H_N$$

$$u_{2,Nt} = u_{2,wt}$$

이때의 k 의 복소수근은 Muller의 복소함수 해석법을 사용하여 얻어졌다(3,8,15). Fig. 8은 0.3mm의 두 강판 사이에 0.4mm의 마그네슘판이 접합되어 있는 3층 적층판재가 물속에 잠겨있는 경우 A0, S0, A1, S1 모드의 감쇠계수를 나타낸다.

최근의 관련 연구결과에서, 외부 경계면이 반무한매 질과 접촉하고 있는 유한고체내에서 유도초음파가 전파될 경우, 파동의 감쇠는 파동의 전파방향 탄성에너지를 기준으로 정규화된 접촉계면상의 두께방향 변위값과 밀접한 상관관계를 갖고 있음이 밝혀졌다(3, 8, 15). 이

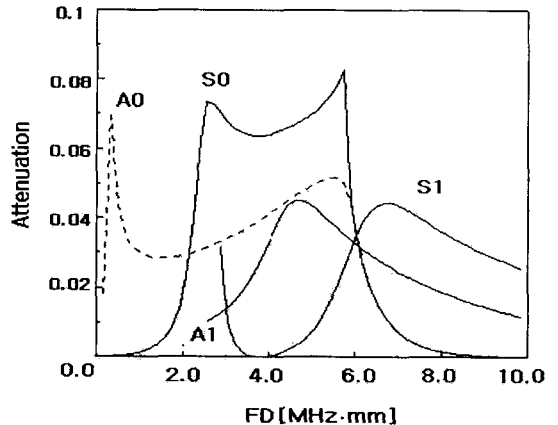


Fig. 8 Attenuation in a steel plate

는 유도초음파 전파에 관한 모델링이 얼마나 중요한 것인가를 나타내는 좋은 예라고 할 것이다.

3. 유한 고체내 탄성파동 산란에 관한 수치해석

3. 1. 탄성동역학 경계적분방정식

응력의 항으로 표현된 탄성동역학 문제의 지배방정식은 시간에 대한 조화함수로 표현되는 탄성동역학 문제에서 다음과 같이 나타낼 수 있다[7, 16, 17].

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = x_1, x_2, x_3) \quad \text{in } \mathcal{Q} \quad \dots\dots (17)$$

여기서 σ_{ij} 는 응력텐서이며, b_i 는 체적력, u_i 와 ρ 는 각각 변위와 밀도이다.

체적력을 무시할 경우, 가중잔여치법을 이용하면 식 (17)로 부터 혼합형 경계조건을 갖는 매끈한 폐경계면 S상에서의 변위는 다음의 탄성동역학 내부 경계적분방정식으로 표현될 수 있다[7, 16, 17].

$$\frac{1}{2} u_k = - \int_{\mathcal{S}} u_i t^{*ki} ds + \int_{\mathcal{S}_1} (u_i - \bar{u}_i) t^{*ki} ds_1 + \int_{\mathcal{S}_2} \bar{t}_i u^{*ki} ds - \int_{\mathcal{S}_2} (\bar{t}_i - t_i) u^{*ki} ds_2 \quad \dots\dots (18)$$

여기서 \bar{u}_i 와 \bar{t}_i 는 경계면 S_1, S_2 상의 변위 및 표면력 경계치이고, S_1, S_2 는 변위와 표면력이 주어진 경계면을 의미하며 이에 따라 전체 폐경계면 S는 $S = S_1 + S_2$ 로 나타내어 진다. u^{*ki} 와 t^{*ki} 는 다음으로 주어지는 2차원 탄성동역학 문제의 기본해(fundamental solution)이다[7, 16, 17]. 여기서 기본해라 함은, 무한체내의 임의 지점에서 임의 방향으로 단위세기의 외력을 디랙 델타(Dirac delta) 함수의 형태로 식 (17)에 적용하여 얻게된 Green 함수를 의미한다. 물리적으로는 이 같은 외력에 의해 발생된, 외력의 작용점에서 거리 r 만큼 떨어져 있는 지점에서의 임의 방향으로의 탄성동역학 변위 또는 표면력을 나타낸다.

