

넓은 수평 환형 공간에서의 진동하는 자연 대류로의 천이 : $Pr=0.1$

유 주 식^{*1}, 김 용 진^{*2}, 엄 응 균^{*3}

Transition to Oscillatory Natural Convection in a Wide-gap Horizontal Cylindrical Annulus: $Pr=0.1$

Joo-Sik Yoo, Yong-Jin Kim, Yong-Kyoon Eom

Natural convection in a wide-gap horizontal annulus is considered, and the transition of flows from steady to oscillatory convection is investigated for the fluid with $Pr=0.1$. The unsteady streamfunction-vorticity equation is solved with finite difference method. As Rayleigh number is increased, the steady crescent-shaped flow bifurcates to a time-periodic flow with like-rotating eddies. And afterwards, a transition to an oscillatory multicellular flow with a counter-rotating eddy on the top of the annulus occurs. A transition from steady to an oscillatory flow occurs, but dual solutions and hysteresis phenomena are not observed.

Key Words : Natural Convection(자연 대류), Hydrodynamic Instability (수력학적 불안정성) Oscillatory Convection(진동 대류), Transition(천이), Multicellular Flow(다중셀 유동)

1. 서 론

서로 다른 벽면 온도를 갖고 있는 수직 슬롯(slot)에서는 수력학적 불안정(hydrodynamic instability)에 의해 같은 방향으로 회전하는 여러 개의 소용돌이(eddy)를 갖는 유동이 일어날 수 있다[1]. 그리고 아래 벽면이 가열되는 수평 채널(channel)에서는 Rayleigh-Bénard 열불안정(thermal instability)에 의해 서로 반대 방향으로 회전하는 셀(cell)을 갖는 유동이 일어날 수 있다[2]. 따라서 가열되는 안쪽 실린더를 갖고 있는 수평 환형 공간은 매우 흥미로운 물

리적 구조를 형성한다. 왜냐하면 환형의 수직 부분에서는 수력학적 불안정이 일어날 수 있고, 열적으로 불안정한 상태인 위 부분에서는 Rayleigh-

Bénard 열불안정이 일어날 수 있기 때문이다. 한 시스템 내에 동시에 공존하는 이 두 가지의 불안정은 매우 흥미로운 자연 대류 현상을 일으킬 것으로 예측할 수 있다. 그러나 수평 환형 공간의 자연 대류 문제에 대한 지금까지의 대부분의 연구들은 거의 환형에서의 열전달 특성에 관심을 두고 수행되었으며 유동장의 천이 현상이나 진동 대류에 대해서는 상대적으로 많은 연구를 수행하지 않았다. 특히 Prandtl 수가 유동 형태에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 적다. 최근 Yoo[3-5]는 여러 가지의 Prandtl 수에 따른 대류 현상과 분기 현상을 체계적으로 조사하여 환형에서 일어나는 열적 및 수력학적 불안정성은

^{*1} 정희원, 안동대학교 사범대학 기계공학교육과

^{*2} 한국기체연구원 열유체환경연구부

^{*3} 안동대학교 공과대학 기계공학과

Prandtl 수에 따라 매우 다양한 형태의 유동과 천이 현상을 일으킨다는 것을 보였다.

Yoo[3, 4]는 먼저 $D_i/L=12$ 의 좁은 환형을 고려하였는데 이때의 전도(conduction) 영역의 안정성은 Prandtl 수의 함수로서 다음과 같은 두 가지 영역으로 구분된다는 것을 보였다.

(1) $Pr \leq 0.2$: 수력학적 불안정이 일어남으로 인해 같은 방향으로 회전하는 두 개 이상의 셀을 갖는 유동이 일어난다. (2) $Pr \geq 0.3$, 환형의 꼭대기 부근에서 열불안정이 일어나며 초기에는 사각형 모양의 하나의 작은 셀이 형성되는 정상 상태의 유동을 보인다. 그리고 불안정이 일어난 후에는 Prandtl 수에 따라서 다양한 다중셀 유동(multicellular flow)과 분기 현상, 및 진동 대류(oscillatory convection)가 존재함을 보였다.

그리고 다음에는 $D_i/L=2$ 의 넓은 폭을 갖는 환형에서 일어나는 Prandtl 수에 따른 분기 현상을 $0.3 \leq Pr \leq 1$ 의 범위에서 조사하였는데 관측된 현상은 다음과 같다[5]. $0.3 \leq Pr \leq 1$ 에서는 정상 상태의 두 셀 유동과 한 셀 유동이 동시에 존재할 수 있다.

