

## 웨이블릿기저를 이용한 영상처리방법에 관하여

### On Wavelet Method for Image Processing: Compression, Noise Removal, and Reconstruction

이남용\*  
 Nam-Yong Lee\*

#### 1. 서론

최근에 웨이블릿기저(Wavelet Basis)를 이용한 여러 영상처리방법들이 제시되고 있다. 그 예로, 웨이블릿계수 양자화를 통한 영상압축, 웨이블릿 축소기법을 이용한 정규 잡음제거, 웨이블릿-배규렛분해(WVD: Wavelet-Vaguelette Decomposition)를 이용한 영상재구성 등을 들 수 있다. 많은 경우에 앞에서 언급한 웨이블릿 기반 영상처리방법들은 보다 전통적으로 영상처리에 널리 사용되고 있는 기존의 푸리에(Fourier) 기반 방법들, 즉, 이산 코사인계수 양자화를 통한 영상압축, 잡음제거를 위한 필터링 방법, 의료영상재구성에 널리 사용되고 있는 FBP(Filtered Backprojection)방법 등에 비해 좋은 결과를 보여주고 있다.

웨이블릿기저는 주어진 영상을 푸리에기저에 비해 효율적으로 표현할 수 있다. 또한, 웨이블릿기저를 이용한 실용적인 영상처리 방법은 필연적으로 빠른 웨이블릿계수 계산을 필요로 하는데, 이는 같은 상황에서 푸리에계수를 구하는데 필요한 연산에 비해 월등히 빠르다. 또한 웨이블릿기저의 특징으로 영상의 평탄성(smoothness) 분석을 들 수 있다. 이를 이용하여 그 영상을 대상으로 하는 여러 처리의 결과를 미리 예측할 수 있는 장점이 있다.

이 글의 목적은 영상처리분야에서의 웨이블릿기저의 응용방법을 소개하는데 있다. 이 글의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 웨이블릿기저의 특징에 대해서 간략히 소개하였다. 3장에서는 웨이블릿 기반 영상처리방법의 예로 영상압축, 정규잡음제거, WVD를 이용한 영상재구성방법들을 설명하였다. 끝으로, 4장은 맺음말로 이루어졌다.

#### 2. 웨이블릿기저의 특징

영상처리에 사용되는 웨이블릿기저는 각 기저요소들이 두 개의 일차원 함수  $\phi$  와  $\psi$  의 텐서곱(Tensor Product)의 평행이동과 수축 및 팽창에 의해 구할 수 있다[2]. 구체적으로, 4개의 이차원 함수들

$$\phi^{(0)}(x, y) = \phi(x)\phi(y), \quad \psi^{(1)}(x, y) = \phi(x)\psi(y),$$

$$\psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\phi(y), \quad \psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

에 대해 그것의 평행이동과 수축 및 팽창에 해당하는

$$\psi_{k,j}^{(i)}(x, y) = 2^k \psi^{(i)}(2^k x - j_x, 2^k y - j_y), \quad j = (j_x, j_y)$$

의 모임들이 영상집합에 대하여 직교기저를 이루는 경우에 이를 직교 웨이블릿기저라고 한다. 즉, 모든 영상  $f$  에 대해

$$f = \sum_{k,j,i} c_{k,j,i} \psi_{k,j}^{(i)}, \quad c_{k,j,i} = \langle f, \psi_{k,j}^{(i)} \rangle,$$

와 같은 표현이 가능하다. 여기서  $c_{k,j,i} = \langle f, \psi_{k,j}^{(i)} \rangle$  를 영상  $f$  의 웨이블릿계수라고 한다. 지금부터는

$$\lambda = (k, j, i)$$

로 웨이블릿기저에 사용하는 첨자의 모임을 간단히 표현하자.

