

비점성 정체 유동 하에서의 응고와 열전달

유 주 식^{*1}, 김 용 진^{*2}

Heat Transfer and Solidification in the Inviscid Stagnation Flow

Joo-Sik Yoo, Yong-Jin Kim

Key Words: Inviscid stagnation flow (비점성 정체 유동), Solidification (응고), Heat transfer (열전달), Phase change (상변화)

Abstract

This study investigates the problem of phase change from liquid to solid in the inviscid stagnation flow. The instantaneous location of the solid-liquid interface is fixed for all times by a coordinate transformation. Finite difference method is used to obtain the solution of the unsteady problem, and the growth rate of solid and the transient heat transfer from the surfaces of solid are investigated. The transient solution is dependent on the three dimensionless parameters, but the final steady state is determined by only one parameter of temperature ratio/conductivity ratio. It is observed that the instantaneous heat flux at the surface of solid can be obtained with sufficient accuracy by measuring the thickness of the solid or vice versa.

1. 서 론

액체와 고체 사이에서 일어나는 상변화 현상은, 금속의 주조, 음식의 냉동, 얼음의 생성, 열에너지 저장 시스템 등과 같은 넓은 산업적인 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아 왔다. 이 분야에 대한 첫 연구는 Stefan에 의해 수행된 극지의 얼음 두께에 대한 연구이며, 이러한 이유로 인하여 액체의 응고 문제는 종종 "Stefan 문제"로 불리어지기도 한다[1]. 그 이후 많은 연구가 수행되었는데, 상변화 문제에 대한 연구는 크게 다음과 같은 3가지 종류로 구분할 수 있다. (i) 액체의 유동을 전혀 고려하지 않고 정지해 있는 액체와

고체 사이의 순수한 전도에 의한 열전달만을 고려하여 온도 분포와 응고 과정을 조사하는 경우 [2,3]. 액체 내에서 유체의 흐름, 즉, (ii) 강제대류 [4,5], 혹은 (iii) 자연대류[6,7]가 있는 경우이다.

이들 중 강제 대류 하에서의 연구들은 대개 유체 쪽에서의 열전달을 알고 있는 일정 값으로 주고서 고체에서의 온도 분포와 응고 과정을 조사하였다[4,5]. 그러나 액체 영역에서의 온도 분포도 응고 현상과 함께 비정상적으로 변할 수 있으며 이에 따른 비정상 열전달과 응고 과정은 서로 영향을 미칠 수 있다. 엄밀해를 갖고 있는 잘 알려진 강제 대류로는 von-Kármán 회전 유동과 정체 유동이 있다[8]. 비교적 근래에 Yoo[9,10]는 고체와 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화를 모두 고려하여 von-Kármán 회전 유동 하에서의 상변화 문제를 연구하였다. Yoo[9]의 연구는, 강제 대류 하에서의 상변화 문

^{*1} 정희원, 안동대학교 기계공학 교육과

^{*2} 한국기계연구원 열유체 환경 연구부

체에 있어서 고체와 액체 영역의 온도 분포의 비정상 거동을 모두 고려한 최초의 연구라는 데에 큰 의미를 갖고 있다. 한편 Rangel and Bian[11,12] 과 Yoo[13]는 정체 유동에 대한 응고 모델을 만들어서 유체 유동이 응고 거동에 미치는 영향을 조사하였다. 이들 모델들은, 분무 용착 (spray deposition)에서 유체의 흐름이 액적의 응고[14,15]에 미치는 영향을 보여준다는 데에도 의미가 있다.

본 연구에서는 비점성 축대칭 정체 유동 응고 문제를 매우 빠르고 정확하게 풀 수 있는 수치적인 방법을 사용하여 고체 표면에서의 열전달 특성과 응고 현상을 조사한다. 본 문제에서 나타나는 중요한 물리량은 고체의 성장 속도와 고체 표면에서의 열전달률이다. 지배 방정식을 무차원화시키면 Stefan 수 (Ste), 온도비 (θ_R), 고체와 액체의 열확산 계수 비 (α_R) 및 열전도도 비 (K_R)의 4개의 무차원 변수가 나타난다. 그러나 방정식의 해는 3개의 변수 θ_R/K_R , Ste , α_R 에 의해 결정되는데[13] 이들 변수들에 대한 응고 속도와 열전달의 특성을 조사한다.