$$u^{*ki} = \frac{i}{4G} [\hat{U}_1 \delta_{ki} - \hat{U}_2 r_{,k} r_{,i}] \quad \dots\dots (19)$$

$$t^{*ki} = \frac{i}{4} \left[\left\{ (\delta_{ki} \frac{\partial \gamma}{\partial n} + n_{k,r_{,i}}) + \frac{\lambda}{G} n_{i,r_{,k}} \right\} \frac{d\hat{U}_1}{dr} \right.$$

$$\left. - \left\{ (\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} + n_{k,r_{,i}}) + 2(n_{i,r_{,k}} - 2r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n}) + \frac{\lambda}{G} n_{i,r_{,k}} \right\} \frac{\hat{U}_2}{r} - \left\{ 2r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{G} n_{i,r_{,k}} \right\} \frac{d\hat{U}_2}{dr} \right] \quad \dots\dots (20)$$

식 (19), (20)에서 동탄성 문제의 기본벡터 \hat{U}_1 과 \hat{U}_2 를 종파수 $k_L = \frac{\omega}{c_L}$ 과 횡파수 $k_T = \frac{\omega}{c_T}$ 의 Hankel 함수로 표현하면 다음과 같다[7, 16, 17].

$$\hat{U}_1 = H_0^{(1)}(k_T r) - \frac{1}{k_T r} H_1^{(1)}(k_T r) + \left(\frac{k_L}{k_T}\right)^2 \frac{1}{k_L r} H_1^{(1)}(k_L r) \quad \dots\dots (21)$$

$$\hat{U}_2 = -H_2^{(1)}(k_T r) + \left(\frac{k_L}{k_T}\right)^2 H_2^{(1)}(k_L r) \quad \dots\dots (22)$$

식 (19)-(22)를 식 (18)에 대입하여 경계적분방정식을 수치적으로 풀면, 조화함수로 주어지는 동적하중에 의한 경계면 S상에서의 탄성동역학 변위, 표면력 및 영역 \mathcal{Q} 에서의 응력장을 얻을 수 있다. 또한 이를 통해 주어진 입사 탄성파에 대한 구조물내의 결합에 의한 산란장을 계산할 수 있다.

3. 2. 유도초음파의 산란장 해석

앞절에서 언급된 경계적분방정식을 이용하여 개발된 탄성동역학 경계요소 프로그램은 SH, SV파 등의 입사에 따른 산란문제를 해석하여 기존의 이론해[21]와 비교함으로써 그 수치해의 정확도를 이미 검토한 바 있다[7]. 본 논문에서는 다중산란에 의한 모드전이로 인해 수치적 해석이 더욱 어려운 유한 고체내의 산란장 문제에까지 이를 확장하여 적용하여 보았다.

일반적인 탄성 종파나 횡파(elastic longitudinal wave or transverse wave)와 달리 유도초음파의 경우, 주파수 변화에 따라 자기 다른 진행속도를 갖는 다양한 파형모드가 발생된다(Fig. 4 참조). 차체와 같은 복잡한 형상의 기계구조물도, 국부적으로는 평판(plate)이나 원통형 실린더로서 해석될 수 있다. 구조물의 두께에 비해 상대적으로 긴 파장의 저 주파수(low frequency) 동적 하중이 가해지는 경우, 예를 들어 주파수 f 와 판구조물의 두께 d 사이의 곱인 fd 값