두 셀 유동은 $0.3 \leq Pr \leq 0.5$ 에서는 영(zero)의 초기조건으로부터도 구할 수 있지만 $0.6 \leq Pr \leq 1$ 에서는 자연스럽게 구현되지 않는다.

$0.3 \leq Pr \leq 0.4$ 에서는 이력(hysteresis) 현상이 일어난다. 그러나 $0.5 \leq Pr \leq 1$ 에서는 일어나지 않는다.

본 연구는 Yoo[5]의 연구의 연장으로서 $D_i/L=2$ 의 넓은 폭을 갖는 환형에서 일어나는 $Pr=0.1$ 인 중간 Prandtl 수 유체에 대한 유동의 천이 현상을 조사한다.

2. 해석

환형의 구조와 좌표계는 Fig. 1과 같다. 일정한 표면 온도를 유지하고 있는 두 개의 무한히 긴 수평 실린더 사이에 유체가 있다. 안쪽 실린더의 온도는 T_i 이고 바깥쪽 실린더의 온도는 T_o 이며 $T_i > T_o$ 이다. Boussinesq 근사 하에서

부력 항을 제외하고는 유체에서의 밀도 변화는 무시한다. 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식을 특성 길이, 시간, 속도, 압력과 온도를 각각 L , L^2/x , x/L , $\rho_0 x^2/L^2$, $(T_i - T_o)$ 로 택하여 무차원화시킨다. 그리고 $Pr = \nu/x$, $Ra = ag(T_i - T_o)L^3/x\nu$ 를 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수로 정의한다.

유선함수 (Ψ)와 와도 (ω)에 대한 무차원 지

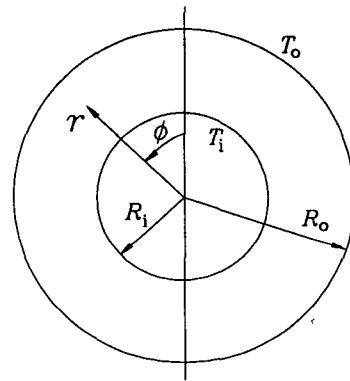


Fig. 1 Problem configuration.

배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다 [5].

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega$$

$$-PrRa \left[\sin(\phi) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \cos(\phi) \frac{\partial \theta}{r \partial \phi} \right] \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \Psi \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (3)$$

여기에서 와도(ω)와 유선함수(Ψ) 및 Jacobian $J(f, g)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial}{r \partial r}(rv) - \frac{\partial}{r \partial \phi}(u), \quad u = \frac{\partial \Psi}{r \partial \phi}$$

$$, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$J(f, g) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \phi} - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial r} \right) \quad (4)$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2},$$

$$\theta = 1 \quad \text{at} \quad r = r_i \quad (5)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2},$$

$$\theta = 0 \quad \text{at} \quad r = r_o \quad (6)$$

원주 방향으로는 다음과 같은 대칭 조건을 적용한다.

$$\Psi = \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0 \quad \text{at} \quad \phi = 0, \pi \quad (7)$$

식 (1)-(7)의 방정식은 Yoo[3-5]에서 사용한 것과 같은 유한차분법을 사용하여 푼다. 원주 방향으로는 균일 격자를 이용하고 반경 방향으로는 두 벽면에서의 얇은 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$r = r_i + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right]$$

with $C=1.5, 0 \leq \eta \leq 1$ (8)

본 연구에서 사용한 $(r \times \phi)$ 격자계는 (45×65) 이다.

3. 결과 및 논의

전도(conduction)가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 하나의 셀(cell)을 갖는 정상 상태의 대류가 유지된다. 이 경우 유체는 따뜻한 안쪽 실린더 벽면을 따라 위로 올라가서 차가운 바깥쪽 실린더를 타고 흘러내린다 (Fig. 2). 앞으로 Fig. 2와 같이 환형의 꼭대기($\phi = 0$) 부근의 유

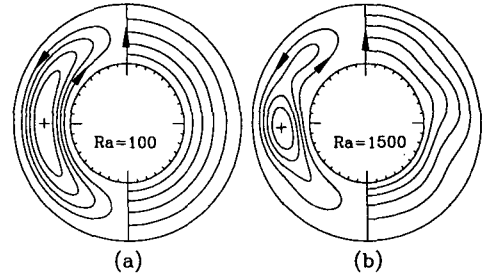


Fig.2 Steady-state streamlines and isotherms at small Rayleigh numbers: (a) $Ra = 100$; (b) $Ra = 1500$.