2. 해석

2.1 지배 방정식

Fig.1과 같이 일정한 온도 T_C 로 유지되고 있는 차가운 기판을 향하여 따뜻한 유체가 흘러간다. 초기 상태에 있어서 유체의 온도는 T_H 로 일정하

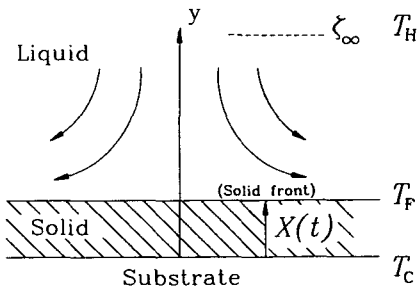


Fig.1 Stagnation flow ahead of a solidifying interface.

게 유지되고 있다. 기판의 온도 T_C 가 유체의 응고 온도 T_F 보다 낮으면 고체-액체 경계면에서 응고가 일어나게 되고 고체층의 두께는 점점 커지게 된다. 비점성 축대칭 정체 유동에서의 수직 방향의 속도는 $v = -2Ay$ 이므로[8] 온도 분포와 고체의 두께에 대한 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같이 된다[13] :

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial y^2} \text{ at } 0 < y < X(t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} - 2A[y - X(t)] \frac{\partial T_L}{\partial y} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} \text{ at } y > X(t) \tag{2}$$

$$K_S \frac{\partial T_S}{\partial y} - K_L \frac{\partial T_L}{\partial y} = \rho L \frac{dX}{dt} \text{ at } y = X(t) \tag{3}$$

$$T_S = T_C \text{ at } y = 0,$$

$$T_S = T_L = T_F \text{ at } y = X(t) \tag{4}$$

$$T_L = T_H \text{ at } y \rightarrow \infty$$

응고가 일어나기 바로 직전의 액체의 온도는 균일하며 T_H 와 같다.

다음과 같은 무차원 변수를 도입하여 지배방정식을 무차원화시킨다.

$$\tau = At, \quad \zeta = \sqrt{\frac{A}{\alpha_L}} y, \quad \theta_S = \frac{T_S - T_C}{T_F - T_C}$$

$$\theta_L = \frac{T_L - T_H}{T_F - T_H}, \quad \theta_R = \frac{T_H - T_F}{T_F - T_C} \tag{5}$$

$$K_R = \frac{K_S}{K_L}, \quad \alpha_R = \frac{\alpha_S}{\alpha_L}, \quad Ste = \frac{C_S(T_F - T_C)}{L}$$

무차원 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \zeta^2} \text{ at } 0 < \zeta < \delta \tag{6}$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} - 2(\zeta - \delta) \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \zeta^2} \text{ at } \zeta > \delta \tag{7}$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \zeta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = \frac{1}{\alpha_R Ste} \frac{d\delta}{d\tau} \text{ at } \zeta = \delta \tag{8}$$

$$\theta_S = 0 \text{ at } \zeta = 0, \quad \theta_S = \theta_L = 1 \text{ at } \zeta = \delta(\tau),$$

$$\theta_L = 0 \text{ at } \zeta \rightarrow \infty \tag{9}$$

$$\text{여기에서 } \delta(\tau) = \sqrt{\frac{A}{\alpha_L}} X(t) \tag{10}$$

는 무차원화된 고체의 두께를 나타낸다.

무차원 지배 방정식 (6)-(9)에서 θ_R/K_R 이 하나의 변수로 표현된다는 것에 주목할 필요가 있다. 이것은 열전달이 Fourier의 열전도 법칙에 의해 일어나기 때문이다.

2.2 수치적인 방법

식 (6)-(9)의 해를 구하기 위해 먼저 다음과 같은 좌표 변환을 하여 움직이는 고체-액체 경계면의 위치 $\zeta = \delta(\tau)$ 를 $\eta = 1$ 에 고정시킨다.

$$\eta = \frac{\zeta}{\delta(\tau)} \tag{11}$$

식 (6)-(9) 는 다음과 같이 변환된다 :

$$\delta^2 \frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2} \frac{d\delta^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \eta^2} \tag{12}$$

at $0 < \eta < 1$

$$\delta^2 \frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2} \frac{d\delta^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} - 2(\eta-1)\delta^2 \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \eta^2} \tag{13}$$

at $\eta > 1$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{1}{2\alpha_R Ste} \frac{d\delta^2}{d\tau} \tag{14}$$

at $\eta = 1$

$$\theta_S = 0 \text{ at } \eta = 0, \theta_S = \theta_L = 1 \text{ at } \eta = 1, \tag{15}$$

$$\theta_L = 0 \text{ at } \eta \rightarrow \infty$$

응고가 시작되는 $\tau \rightarrow 0$ 의 극한적인 경우의 해는 다음과 같은 Neumann의 해가 된다 [9,13].