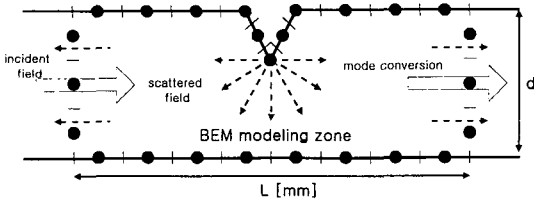


Fig. 9 Boundary mesh discretization for modeling of Lamb wave scattering

이 대략 6~7 MHzmm 보다 작은 경우, 실제 구조물 내의 동적거동은 유도초음파의 형태로 구조물의 기하학적 형상을 따라 전파하게 된다[3-12]. 유도초음파 산란장 해석을 위해서는 식 (2)-(6)과 식 (18)을 Fig. 9에 주어진 것과 같이 유한 고체의 단면에서 수치적으로 결합하여 경계적분방정식을 푸는 혼합형 경계요소법을 사용하여야 한다[7, 9]. 이를 위해 Fig. 9에 나타난 것과 같이 유도초음파가 진행하는 유한고체의 단면을 수치모델 영역으로 설정하여 상하면과 좌우단면으로 이루어진 폐경계면을 따라 경계요소를 분할한다. 상하면에는 자유표면적 경계조건을 적용하며, 좌우단면의 경계조건을 위해서는 문제에서 주어진 fd 값에서 발생가능한 모든 유도초음파 모드의 산란변위와 응력장을 식 (2)-(6)을 이용하여 결정한다. 이를 입사모드의 변위 및 응력장과 중첩하여 전체변위와 응력장으로 나타낸다. 이 과정에서 좌우 단면상에서 전체변위와 응력장 사이의 관계식이 단면의 경계절점 수의 두배 만큼 얻어지고 이를 이용하여 좌우 단면상의 변위와 표면력 미지수를 소거하여 풀게된다.

Fig. 10은 입사파가 단위진폭을 갖는다고 가정했을

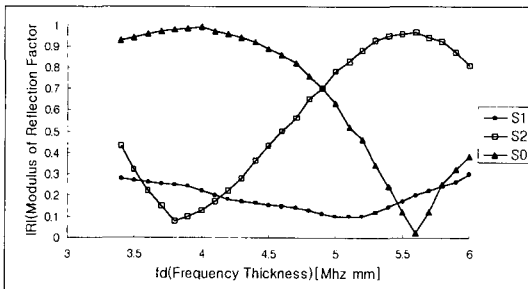


Fig. 10 Variation of edge reflection coefficients of Lamb wave with respect to fd change for S₂ incidence

때, 탄성동역학 경계요소법을 이용하여 평판의 한쪽 끝에서 반사되는 유도형 탄성파의 각 파형모드들의 진폭(amplitude)을 계산한 결과이다. 유도형 탄성파 산란의 경우, 모드전이(mode conversion)에 의한 복합산란장(multi scattered fields)이 형성됨을 알 수 있다[7].

4. 시간영역상의 탄성파동 모델링

4.1 역 푸리에 변환

물리계의 모든 신호들은 시간영역과 주파수영역으로 각각 표현될 수 있으며 시간영역의 신호 $h(t)$ 와 그에 상응하는 주파수영역의 신호 $H(f)$ 사이에는 다음과 같이 잘 알려진 푸리에 변환 관계식이 성립된다[17, 18].

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt \dots\dots\dots (23)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi i f t} df \dots\dots\dots (24)$$

이를 다시, 수치연산을 위한 유한개의 표본점들 (sampled points)에 대한 이산 푸리에변환 (discrete Fourier transform)으로 바꾸면,

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \dots\dots\dots (25)$$

$$h_n = \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{2\pi i k n / N} \dots\dots\dots (26)$$

으로 표현된다.

BEM을 이용해 계산된 원거리 산란장은 주파수영역에서의 값들이므로, 식 (26)의 역 이산푸리에변환에 FFT(Fast Fourier Transform) 알고리즘을 적용하여 이 값들을 시간영역으로 변환할 수 있다.

4.2. Lamb형 유도초음파의 시간영역 산란장 계산

혼합형 경계요소법을 적용하여 Lamb 파의 산란장을 해석한 결과에 대해 살펴본다. 중앙에 V자형 결함이 있는 판재의 단면을 기하학적 형상과 입사주파수를

고려하여 Fig. 9와 같이 약 1000개의 상수 경계요소로 분할하여 모델링하였다. 이때 결합부분 즉, 산란영역과 입사/수신영역 간에 거리($L/2$)를 충분히 확보해 줘야 하는 데, 이것은 정확도를 높이기 위해 불안정한 산란 영역을 벗어나 원거리 산란장을 계산하기 위함이며, 보통 해당 모드의 한 파장 이상에 해당하는 거리로 설정한다. 계산에 사용된 물성치는 알루미늄의 종파속도 = $6.3 \text{ mm}/\mu\text{sec}$ 와 횡파속도 = $3.1 \text{ mm}/\mu\text{sec}$ 그리고 밀도 = $2.6 \text{ g}/\text{cm}^3$ 이고 입사파의 중심주파수는 1 MHz이다.