웨이블릿기저는 푸리에기저에 비해 여러 장점을 가지고 있다. 푸리에계수의 계산에 사용하는 FFT(Fast Fourier

Transform) 알고리즘은  $N \times N$  크기의 영상에 대해  $O(N^2 \log_2 N)$  연산이 필요한 반면, 웨이블릿계수는 소위 FWT(Fast Wavelet Transform)를 사용하여  $O(N^2)$  연산에 의해 구할 수 있다. 이러한 계산속도의 향상은 빠른 실시간 처리를 필요로 하는 응용분야에서 웨이블릿기저가 유용하게 사용되어질 근거를 제시한다.

한편, 주어진 영상  $f$ 에 대한 웨이블릿계수  $\langle f, \psi_\lambda \rangle$ 는 그 정의에 의해  $f$ 의  $2^{-k}$ 근방에서의 공간정보를 제공한다. 또한  $\langle f, \psi_\lambda \rangle$ 는 큰  $k$ 에 대해  $f$ 의 고주파정보, 그리고 작은  $k$ 에 대해 저주파정보를 제공한다. 이와 같이 웨이블릿기저는 공간과 주파수 영역에서의 정보를 균형적으로 국소화 시키는 장점을 갖고 있다.

주어진 영상의 평탄성을 그 영상의 웨이블릿계수를 분석함으로써 정확히 추정할 수 있다는 것은 웨이블릿기저를 이용하는 것의 큰 장점이다[3]. 영상의 평탄성(smoothness)은 영상이 얼마나 부드럽게 변하는가를 나타내는 것인데, 그 영상을 대상으로 하는 여러 처리의 결과를 미리 예측하는데 중요한 정보를 제공한다. 푸리에기저를 이용한 영상의 평탄성분석은 그 결과가 제한적이다.

### 3. 웨이블릿기저의 영상처리에서의 응용

#### 3.1. 영상압축

현재 멀티미디어 응용에서는 영상데이터의 효과적인 압축이 필수적이다. 현재의 압축기법은 높은 압축비율을 얻기 위하여 약간의 원영상과 압축된 영상간의 차이를 허용하는 방법이 주종을 이루고 있다. 일반적인 압축과정은 주어진 영상을 어떤 기저에 대해 표현하고 그 중에서 인간의 시각체계가 감지하기 힘든 구성요소를 압축을 위한 목적으로 제거하고 남겨진 부분만의 정보를 저장한다. 이렇게 압축된 정보를 이용하여 영상을 복원하면, 복원된 영상은 원영상에 비해 적은 정보량을 갖고, 원영상과의 차이는 거의 식별하기 불가능하게 된다.

웨이블릿기저를 이용한 영상압축은 먼저 주어진 영상  $f$ 에 대해 웨이블릿기저  $\psi_\lambda$ 에 대해 표현하여

$$f = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \psi_{\lambda}$$

를 얻는다. 여기서 웨이블릿계수  $c_{\lambda}$ 를 미리 정해진  $2\epsilon > 0$ 을 양자화단위로 하여

$$\hat{f} = \sum_{\lambda} 2\epsilon \text{round}\left(\frac{c_{\lambda}}{2\epsilon}\right) \psi_{\lambda}$$

와 같이 영상압축을 한다. 여기서 대부분의 원래 웨이블릿계수  $c_{\lambda}$ 가  $|c_{\lambda}| < \epsilon$ 이므로 대부분의 양자화된 웨이블릿계수  $2\epsilon \text{round}\left(\frac{c_{\lambda}}{2\epsilon}\right)$ 은 0이 되기 때문에 압축효과를 얻을 수 있다.

정지 영상에 대한 압축표준화작업은 현재 국제표준화기관(ISO: International Standards Organization) 산하의 JPEG(Joint Photographic Experts Group)에서 진행하고 있는데, 지금까지는 이산 코사인(Discrete Cosine)기저를  $8 \times 8$ 크기의 구역단위에 적용하는 방법을 사용해 왔다. 그러나, 이산 코사인기저를 구역단위로 적용하는 압축기법으로는 높은 압축비율을 얻을 수 없고, 구역단위로 적용하는데 따른 각 구역간의 불연속성은 심각한 영상의 질적 저하를 갖고 온다. 이러한 문제는 웨이블릿기저를 이용한 압축영상에는 나타나지 않는다.