$$\theta_S(\eta) = \frac{\text{erf}(\sigma\eta)}{\text{erf}(\sigma)} \tag{16}$$

$$\theta_L(\eta) = \frac{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R}\eta)}{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} \tag{17}$$

$$\delta(\tau) = 2\sigma\sqrt{\alpha_R\tau} \tag{18}$$

여기에서 고체의 성장율을 나타내는 변수 σ 는 다음의 관계식으로부터 결정된다.

$$\frac{\exp(-\sigma^2)}{\text{erf}(\sigma)} - \frac{\sqrt{\alpha_R}\theta_R \exp(-\alpha_R\sigma^2)}{K_R \text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} = \frac{\sqrt{\pi}}{Ste} \sigma \tag{19}$$

충분히 작은 시간인 $\tau_0 = 10^{-5}$ 에서의 식 (16)-(19)의 해를 수치 계산에 있어서의 초기치로

사용한다.

변환된 식 (12) 와 (13) 을 음함수적인 유한 차분식(implicit finite difference equation)으로 바꾼다. 차분 방정식에서 τ^{j+1} 에서의 온도 분포를 구하기 위해서는, 경계면의 위치 δ 와 $d\delta/d\tau$ 가 입력치로써 요구된다. 우선, τ^{j+1} 에서의 $d\delta/d\tau$ 는 τ^j 에서의 $\partial\theta_S/\partial\eta$, $\partial\theta_L/\partial\eta$, δ 를 사용하여 식 (14)로부터 구한다. 이 값을 식 (12)와 (13)의 차분화시킨 방정식에 입력치로 사용한다. 그리고, 만일 $\tau = \tau^j$ 에서 $\tau = \tau^{j+1}$ 까지의 기간 동안에 식 (14)에서의 $\partial\theta_S/\partial\eta$ 와 $\partial\theta_L/\partial\eta$ 를 상수로 가정하여 τ^j 에서의 값과 같다고 가정하면 차분화된 식 (14)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta\delta = C^j d\tau, C^j : \text{constant at } \tau^j \tag{20}$$

이 식으로부터

$$\delta^{j+1} = \sqrt{(\delta^j)^2 + 2C^j(\tau^{j+1} - \tau^j)}$$

를 얻는다. 여기에서 구한 δ^{j+1} 를 차분 방정식에서의 입력치로 사용한다.

지배 방정식을 유한 차분 방정식으로 만드는데 있어서, 고체 영역에서는 균일 격자계를 사용하고, 액체 영역에서는 경계면 부근의 얇은 온도 경계층을 분해하기 위해 다음과 같은 불균일 격자계를 사용한다.

$$(\eta)_i = \eta_\infty \left(\frac{i-1}{N-1} \right)^{1.7} \tag{21}$$

여기에서 N 은 액체 영역에 있는 격자점의 총수이다.

고체 영역에서는 100 개, 액체 영역에서는 500 개의 격자점을 사용하였다. 그리고 식 (12) 와 (13)으로부터 나오는 차분 방정식은 트리다이 어그널 매트릭스 알고리즘(tridiagonal matrix algorithm)을 이용하여 반복 계산을 하지 않고 바로 푼다. 위의 방법을 사용하여 유체 유동이 없는 Neumann 문제를 풀었을 경우, 응고층의 두께 $X(t)$ 에 대해 엄밀해와 0.1% 범위 이내에서 일치하였으며, 유체 유동이 있는 경우에는 시간이 지남에 따라 엄밀한 정상 상태(exact steady state)로 접근해 갔다.