입사된 모드는 결합부위에서 산란이 일어나고, 모드 전이 현상을 통해 분산선도상의 해당 fd 에서 생성 가능한 각 모드로 입사에너지가 나뉜다(Figs. 11, 12 참조). 수치계산의 입력값이 되는 각 모드의 위상속도는 분산선도상에서 구할 수 있으며 이번 연구에서 적용된 입사파의 주파수성분은 실제 1 MHz 탐촉자들의 일반적인 특성에 가깝도록 0.38~1.62 MHz까지 0.04 MHz간격으로 총 32개의 주파수성분으로 표현되었으며 중심주파수가 1 MHz인 Gaussian분포를 띄고 있다. 이 조건에서 가능한 fd 값들은 판재 두께가 1 mm로 설정될 때 0.38~1.62MHz mm이고 이 fd 값에서는 A0와 S0모드가 존재하는 것으로 분산선도에서 확인되었다.

주파수영역에서 계산된 산란장 값을 IFT처리하여 시간영역의 파형으로 변환하였다. Figs. 11, 12의 결과 파형들은 모델의 좌측으로부터 입사된 S0 모드가 결합에서 산란되어 모드전이를 거친 뒤 결합의 우측으로 전달되는 모드들의 파형을 계산한 것이다. 실제 초음파검사에서 종파형 탐촉자를 이용해 시험체의 표면에서 측정할 때 수직방향의 변위가 많은 영향을 미치므로 IFT 처리시에 결합부 오른쪽 상단 표면에서 결합으로부터 점차 멀어지는 네 지점에서의 수직방향변위(U_y)만을 나타내었다. 결합부에서 5mm떨어진 지점에서는 S0모드와 전이된 A0모드가 중첩되어 있지만 산란지점으로부터 멀어질 수록 두 모드의 군속도 차이에 의해 점차 분리되기 시작하다가 20mm지점에서는 확연히 두 모드가 분리되는 것을 볼 수 있다. 그리고 거리가 멀어짐에 따라 신호의 진폭이 점차 줄어드는 것을 확인할 수 있는데, 이것은 분산파 모드분리에 의해 에너지가 나뉘기 때문이며 모델링에서 재료감쇠는 포함되어있지 않으므로 재료감쇠에 의한 것이라고 볼 수 없다. 20 mm떨어진 지점에서 두 모드의 시간차는 $2.54 \mu\text{sec}$ 이며 군속도분산선도에서 계산된 두 모드의 군속도(A0:

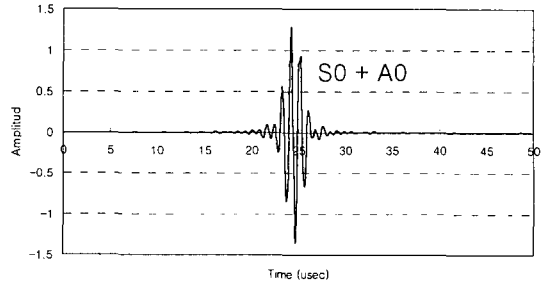


Fig. 11 IFT result at location 5 mm away from V-notch

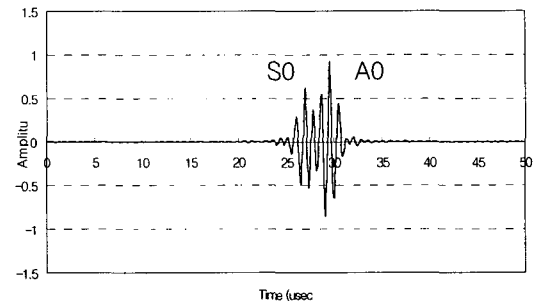


Fig. 12 IFT results at location 20 mm away from V-notch

$3.12 \text{ mm}/\mu\text{sec}$, S0: $5.10 \text{ mm}/\mu\text{sec}$)로 계산된 시간차 $2.49 \mu\text{sec}$ 와 약 2.2%의 오차범위 안에서 잘 일치한다. 이 결과를 통해 결합형태에 따른 유도초음파의 산란신호를 곧바로 예측함으로써 정량적 비파괴평가법의 개발 가능성이 확인되었다고 볼 수 있다.