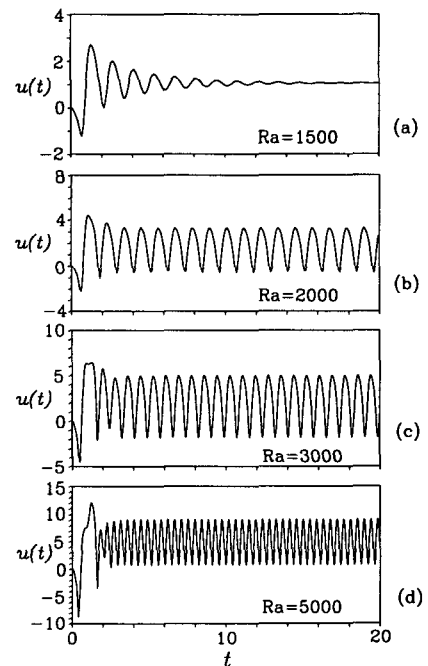


Fig. 3 Time evolutions of radial velocity at the center of the annular gap, $u(t) = u(r_c, \pi/2)$ with $r_c = (r_o + r_i)/2$, for several Rayleigh numbers: (a) $Ra = 1500$; (b) $Ra = 2000$; (c) $Ra = 3000$; (d) $Ra = 5000$.

체가 위로 올라가는 유동을 ‘올라가는 유동 (upward flow)’이라고 부르기로 하겠다[5-7]. ‘올라가는 유동’을 보이는 $Ra \leq 1500$ 에서는 정상 상태가 유지된다 (Fig. 3(a)). 그러나 Rayleigh 수가 증가할수록 정상 상태의 올라가는 유동은 불안정해져서 마침내 시간 주기적인 유동으로의 분기가 일어난다 (Fig. 3(b)).

$Ra \geq 2000$ 에서는 진동하는 대류가 일어나는데 먼저 Fig. 3에는 환형 폭의 중심에서의 반경 방향의 속도 $u(t)$ 의 시간 기록을 도시하였다. 그리고 진동하는 대류가 일어나는 $Ra = 2000, 3000, 5000$ 에서의 한 주기 동안의 몇몇 순간적인 유선의 모습을 Figs. 3-5 에 도시하였다. $Ra = 2000, 3000, 5000$ 에서는 모두 주기적인 운동을 보인다.

먼저 진동 대류의 초기인 $Ra = 2000$ 에서의 유동장을 Fig. 4에 도시하였다. Fig. 4는 같은 방향으로 회전하는 두개의 셀이 주기적으로 나타

남을 보여주고 있는데 이것은 진동하는 불안정 (oscillatory instability)의 근원은 수력학적 불안정성을 말해 주고 있다[3]. 그리고 진동하는 대류가 일어나는 $Ra = 2000$ 에서는 진동하는 기간 동안에 안쪽 실린더에서의 경계층 (boundary layer)이 환형의 수직 대칭면 ($\phi = 0, \pi$) 외의 곳 (Fig. 4(d): $\phi \approx 20^\circ$)에서 분리되어 환형의 안쪽 실린더의 벽면에 부착된 작은 소용돌이 (eddy)가 주기적으로 나타난다. 진동 대류의 초기인 $Ra = 2000$ 에서는 이 작은 소용돌이가 바깥쪽 실린더까지는 확대되지 않는다. 그러나 더 큰 Rayleigh 수인 $Ra = 3000$ 에서는 환형의 꼭대기의 작은 소용돌이가 바깥쪽 실린더까지 확대된다 (Fig. 5 (a), (d)). $Ra = 3000$ 에서의 유동장 Fig. 5는 환형의 꼭대기에서 반대 방향으로 회전하는 하나의 작은 소용돌이가 주기적으로 나타남을 보여주고 있다.