3. 결과 및 논의

먼저 시간에 따른 고체의 두께 변화를 몇 가지의 Stefan 수와 θ_R/K_R 에 대해 Fig.2와 Fig.3에 나타내었다. 고체의 두께는 시간의 증가와 함께 단조적으로 증가하며 최종 평형 상태로 접근해 간다. 유체 유동이 없는 순수한 전도만에 의한 응고 (Neumann 문제[1]) 에 있어서는, 시간이 지남에 따라 액체 영역 내에서 온도 경계면 ($T_L = T_H$ 인 면)이 계속 전파되며 고체의 두께는

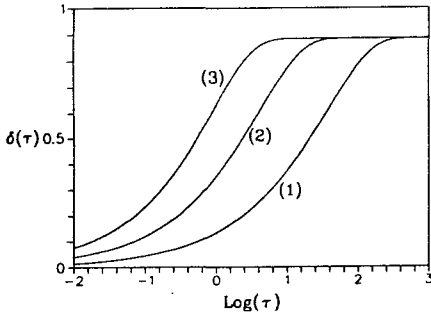


Fig.2 Dimensionless solid thickness with time for several Stefan numbers with $\theta_R/K_R=1$ and $\alpha_R = 1$: (1) $Ste=0.01$; (2) $Ste=0.1$; (3) $Ste=1$.

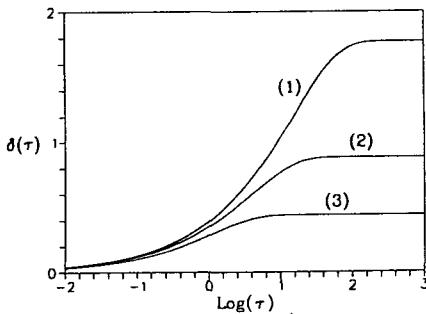


Fig.3 Dimensionless solid thickness with time for several values of θ_R/K_R with $Ste=0.1$ and $\alpha_R = 1$: (1) $\theta_R/K_R=0.5$; (2) $\theta_R/K_R=1$; (3) $\theta_R/K_R=2$.

$X(t) = 2\sigma\sqrt{\alpha_s t}$ 의 관계식에 따라 계속 자라 나게 된다. Neumann 문제에 있어서는 이와 같은 온도면의 전파를 막을 물리적인 메커니즘이 없으므로 고체가 계속 자라게 되지만 본 문제에 있어서는 경계면을 향해 흐르고 있는 유체 유동이 온도 경계면의 전파를 억제하므로 시간이 지남에 따라 최종 평형 상태에 도달하게 된다. 식 (6)-(9)에서 $\partial/\partial\tau=0$ 로 하면 다음과 같은 평형 상태의 고체의 두께를 구할 수 있다[13]:

$$\delta_{eq} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{K_R}{\theta_R} \tag{22}$$

Fig.2와 Fig.3는 시간이 지남에 따라 모두 엄밀한 정상 상태로 접근해감을 보여주고 있다. Fig.2에서 $\delta_{eq} = \sqrt{\pi}/2$ 이다. 그리고 Fig.2는 Ste 가 커질수록 응고가 빠르게 진행된다는 것을 보여주고 있다. 그러나 Ste 는 다르지만 다른 물성치가 일정하면 시간이 지날수록 똑같은 평형상태에 도달하게 된다. 즉, Stefan 수는 평형상태의 고체의 두께에는 영향을 미치지 않는다. 한편 Fig.3는 θ_R/K_R 이 커질수록 고체의 성장이 억제됨을 보여주고 있다. 무차원 변수 α_R 에 대한 특성은 Stefan 수에 대한 특성과 유사하다. 즉, α_R 이 커질수록 고체는 빨리 자라지만 평형 상태는 α_R 에 무관하다 (식 (22)).

다음에는 고체 표면에서의 비정상 열전달 특성에 대해 조사해 보기로 하겠다. 고체의 표면에서의 열유속, Q 는 다음과 같이 정의된다 :

$$Q(t) = -K_S \left[\frac{\partial T_S(y,t)}{\partial y} \right] \text{ at } y=0 \tag{23}$$

평형 상태의 열유속은 다음과 같이 구해지며

$$Q_{steady} = -K_S \frac{(T_F - T_C)}{X_{eq}} \text{ at } t \rightarrow \infty \tag{24}$$

변환된 좌표계에서 $Q(\tau)$ 는 다음과 같이 표현된다 :

$$\frac{Q(\tau)}{Q_{steady}} = \frac{\delta_{eq}}{\delta} \frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} \text{ at } \eta=0 \tag{25}$$

먼저 Fig.4는 Ste 가 증가할수록 $Q(\tau)/Q_{steady}$ 가 감소함을 보여주고 있다. 이것은 Ste 가 커지면 고체의 성장은 정상 상태에 더 빨리 도달하기

때문이다.