5. 3차원 유한고체 내의 탄성파동전파에 관한 경계요소 모델링

유한 고체구조물이나 내부 산란체의 형상이 탄성파가 입사되는 평면의 수직방향으로 일정하다는 탄성동역학적 평면변형률조건을 만족할 수 없는 경우, 탄성파산란 문제는 입사파의 빔 확산(*beam spreading*)의 영향을 포함하여 3차원영역에서 해석되어야만 한다. 유한 크기의 탐촉자를 사용하는 탐상조건과 구조물내 실제 결합의 형상을 고려할 때 이는 비파괴평가의 보다 실제적인 모델링을 위해 필수적이다. 현재 국내외적으로 이 같은 3차원 탄성파산란해석용 프로그램은 상업적으로 개발되어 있지 않으며 국외에서도 매우 제한된 수의 연

구그룹이 이의 개발 및 활용에 관련된 연구를 수행하고 있는 실정이다[16,17]. 본 논문에서는 최근 국내에서 개발중인 3차원 경계요소법 탄성과 산란해석 프로그램의 검증모델을 소개하여 향후 보다 실제적인 탄성과 모델링 기법으로서의 가능성을 제시하고자 한다.

3차원 경계요소모델링을 위한 주파수영역의 기본해는 식 (27), (28)로 주어진다 [16,17].

$$\hat{U}_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu} (\hat{U}_1 \delta_{ij} - \hat{U}_2 r_{,i} r_{,j}) \dots\dots\dots (27)$$

$$\hat{T}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\left\{ \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + n_i r_{,j} \right) + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,i} \right\} \frac{\hat{U}_1}{dr} - \left\{ \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + n_i r_{,j} \right) + 2 \left(n_j r_{,i} - 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,i} \right\} \frac{\hat{U}_2}{r} - \left\{ 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\lambda}{\mu} n_j r_{,i} \right\} \frac{d\hat{U}_2}{dr} \right] \quad (28) \text{여기서}$$

$$\hat{U}_1 = \frac{e^{ik_r r}}{r} + \left\{ \frac{i}{k_L r} - \frac{1}{(k_T r)^2} \right\} \frac{e^{ik_r r}}{r} - \left(\frac{k_L}{k_T} \right)^2$$

$$\left\{ \frac{i}{k_L r} - \frac{1}{(k_L r)^2} \right\} \frac{e^{ik_r r}}{r}$$

$$\hat{U}_2 = \left\{ 1 + \frac{3i}{k_T r} - \frac{3}{(k_T r)^2} \right\} \frac{e^{ik_r r}}{r} - \left(\frac{k_L}{k_T} \right)^2$$

$$\left\{ 1 + \frac{3i}{k_L r} - \frac{3}{(k_L r)^2} \right\} \frac{e^{ik_r r}}{r}$$

식 (27), (28)을 2차원 기본해 대신 식 (18)의 경계적분방정식에 대입하고 경계면을 평면요소로 분할하면 3차원 탄성과산란문제의 경계요소 모델이 완성된다. 이 과정에서 특이적분(singular integration)을 포함한 세부 수치해석 과정은 2차원 모델링과 동일하며 2차원 모델에 비해 3차원 공간에서의 요소분할에 보다 많은 시간을 필요로 한다[16,17].

본 논문에서는 탄성동역학적 이론해가 잘 알려진 봉(bar)의 축방향 파동전파에 의한 변위를 3차원 내부영역 경계요소법(interior BEM)으로 해석하였으며, 모델링의 편의상 경계면의 분할에 사용된 사각형요소의 도심에 절점(node)을 배치한 상수경계요소(constant boundary element)를 사용하였다. 봉의 끝에서의 축방향 시간조화 가진에 의한 봉내부 축방향 변위의 해석하는 변수분리법에 의해 다음과 같이 얻어진다.

$$U(x) = \frac{t_x|_{x=l}}{E} \frac{C}{\omega} \frac{1}{\cos \frac{\omega}{C} l} \sin \frac{\omega}{C} x \dots\dots\dots (29)$$

여기서 $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E는 탄성계수, ρ는 밀도, l은 bar의 길이이며 $t_x|_{x=l}$ 은 봉의 끝단(x=l)에서의 외부가진을 나타내는 봉의 길이방향(x 방향) 표면력을 나타낸다.

경계요소 모델링에서 봉의 단면은 Fig. 13과 같이 원형과 사각형단면을 모두 고려하였으며, 좌측 단면의 경계요소에서는 축방향 변위를 구속하고 우측 단면의 경계요소에서는 시간조화함수로 주어지는 축방향 가진력의 진폭을 표면력경계조건으로 사용하였다. 길이에 비해 단면의 치수가 무시될 수 있는 경우에는 경계요소 모델링에 의한 변위값에 큰 차이가 없었다.