다음의 그림들은 이산코사인기저와 웨이블릿기저가 얼마나 영상의 에너지를 집중시키는가를 비교하기 위해 제시하였다. 그림 1-1은 8 비트  $512 \times 512$  크기의 원영상으로 256 킬로바이트의 정보량을 가지고 있다. 그림 1-2는 이산 코사인기저를 이용해서 원영상을 1:64로 압축한 것이다. 그림 1-3은 웨이블릿기저를 이용해서 원영상을 1:64로 압축한 결과이다. 그림 1-2와 그림 1-3의 비교를 통해 웨이블릿기저의 에너지 집중효과가 이산 코사인기저의 에너지 집중효과에 비해 탁월함을 알 수 있다.

#### 3.2. 영상에서의 정규잡음제거

영상에서의 정규잡음제거문제는 잡음에 오염된 영상

$$y = f + z$$

에서 원영상  $f$ 를 복원하는 것이다. 여기서  $z$ 는 정규잡음을 의미한다. 푸리에기저  $\{e_n\}$ 를 이용한 정규잡음제거의 핵심 이론은 잡음  $z$ 의 에너지가 모든 주파수  $n$ 에 대해 골고루 퍼지는 반면, 원영상  $f$ 의 에너지는 낮은 주파수  $n$ 에 집중된다는 것이다. 이러한 이론을 바탕으로 푸리에기저를 이용한 정규잡음제거의 방법은 먼저 잡음에 오염된 영상  $y$ 를 푸리에기저  $\{e_n\}$ 에 대해

$$y = \sum_n \langle y, e_n \rangle e_n$$



Fig. 1-1 원영상



Fig. 1-2 DCT를 이용하여 원영상을 1:64 비율로 압축한 결과



Fig. 1-3 웨이블릿 변환을 이용하여 원영상을 1:64 비율로 압축한 결과

을 얻는다. 여기서,

$$\langle y, e_n \rangle = \langle f, e_n \rangle + \langle z, e_n \rangle$$

이다. 그리고 영상의 에너지는 낮은 주파수  $n$ 에, 잡음의 에너지는 모든 주파수  $n$ 에 골고루 퍼진다는 사실을 기초로 하여 적당한 가중치  $w_n$ 을 곱한다. 여기서 가중치

( $w_n$ )은  $0 \leq w_n \leq 1$ 을 만족하며, 높은 주파수에 대해서는 0에 가깝게, 낮은 주파수에 대해서는 1에 가깝게 정한다. 그러므로 푸리에기저를 기반으로 한 정규잡음제거 영상은

$$\tilde{f} = \sum_n w_n \langle y, e_n \rangle e_n$$

의 형태를 갖는다. 이를 공간영역에서 다시 표현하면 어떤 잡음제거필터  $g$ 에 의해

$$\tilde{f} = g * y$$

로 표현됨을 알 수 있다.

지금까지 설명한 푸리에기반 잡음제거방법의 문제점은 가중치 자체를 미리 정해야 한다는데 있다. 즉,  $\langle y, e_n \rangle$ 의 값에는 상관없이 낮은 주파수  $n$ 에 대해서는 1에 가까운  $w_n$ 을 가중치로 취함으로써 이를 정보로 인정하고, 높은 주파수  $n$ 에 대해서는 0에 가까운  $w_n$ 을 가중치로 취함으로써 이를 잡음으로 여기는 방법이다. 이러한 잡음제거 방법은 영상에 있어서 강한 경계부분과 좁은 지역에 존재하는 작은 점들을 분석하는데 많은 문제가 있다. 왜냐하면 그러한 급격히 변화하는 영상의 정보는 높은 주파수 대역에 많이 퍼져 있기 때문이다.