다음에는 $Ra = 5000$ 에서의 한 주기 동안의

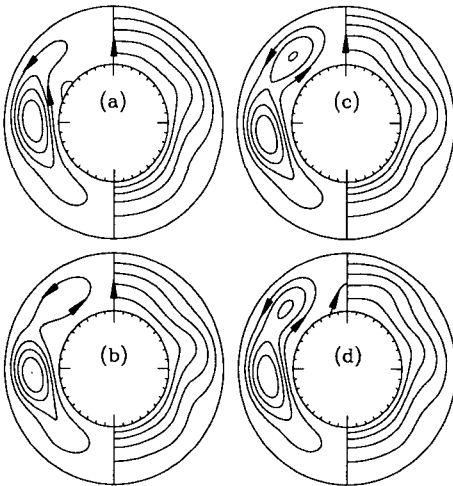


Fig. 4 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra = 2000$ during one period (P) of oscillation: (a) at $t = t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value ; (b) at $t = t_1 + P/4$; (c) at $t = t_1 + 2P/4$; (d) at $t = t_1 + 3P/4$.

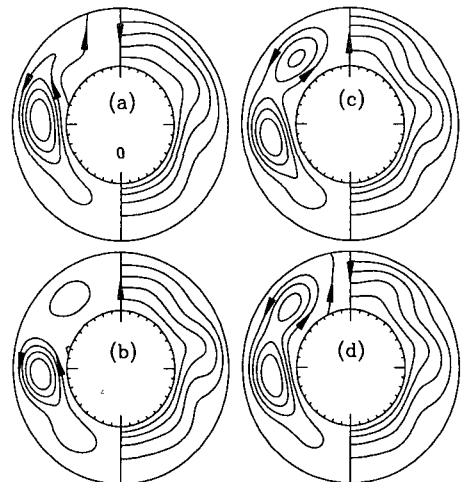


Fig. 5 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra = 3000$ during one period (P) of oscillation: (a) at $t = t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value ; (b) at $t = t_1 + P/4$; (c) at $t = t_1 + 2P/4$; (d) at $t = t_1 + 3P/4$.

진동하는 대류의 유동장을 Fig. 6에 도시하였다.

$Ra=5000$ 에서는 진동하는 동안에 환형의 수직 부분에 하나의 큰 셀이 형성되며, 환형의 위 부분에는 이와 반대 방향으로 회전하는 하나의 셀이 형성된다. 그리고 $Ra=5000$ 에서 주목할 것은, $Ra=3000$ 과는 달리 환형의 위 부분에 형성되는 셀이 진동하는 기간 동안 내내 사라지지 않고 계속 존재한다는 것이다. 그리고 진동하는 대류는 두 셀의 경계면에서 일어나는 새로운 소용돌이(eddy)의 주기적인 생성과 소멸을 보여주고 있다.

큰 Rayleigh 수 (Fig. 6)의 유동장은, 환형의 위 부분에 반대 방향으로 회전하는 하나의 셀이 진동하는 기간 동안에 계속 존재함으로 인해 환형의 꼭대기 부근($\phi=0$)의 유체가 아래로 내려간다. 즉, $Ra \geq 5000$ 에서는 환형의 꼭대기 부근의 유체가 아래로 움직이는 '내려가는 유동

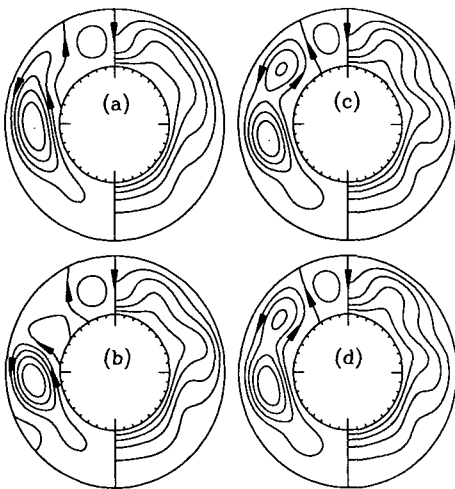


Fig. 6 Instantaneous streamlines and isotherms at $Ra=5000$ during one period (P) of oscillation: (a) at $t=t_1$ at which $u(t)$ takes its minimum value ; (b) at $t=t_1+P/4$; (c) at $t=t_1+2P/4$; (d) at $t=t_1+3P/4$.

(downward flow)' 이 확립된다. 그러나 작은 Rayleigh 수에서는 안쪽 실린더 부근의 유체는 따뜻한 안쪽 벽면을 따라서 위로 올라간다. 따라서 유동장이 시간에 따라 변하기 때문에 유동장을 공간적으로 분류하기는 어렵지만 이와 같이 환형의 꼭대기 부근의 유동의 방향에 따라서 '올라가는 유동'으로부터 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어남을 알 수 있다.