Fig.5에는 θ_R/K_R 에 따른 고체 표면에서의 열 전달 $Q(\tau)/Q_{steady}$ 의 거동을 도시하였다. θ_R/K_R 이 증대되면 성장할 수 있는 고체층의 두께가 작아짐으로 인해 준 정상 상태에 더 빨리

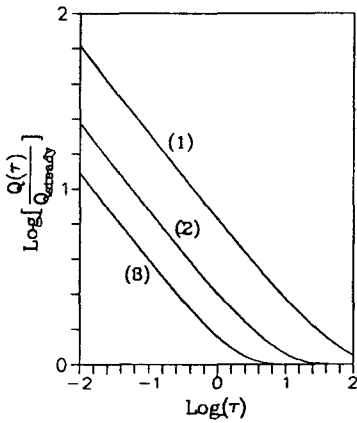


Fig.4 Transient heat fluxes at the surface of solid, $Q(\tau)/Q_{steady}$, for several Ste 's with $\alpha_R=1$ and $\theta_R/K_R=1$: (1) $Ste=0.01$; (2) $Ste=0.1$; (3) $Ste=1$.

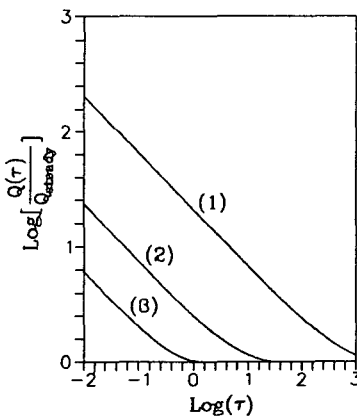


Fig.5 Transient heat fluxes at the surface of solid, $Q(\tau)/Q_{steady}$, for several values of θ_R/K_R with $\alpha_R=1$ and $Ste=0.1$: (1) $\theta_R/K_R=0.1$; (2) $\theta_R/K_R=1$; (3) $\theta_R/K_R=10$.

도달한다. 즉, θ_R/K_R 이 증대되면 반응 시간이 짧아진다. 그에 따라 Fig.5는, θ_R/K_R 이 증가할 수록 $Q(\tau)/Q_{steady}$ 가 감소함을 보여주고 있다. 정체 유동 응고 문제에서 나타나는 이러한 경향은 회전 원판에서의 특성[10]과 일치한다. 이것은 성장할 수 있는 고체의 최대 두께(δ_{eq})는 θ_R/K_R 에 반비례하기 때문이다.

이상에서 고체의 성장 $X(t)$ 와 열전달 $Q(\tau)$ 의 특성을 각각 살펴보았는데 두 개의 물리량의 곱으로 표현되는 $Q(\tau)X(\tau)$ 는 주목할 만한 특징을 보여주고 있다는 것을 관찰하였다. 하나의 예로써 Fig.6에 $Ste=0.01$, 1에 대해 $Y(\tau) = \text{Log}[Q(\tau)X(\tau)/Q_{steady}X_{eq} - 1]$ 의 그래프를 도시하였다. Fig.6에서 알 수 있듯이 $Ste < 1$ 에서 $Y(\tau)$ 의 값은 항상 -1 보다 작다. 이것은 응고 과정 중에서 근사적으로 $Q(\tau)/Q_{steady} \approx X_{eq}/X(\tau)$ 의 관계를 갖는다는 것을 보여준다. 그리고 Ste 가 작아질수록 두 값, $Q(\tau)/Q_{steady}$ 와 $X_{eq}/X(\tau)$,의 차이는 더욱 더 작아진다. Fig.6에서 $Z(\tau) = [Q(\tau)/Q_{steady}] \cdot [X(\tau)/X_{eq}]$ 의 값은, $Ste=1$ 인 경우 $1 < Z(\tau) < 1.048$ 이며 $Ste=0.01$

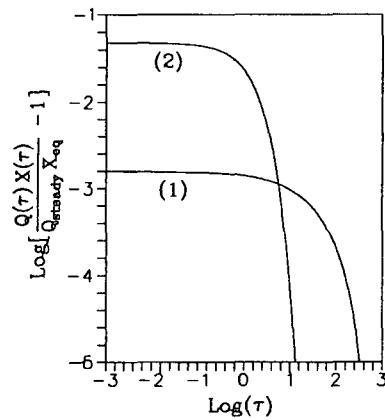


Fig.6 Plot of $\text{Log}[Q(\tau)X(\tau)/Q_{steady}X_{eq} - 1]$ with time for $\alpha_R = \theta_R/K_R = 1$: (1) $Ste=0.01$; (2) $Ste=1$.