웨이블릿기저를 이용한 잡음제거는 잡음은 각 웨이블릿계수로 골고루 퍼진다는 사실과 추정하고자 하는 정보는 적은 수의 웨이블릿계수로 집중된다는 사실에 기인한다. 이를 토대로 Donoho와 Johnstone은 소위 웨이블릿 축소(Wavelet Shrinkage)를 잡음제거의 한 방법으로 제안하였는데, 이는 잡음에 오염된 영상  $y$ 를 웨이블릿기저  $\{\psi_\lambda\}$ 에 대해서 표현하고, 즉,

$$y = \sum_\lambda \langle y, \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda, \quad \langle y, \psi_\lambda \rangle = \langle f, \psi_\lambda \rangle + \langle z, \psi_\lambda \rangle$$

을 얻은 후, 각각의  $\langle y, \psi_\lambda \rangle$ 를 정해진 계수를  $\mu > 0$ 에 따라 다음과 같이

$$S_\mu(x) = \begin{cases} x - \mu, & x > \mu, \\ 0, & |x| < \mu, \\ x + \mu, & x < -\mu, \end{cases}$$

축소시킨다. 그러므로 웨이블릿축소법에 의한 정규잡음제거 영상은

$$\hat{f} = \sum_{\lambda} S_{\mu}(\langle y, \psi_{\lambda} \rangle) \psi_{\lambda}$$

이다.

얼마만큼의 양을 계수  $\mu$  로 사용하여야 하는가에 대해 많은 논란이 있어왔다. Donoho와 Johnstone은 웨이블릿 축소법을 정규잡음제거의 방법을 제시한 논문([5])에서  $\mu = \sqrt{2 \log N} \sigma$ 를 웨이블릿 축소 계수로 제안하였다. 여기서  $\sigma$ 는 잡음이 평균이 0인 정규분포를 따른다고 가정할 때의 잡음강도이다. 하지만 Donoho와 Johnstone이 처음 제시한 계수는 실제 응용문제에 사용하기에는 너무 크다는 비판을 있어왔다[1],[6]. 즉, 너무 큰  $\mu$ 를 사용하여 비록 잡음제거에서는 좋은 결과를 얻지만 웨이블릿 축소에서 발생하는 정보의 손실이 커져, 결과적으로 좋지 않은 결과에 얻는 경우가 많다. 반대로 작은  $\mu$ 를 사용하면 웨이블릿 축소에서 발생하는 정보의 손실을 줄일 수 있지만 잡음제거의 효과가 줄어들 것이다. 따라서, 평탄성이 큰 신호일수록 같은  $\mu$ 를 이용한 웨이블릿 축소에 따른 정보의 손실이 적기 때문에, 최적의 잡음제거 결과를 얻기 위해서는  $\mu$ 의 값을 결정하는데 있어서 잡음강도  $\sigma$  외에도 잡음을 제거해 복원하고자 하는 원영상  $f$ 의 평탄성도 고려하여야 한다[1].

다음은 그림들은 영상에서의 정규잡음을 제거하는 실험 결과이다. Fig. 2-1은 Fig. 1-1에 정규잡음을 첨가하여 얻은 영상이고, Fig. 2-2와 Fig. 2-3은 잡음제거 실험 결과이다. Fig. 2-2는 푸리에기저를 이용한 필터링방법에 의해 구했다. 이 경우 잡음제거를 위해서는 빠르게 감소하는 가중치 필터를 사용함으로써 고주파 정보의 손상은 피할 수 없었다. 이에 비해 웨이블릿 축소방법을 사용한 Fig. 2-3의 경우에는 상당한 정도의 잡음제거를 원신호의 고주파 정보의 손실 없이 얻어냈다.