Fig. 14는 이론식의 결과와 3차원 경계요소모델링의

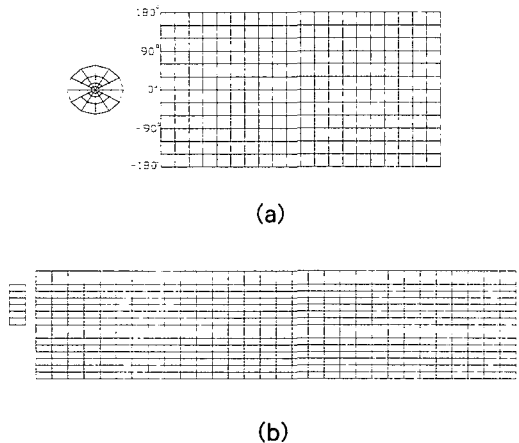


Fig. 13 3D BEM mesh for a bar with (a) circular cross section, and (b) rectangular cross section

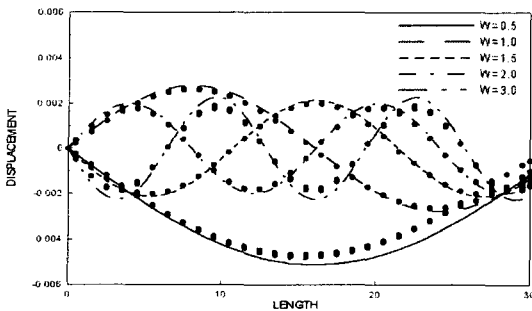


Fig. 14 Comparison of BEM results with the analytical solutions(17) for wave propagation in a bar subjected to a time harmonic longitudinal excitation

결과를 각주파수(angular frequency) ω 의 변화에 따라 비교한 것이며, 3차원 경계요소모델의 해가 해석해와 잘 일치함을 알 수 있다. 축방향으로 동일좌표에 해당되는 봉내부의 경계요소상에서는 동일한 변위값이 얻어졌고 이는 봉내부의 변위가 축방향좌표에만 의존한다는 이론식과도 같은 결과를 나타낸다. 변위값은 경계요소모델링과정에서 복소변위진폭(complex displacement amplitude)으로 계산되며 실수부와 허수부 모두를 해석해와 비교하였다. Fig. 14는 복소변위의 절대값을 비교한 결과이다.

향후 식 (18)로 주어진 3차원 경계요소 프로그램내의 적분방정식을 3차원 공간내의 입사파의 음장을 고려하여 외부영역 경계적분방정식으로 변환하고 경계요소모델의 요소분할 알고리즘을 개선할 경우, 보다 실제적인 탄성파동문제의 산란해석에 활용할 수 있는 프로그램이 될 것으로 기대된다. 나아가 이 프로그램은 기존의 해가 존재하지 않는 임의형상 단면의 3차원 유한 고체내의 유도형 탄성초음파의 전파 및 산란현상의 모델링기법으로도 폭 넓게 활용될 수 있을 것이다.

6. 결 론

본 논문에서는 유한 고체내의 다양한 탄성파동전파 및 산란문제에 적합한 경계요소 모델링기법을 소개하고 보다 실제적인 모델링기법으로서의 개선가능성을 제시해 보았다. 제시된 각종 경계요소 모델링기법은 정량적 비파괴평가법의 물리적 기반을 확보하기 위해 다양하게 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 탐촉자로부터 입사되

는 보(beam)에 대한 정확한 모델링이 병행된다면 초음파탐상시험의 물리적 현상에 대한 분석능력을 획기적으로 향상시키고 각종 형태의 결함에 대한 탐상결과신호를 예측, 제시함으로써 정량적인 비파괴평가를 가능케 하여 초음파비파괴평가의 효율성과 신뢰성을 확보할 수 있을 것으로 기대된다. 향후 이같은 국내 관련 분야의 공동연구가 활성화 되면 현장응용성이 높은 해석프로그램으로 발전되어 갈 것이다.

후 기

본 연구는 인제대학교 학술연구조성비 (97년도, 98년도)의 지원에 의해 수행되었으며 이에 감사를 표합니다. 아울러 본 연구의 적층판재내 유도초음파 전파모델링과 3차원 경계요소모델링부분의 공동연구를 통해 학술적 토의와 협력을 아끼지 않으신 연세대학교 이강용 교수님과 이종명씨께 감사를 드리는 바입니다.