이와 같은 유동의 천이 현상에 의해 벽면에서의 열전달률에도 변화가 일어난다. Fig. 7 에는 Rayleigh 수에 따른 시간 평균 Nusselt 수를 도시하였다. Nusselt 수는 Ra 의 증가와 함께 증가한다. 그런데 Fig. 7에서 주목할 만한 것은 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어나는 부근인 $Ra=4200$ 근방에서 Nusselt 수의 기울기가 약간 급격하게 증가한다는 것이다. 반대 방향으로 회전하는 셀이 형성될 때 $-\Psi_{\min}$ 의 크기는 그 셀의 강도(strength)를 나타낸다. '내려가는 유동'으로의 천이가 일어나는 부근인 $Ra=4200$ 에서의 반대 방향으로 회전하는 소용돌이는 그 모양이 얇고 강도도 약하다. $Ra=4200$ 에서는 진동하는 동안 $-\Psi_{\min}$ 는 $0.13 \leq -\Psi_{\min} \leq 0.91$ 의 범위에 있다. 그러나 $Ra=4300$ 에서는 $-\Psi_{\min}$ 이 $1.7 \leq -\Psi_{\min} \leq 2.3$ 의 범위에 있음으로써 상대적으로 강한 소용돌이를 보여준다. 그리고 Rayleigh 수가 $Ra=4200$ 에서 $Ra=4300$ 으로 변할 때 Nusselt 수의 급격한 증가가 일어난다.

Fig. 6의 유동장은 환형의 수직 부분에 위치한 하나의 큰 셀과 환형의 꼭대기 부근에 존재하는 반대 방향으로 회전하는 소용돌이 사이에서 일어나는 새로운 소용돌이의 생성과 소멸을 보여주고 있다. 이와 같은 두 셀 간의 강한 상호 작용으로 인하여 환형의 위 부분은 아래 부분에 비해 더 복잡한 거동을 보여준다. Rayleigh 수가 증가할수록 두 셀 간의 상호 작용은 더욱 더 강해지며 결국에는 복잡한 비주기적인(aperiodic) 운동이 일어난다 (Fig. 8).

$Pr=0.3$ 인 경우[5]에는 정상 상태의 이층해가 발견되었지만 $Pr=0.1$ 인 경우에는 비정상 상

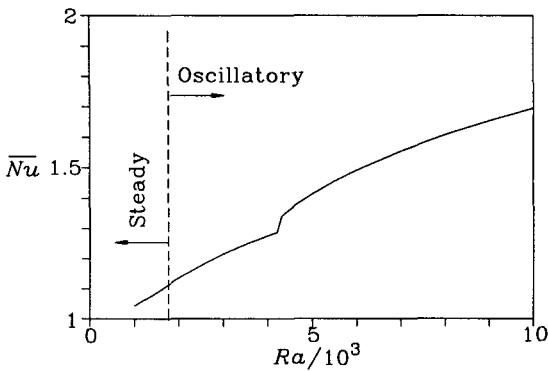


Fig. 7 Time-averaged overall Nusselt number, \overline{Nu} , as a function of Ra .

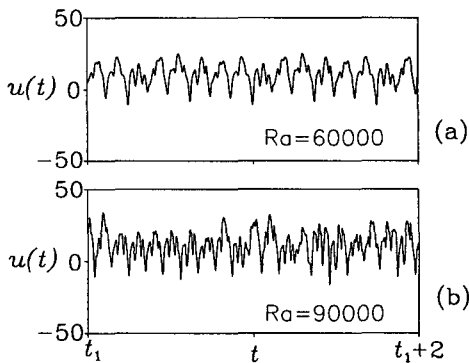


Fig. 8 Time evolutions of $u(t)$ at high Rayleigh numbers: (a) $Ra = 6 \times 10^4$; (b) $Ra = 9 \times 10^4$.

태의 진동하는 대류가 일어나며 이력(hysteresis) 현상은 일어나지 않았다.