### 3.3. 비파괴측정에 의한 영상재구성

의료진단에서의 CT(Computerized Tomography), NMR (Nuclear Magnetic Resonance), PET(Positron Emission Tomography)등의 의료영상처리방법들은 비파괴 측정의해 구해진 자료로부터 단층영상을 복원하는 것이다[7,9]. 이를 수학적 모델을 이용하여 기술하면

$$y = K f + z$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서  $y$ 는 잡음  $z$ 에 오염되어 관측된 비파괴측정에 의한 데이터이며,  $f$ 는 구하려는 미지



Fig. 2-1 정규잡음에 오염된 영상



Fig. 2-2 푸리에기반 필터링방법에 의한 잡음제거 영상



Fig. 2-3 웨이블릿 축소방법에 의한 잡음제거 영상

의 단층영상, 그리고  $K$ 는 라돈변환(Radon Transform)으로

$$Kf(\theta, u) = \int_{\ell_{\theta, u}} f(x, y) ds(x, y)$$

으로 정의된다. 여기서,  $ds(x, y)$ 는 선분  $\ell_{\theta, u} = \{(x, y) | x \cos \theta + y \sin \theta = u\}$ 에서의 선적분을 의미한다.

Fig. 3-1은 미지의 단층영상으로 Fig. 3-2의 비파괴측정에서 얻어진 자료로부터 복원되어야 할 대상이다. Fig. 3-2

의 자료는 비파괴측정을 계산적으로 시뮬레이션 한 것으로 잡음이 없는 상태이다. 그러나, 보통의 비파괴측정에서는 필연적으로 관측오차를 수반한다. 만약, 잡음이 복원과정을 통해 증폭된다는 사실을 고려하지 않고 복원을 강행한다면 증폭된 잡음에 의해 심하게 오염된 영상을 얻을 것이다.

영상 재구성은 복원영상의 잡음제거가 중요한 부분을 갖는다. 그러나, 웨이블릿 축소법을 영상 재구성문제에 직접적으로 적용하는데는 어려움이 있다. 영상  $f$ 의 재구성에 필요한 웨이블릿계수  $c_\lambda$ 를 관측된 데이터  $y$ 에서 계산해야 하며 또한 그 계산과정이  $y$ 에 있는 불가항력적인 관측오차를 증폭시킨다.

Donoho[4]는 이와 같은 어려움을 극복하고자 WVD (Wavelet-Vaguelette Decomposition) 방법을 제시하였다. 웨이블릿기저가 특정한 조건을 만족하는 경우, 관측데이터에 쌍대적교 기저  $\{u_\lambda\}, \{v_\lambda\}$ 가 존재하여 다음을 만족한다.

- i)  $\sum_\lambda [y, u_\lambda]^2 \asymp \sum_\lambda [y, v_\lambda]^2 \asymp \|y\|_*^2$ ,
- ii)  $[u_\lambda, v_\mu] = \delta_{\lambda, \mu}$ ,
- iii)  $K^* u_\lambda = x_\lambda \psi_\lambda, \quad K \psi_\lambda = x_\lambda v_\lambda$ ,

여기서  $\|\cdot\|_*$ 는 관측공간에서의  $L^2$ -norm이고,  $K^*$ 는  $K$ 에 대한 백프로젝션 작용소이며,  $x_\lambda = 2^{-k/2}$ 이다. 특히 웨이블릿계수는  $\langle f, \psi_\lambda \rangle = \langle f, x_\lambda^{-1} K^* u_\lambda \rangle = x_\lambda^{-1} [Kf, u_\lambda]$ 임을 사실을 이용하여  $Kf$ 에서 직접 구할 수 있다. 이와 같은 사실을 종합하면

$$f = \sum_\lambda x_\lambda^{-1} [Kf, u_\lambda] \psi_\lambda$$

를 얻을 수 있다. 이를 앞에서 서술한 웨이블릿 축소법에 적용하여 잡음제거를 행한다.

$$\tilde{f} = \sum_\lambda S_{\mu_\lambda}(x_\lambda^{-1} [y, u_\lambda]) \psi_\lambda.$$

관측데이터  $y$ 에서  $[y, u_\lambda]$ 를 빠르게 계산하는 방법에 대해서는 [8]를 참조하기 바란다.