참고문헌

- [1] J. D. Achenbach, "Mathematical Modeling for Quantitative Ultrasonics", *Nondestr. Test. Eval.*, Vol. 8, No. 9, pp. 363-377, (1992)
- [2] L. J. Bond, "Numerical Techniques and Their Use to Study Wave Propagation and Scattering", *Elastic Waves and Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, North-Holland, pp. 17-27, (1990)
- [3] J. L. Rose, Y. Cho, and J. J. Ditre, "Cylindrical Guided Wave Leakage Due to Liquid Loading", *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Vol. 13, pp. 259-266, (1994)
- [4] J. L. Rose, K. Rajana, and M. K. T. Hansch, "Ultrasonic Guided Waves for NDE of Adhesively Bonded structures", *J. Adhesion*, Vol. 50, pp. 71-82, (1995)
- [5] J. L. Rose, and J. Ditre, "Pulse-Echo and Through Transmission Lamb Wave Techniques for Adhesive Bond Inspection", *British Jr. NDT*, Vol. 34, No. 12, pp. 591-594, (1992)

- [6] Y. Cho, D. D. Hongerholt, J. L. Rose, "Lamb Wave Scattering Analysis for Reflector Characterization", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 44, No. 1, pp. 44-52, (1997)
- [7] Y. Cho, and J. L. Rose, "A Boundary Element Solution for a Mode Conversion Study on the Edge Reflection of Lamb Waves", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 99, No. 4, pp. 2097-2109, (1996)
- [8] Y. Cho, and J. L. Rose, "Guided waves in a water Loaded Hollow Cylinder", *Nondestr. Test. Eval.*, Vol. 12, pp. 323-339, (1996)
- [9] Y. Cho, and J. L. Rose, "An Elastodynamic Hybrid Boundary Element Study for Elastic Guided Wave Interactions With a Surface Breaking Defect", *Int. J. Solids and Structures*, to appear, (2000)
- [10] Y. Cho, "Estimation of Ultrasonic Guided Wave Mode Conversion in a Plate with Thickness Variation", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, to appear, (2000)
- [11] W. Zhuang, A. H. Shah and S. K. Datta, "Axisymmetric Guided Wave Scattering by Cracks in Welded Steel Pipes", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 119, pp. 401-406, (1997)
- [12] A. K. Mal, P. Xu, and Y. Bar-Cohen, "Leaky Lamb Waves for the Ultrasonic Nondestructive Evaluation of Adhesive Bonds", *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 112, pp. 255-259, (1990)
- [13] D. C. Gazis, "Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders: 1. Analytical Foundation", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 31, No. 5, pp. 568-578, (1959)
- [14] P. B. Nagy, "Longitudinal Guided Wave Propagation in a Transversely Isotropic Rod Immersed in Fluid", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 98, No. 1, pp. 454-457, (1995)
- [15] 이종명, 이강용, 조윤호 "다층구조물내 탄성 유도 초음파의 전파에 관한 연구", *한국 비파괴검사학회 춘계학술대회 논문집*, pp. 99-109, (1999)
- [16] F. J. Rizzo, D. J. Shippy, and M. Rezayat, "A Boundary Integral Equation Method for Radiation and Scattering of Elastic Waves in Three Dimensions", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 21, pp. 115-129, (1985)
- [17] S. Kobayashi, "Elastodynamics", in *Boundary Element Methods in Mechanics*, C. A. Brebbia, ed., North-Holland, New York, Chapter 4, pp. 192-255, (1987)
- [18] L. Wang, J. Deng, and J. Shen, "A Time-domain Boundary Element Model for Ultrasonic Pulse Echo", *Ultrasonics*, Vol. 35, pp. 125-130, (1997)
- [19] 조윤호, "탄성과 산란장 해석을 위한 동탄성 경계 요소법 연구", *한국자동차공학회 차체, 차량동력학 부문 학술논문집*, pp. 21-26, (1996)
- [20] 이준현, 이서일, 조윤호, "재료내 다중결합에 의한 SH형 초음파 산란장의 수치해석", *비파괴검사학회지*, Vol. 18, No. 4, pp. 304-312, (1998)
- [21] C. C. Mow, and L. J. Mente, "Dynamic Stresses and Displacements Around Cylindrical Discontinuities Due to Plane Harmonic Shear Waves", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 598-604, (1963)