끝으로 Fig. 8과 Fig. 9에는 큰 Rayleigh 수인 $Ra = 6 \times 10^4$, 9×10^4 에서의 $u(t)$ 의 시간 거동과 $Ra = 9 \times 10^4$ 에서의 몇몇 순간적인 유선들을 도시하였다. 진동하는 대류의 초기에는 시간 주기적인 거동을 보인다 (Fig. 3). 그러나 큰 Rayleigh 수에서는 매우 복잡한 진동을 보여준다 (Fig. 8). 비록 큰 Rayleigh 수에서 매

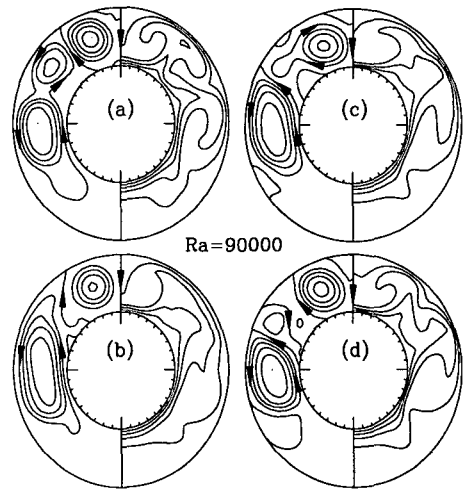


Fig. 9 Instantaneous streamlines and isotherms at a high Rayleigh number of $Ra = 9 \times 10^4$.

우 복잡한 진동 모양을 보여주고 있지만 환형의 위 부분에 형성되는 소용돌이와 이와 반대 방향으로 회전하는 환형의 수직 부분에 형성되는 소용돌이는 그 형상과 크기가 변화하지만 사라지지 않고 계속 존재한다. 그리고 이들 두 소용돌이 사이의 강한 상호 작용으로 인하여 특히 두 셀의 경계면에서 시간에 따라 유동장이 매우 복잡하게 변화한다 (Fig. 9).

4. 결론

두 개의 수평 동심 실린더 사이의 넓은 환형 공간 ($D_i/L=2$)에서 일어나는 $Pr=0.1$ 인 유체의 자연 대류 유동의 천이 현상을 수치적으로 조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 유선함수-와도 방정식을 풀었다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 정상 상태의 '올라가는 유동'으로부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 수력학적 불안정으로 인하여 Hopf bifurcation이 일어난 직후에는 같은 방향으로 회전하는 다중셀(multicellular) 유

조사하였다. 유한 차분법을 이용하여 비정상 유선함수-와도 방정식을 풀었다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 정상 상태의 '올라가는 유동'으로부터 주기적으로 진동하는 대류로의 Hopf bifurcation이 일어난다. 수력학적 불안정으로 인하여 Hopf bifurcation이 일어난 직후에는 같은 방향으로 회전하는 다중셀(multicellular) 유동이 일어난다. 그러나 조금 더 큰 Rayleigh 수에서는 환형의 윗부분에 반대 방향으로 회전하는 하나의 소용돌이가 형성됨에 따라 '내려가는 유동'이 확립된다. 정상 상태의 이중해를 보이는 $Pr \geq 0.3$ 인 경우와는 달리 진동하는 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어나며 이중해는 존재하지 않는다. Rayleigh 수가 증가함에 따라 '내려가는 유동'으로의 천이가 일어나는 Rayleigh 수 부근에서 시간 평균 Nusselt 수의 기울기가 크게 증가하며, 이력 현상은 일어나지 않는다.

참고문헌

- pp.3275~3286.
- [6] Yoo, J.-S., 1996, Dual Steady Solutions in Natural Convection Between Horizontal Concentric Cylinders, *Int. J. Heat and Fluid flow*, Vol. 17, pp.587~593
- [7] 유 주식, 1999, 일정 열유속 실린더를 갖는 수평 환형 공간에서의 공기의 이중 자연 대류 유동, *한국전산유체공학회지*, 제 4권 제 2호, pp.1~8.
- [1] Lee, Y. and Korpela, S. A., 1983, Multicellular Natural Convection in a Vertical Slot, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 126, pp. 91-121.
- [2] Busse, F. H., Transition to Turbulence in Rayleigh- Bénard Convection. In *Topics in Applied Physics*, Vol. 45, Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub. Springer-Verlag, 1981, pp. 97~137.
- [3] Yoo, J.-S., 1998, Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus: $Pr \leq 0.3$, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp.3055~3073.
- [4] Yoo, J.-S., 1999, Transition and Multiplicity of Flows in Natural Convection in a Narrow Horizontal Cylindrical Annulus : $Pr=0.4$, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp.709~722.
- [5] Yoo, J.-S., 1999, Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 42,