Fig. 3-3는 의료영상처리분야에서 널리 사용되고 있는 푸리에기저를 이용한 FBP(Filtered Backprojection)에 의해 얻었다. 그러나, 많은 잡음이 여전히 남아있고 고주파수 대역 정보에 손실로 인해 경계가 무디어지는 현상을 발견할 수 있다. Fig. 3-4는 웨이블릿 축소를 이용하여 잡

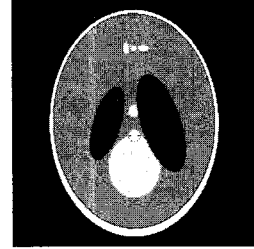


Fig. 3-1 8 비트 512 × 512 크기의 미지의 단층영상



Fig. 3-2 비파괴 측정에 의해 얻어진 자료

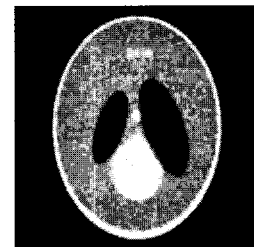


Fig. 3-3 푸리에기반 FBP에 의한 잡음제거 영상

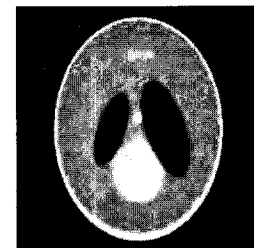


Fig. 3-4 웨이블릿 축소방법을 이용한 잡음제거 영상

잡음을 제거하려 한 것으로 Fig. 3-3에 비해 경계가 좀 더 분명하게 복원되었으며 동시에 많은 잡음제거 효과를 얻었다.

#### 4. 결 론

이 글은 새로운 영상처리 도구로써 자리잡은 웨이블릿 기저 대해 대략적인 소개를 하였다. 웨이블릿기저는 푸리에기저에 비해 그 처리 속도가 빠르고, 원영상에 빠르게 접근하며, 또한 영상의 평탄성을 잘 분석하는 등 여러 우수한 특성을 가지고 있다. 그러나 웨이블릿기저가 영상처리분야에서 푸리에기저를 교체한다는 것은 불가능하다. 푸리에기저는 여러 물리현상을 설명하는 중요한 도구이며, 특히 영상에 있어서의 흐려짐(blurring)현상을 분석하는데는 필수적이다. 푸리에기저와 웨이블릿기저의 서로의 장.단점을 잘 파악하고 주어진 영상처리 문제에 적합한 방법을 쓰는 것이 좋은 결과를 얻기 위한 첫걸음일 것이다.

#### 참고문헌

- [1] A. Chambolle, R. DeVore, N.-Y. Lee, and B. Lucier, "Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal through Wavelet Shrinkage", IEEE Transactions on Image Processing, 7-3, pp. 319-335, (1998)
- [2] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", CBMS-NSF Regional Conference series in Applied Mathematics, 91, SIAM Philadelphia, (1992)
- [3] R. DeVore, B. Jawerth, and B. Lucier, "Image Compression through Wavelet Transform Coding", IEEE Transactions on Information Theory, Special issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Analysis, 38-2, pp. 719-746, (1992)
- [4] D. Donoho, "Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet - vaguelette decompositions", Applied and Computational Harmonic Analysis, 2, pp. 613-627, (1995)
- [5] D. Donoho and I. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", Biometrika, 81, pp. 425-455, (1994)
- [6] D. Donoho and I. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", J. Amer. Statist. Assoc., 90, pp. 1200 - 1224, (1995)
- [7] A. Kak and M. Slaney, "Principles of computerized tomographic imaging", IEEE Press, (1988)
- [8] N.-Y. Lee and B. J. Lucier, "Wavelet Methods for Inverting the Radon Transform with Noisy Data",

IEEE Trans. Image Processing, To Appear.

- [9] A. Rosenfeld and A. Kak, "Digital Picture Processing I", Academic Press, (1982.)