인 경우 $1 < Z(\tau) < 1.0016$ 이다. 따라서 특히 Ste 가 작은 경우에 있어서는, $Q(\tau)$ 와 $X(\tau)$ 중 어느 하나를 측정함으로써 다른 하나의 값을 상당히 정확하게 구할 수 있음을 말해 준다.

4. 결론

수치적인 방법을 사용하여 비점성 축대칭 정채 유동에서의 응고 현상을 해석하였다. 기판을 향한 유체의 흐름은 따뜻한 유체를 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면으로 흐르게 함으로써 언제나 고체의 응고를 억제시킨다. 유체의 온도가 높아지거나 열전도도가 증가하면 응고 과정은 유체의 유동에 의해 더 크게 방해받는다. Stefan 수가 커질수록 순수한 전도에 의한 응고 속도는 빨라지며, 아울러 유체 유동이 미치는 영향도 함께 증대된다. 비정상 상태의 응고 과정은 3 개의 변수 (Ste , θ_R/K_R , α_R) 에 의해 영향을 받지만 최종 평형 상태는 하나의 변수 θ_R/K_R 에 의해 결정된다. Ste 와 α_R 은 최종 평형 상태에 영향을 미치지 않는다. 응고가 진행 중일 때의 고체층의 두께 [$X(\tau)$]와 고체 표면에서의 열유속 [$Q(\tau)$] 사이의 관계를 조사함으로써 특히 Stefan 수가 작을 때에는 두 개의 양 중 어느 하나를 측정함으로써 다른 하나의 양을 근사적으로 정확하게 측정할 수 있음을 보였다.

참 고 문 헌

- [1] Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, Conduction of heat in solids, 2nd ed., pp.282-296, Clarendon Press, Oxford.
- [2] Muehlbauer, J. C. and Sunderland, J. E., 1965, Heat conduction with freezing or melting, App. Mech. Rev., vol.18, pp.951-959.
- [3] Hsieh, C.K., Exact solutions of Stefan problems for a heat front moving at constant velocity in a quasi-steady state. Int. J. Heat Mass Transfer, 1995, 38, 71-79.
- [4] Beaubouef, R. T. and Chapman, A. J., 1967, Freezing of fluids in forced flow, Int. J. Heat and Mass Transfer, vol.10, pp.1581-1587.
- [5] Epstein, M., 1976, The growth and decay of a frozen layer in forced flow, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.19, pp.1281-1288.
- [6] Sparrow, E. M., Patankar, S. V. and Ramadhyani, S., 1977, Analysis of melting in the presence of natural convection in the melt region, J. Heat Transfer, vol.99, pp.520-526.
- [7] Benard, C., Gobin, D. and Zanolli, A., 1986, Moving boundary problem : heat conduction in the solid phase of a phase-change material during melting driven by natural convection in the liquid, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.29, pp.1669-1681.
- [8] Schlichting, H., 1979, Boundary layer theory, 7-th ed., McGraw-Hill, Inc., pp.95-99.
- [9] Yoo, J.-S., 1991, Effect of fluid flow induced by a rotating disk on the freezing of fluid, Int. J. Heat Fluid Flow, vol.12, pp.257-262.
- [10] Yoo, J.-S., 1997, Unsteady heat transfer from a rotating disk with solidification, Numerical Heat Transfer Part A, vol.31, pp.765-781.
- [11] Rangel, R. H. and Bian, X., 1996, The inviscid stagnation-flow solidification problem, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.39, pp.1591-1602.
- [12] Bian, X. and Rangel, R. H., 1996, The viscous stagnation-flow solidification problem, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.39, pp.3581-3594.
- [13] Yoo, J.-S., 1999, Effect of inviscid stagnation flow on the freezing of fluid - a theoretical analysis, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.42, pp.3707-3714.
- [14] Watanabe, T., Kuribayashi, I., Honda, T. and Kanzawa, A., 1992, Deformation and solidification of a droplet on a cold substrate, Chem. Eng. Sci., vol.47, pp.3059-3065.
- [15] Liu, H., Lavernia, E. J. and Rangel, R. H., 1993, Numerical simulation of substrate impact and freezing of droplets in plasma spray processes, J. Phys. D : Appl. Phys., vol.26, pp.1900-1908.