

# 모델의 타당성 평가에 기초한 로바스트 동정에 관한 연구

## A Study on Robust Identification Based on the Validation Evaluation of Model

이 동 철  
D. C. Lee

**Key Words** : Linear Matrix Inequality(선형행렬부등식), Convex Optimization(콘벡스 최적화), Identification in Time Domain(시간영역에서의 동정), Hardy space(하디공간), Interpolation Problem(보간문제), Deterministic Uncertainty(결정론적 불확실)

**Abstract** : In order to design a stable robust controller, nominal model, and the upper bound about the uncertainty which is the error of the model are needed. The problem to estimate the nominal model of controlled system and the upper bound of uncertainty at the same time is called robust identification. When the nominal model of controlled system and the upper bound of uncertainty in relation to robust identification are given, the evaluation of the validity of the model and the upper bound makes it possible to distinguish whether there is a model which explains observation data including disturbance among the model set. This paper suggests a method to identify the uncertainty which removes disturbance and expounds observation data by giving a probable postulation and plural data set to disturbance. It also examines the suggested method through a numerical computation simulation and validates its effectiveness.

### 1. 서 론

시스템의 기능이 수학적으로 표현된 것을 수식 모델이라 하며 실제 시스템 현상의 해석, 예측, 제어, 시뮬레이션 등에 시스템론을 적용하기 위해 그 수식모델을 구축할 필요가 있고, 수식모델을 구하는 것을 시스템동정(system identification)이라 한다. 일반적으로 시스템동정은 실험의 응답에 기초하고 있으므로 운동방정식 등의 이론적인 모델에 의해서도 시스템 특성을 반영한 실제적 모델을 얻는 것이 가능하다.

고전적 시스템 동정법에서는, 시스템의 입출력 데이터로부터 최적 공칭모델을 정하여 모델과 실제 데이터 오차의 원인을 전체 잡음에 귀착시키고 있다. 그러나 제어계설계에 있어서 공칭모델의 불확실성(unmodelled dynamics)을 무시하면 폐루프계가 불안정화 될 우려가 있어, 모델화 오차를 동정시점에서 고려할 수 있는 중요성이 인식되어 왔

다. 강인한 제어는 불확실성을 허용하는 제어이며 시스템동정 분야에 있어서도 강인성에 대한 관심이 고조되고 있다. 강인한 제어를 설계하기 위해 공칭모델과 그 오차인 불확실성에 대한 상계(upper bound)를 동시에 추정하는 문제를 강인한 동정이라 한다.

강인한 동정의 연구와 관련하여 공칭모델과 불확실성의 상계가 주어질 때, 그 타당성을 검증하는 모델 타당성 평가에 관한 연구가 진행되어 왔다.<sup>1)</sup> 이는 모델집합 중에 외란을 포함하는 관측데이터를 설명할 수 있는 모델의 존재여부를 제안한다. 이 방법에서 설명할 수 있는 외란과 불확실성은 주어지는 모델집합으로부터 구하는 것이다. 이와 같이 외란과 불확실성이 존재하지 않으면 주어진 모델집합은 타당하지 않게된다. 또, 적당한 외란과 불확실성에 있어서 관측데이터를 설명할 수 있다고 하더라도 그 모델집합이 타당하다고 말할 수 없다. 실제 어떤 외란이 가해졌는지 모르기 때문에 이 방법에서는 확정적인 외란으로 고려하게 된다. 그러나 확정적인 것이라고 고려하면 동정해야 할 시스템의 출력과 외란을 구별할 수 없으므로 불확

접수일 : 2000년 6월 16일  
이동철 : 부경대학교 전기·제어계측공학부

실성을 적게 예측하여 제어계를 불안정하게 할 우려가 있다. 본 연구에서는, 외란에 확률적인 가정과 복수데이터 셋트를 주어 외란을 제거하고 관측 데이터를 설명할 수 있는 불확실성을 동정하는 방법을 제안한다.

## 2. 모델집합의 표현<sup>2)</sup>

### 2.1 구조화되지 않은 불확실성

불확성의 원인이 전체적으로 분명치 않은 불확실성이나 주파수응답의 결과에 기초한 시뮬레이션과의 차를 불확실하다고 하는 경우 등이 여기에 해당된다. 이 구조화되지 않은 불확실성의 표현에 관한 식은 식(2.1)~(2.3)과 같다.

$$[\text{가법적}] G(z) = M_0(z) + \Delta_a(z) W(z) \quad (2.1)$$

$$[\text{승법적}] G(z) = (I + \Delta_m(z) W(z)) M_0(z) \quad (2.2)$$

$$[\text{기약분해적}] G(z) = \frac{N(z) + \Delta_n(z) W(z)}{D(z) + \Delta_d(z)} \quad (2.3)$$

여기서,  $M_0(z)$ 는 공칭모델,  $\Delta_a(z)$ ,  $\Delta_m(z)$ ,  $\Delta_n(z)$ ,  $\Delta_d(z)$ 는 불확실성을 나타내는 섭동행렬(perturbation matrix)이며, 보통 식(2.4)와 같이 기준화되어 있다.

$$\begin{aligned} \|\Delta_a(z)\|_\infty \leq 1, \quad \|\Delta_m(z)\|_\infty \leq 1, \\ \|\Delta_n(z), \Delta_d(z)\|_\infty \leq 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

또  $W(z)$ 는 불확실성에 대한 주파수 하중함수(weighting function)이다.

### 2.2 파라미터릭한 불확실성

선형 유한차수 시스템은 시간영역에서 식(2.5)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} y(t) = - \sum_{i=1}^n a_i y(t-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(t-i) \\ + \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

여기서,  $\varepsilon(t)$ 는 외란 또는 방정식오차를 나타낸다. 불확실성의 각 계수의 구간은 식(2.6), (2.7)과 같다.

$$\begin{aligned} a_{i0} - \delta_i \leq a_i \leq a_{i0} + \delta_i, \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} b_{i0} - \eta_i \leq b_i \leq b_{i0} + \eta_i, \\ i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.7)$$

여기서,  $a_{i0}$ ,  $b_{i0}$ 는 각 파라미터의 공칭값이며,  $\delta_i$ ,  $\eta_i$ 는 불확실성의 폭이다.

### 2.3 구조화된 불확실성

불확실성의 원인이 어느 정도 특정되어 있고, 시스템 전체와 불확실성의 구조가 확실하게 되어있는 경우이다. 예를 들면 시스템이 어떤 물리정수의 수치에 불확실성이 있는 경우 등이 여기에 해당된다. 이 구조화된 불확실성의 일반적인 표현은 식(2.8), (2.9), (2.10)과 같이 표현된다.

식(2.1), (2.2)의 모델오차가 포함된 시스템은 Fig. 1의 선형분수변환(linear fraction transform, LFT)의 표현은  $\Delta(z)$ 를 블록대각 구조로 일반화한 LFT 표현으로 식(2.8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \Delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

식(2.1), (2.2)는 LFT의 표현으로 식(2.9)와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} G(z) = M_{11}(z) + M_{12}(z) \Delta(z) \\ \cdot (I - M_{22}(z) \Delta(z))^{-1} M_{21}(z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

식(2.9)는 식(2.10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(z) = LFT(M(z), \Delta(z)) \quad (2.10)$$

여기서,

$$M(z) = \begin{bmatrix} M_{11}(z) & M_{12}(z) \\ M_{21}(z) & M_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

식(2.1)의 가법적 불확실성은 식(2.12)와 같이 놓은 경우에 대응된다.

$$M(z) = \begin{bmatrix} G(z) & I \\ W(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$



이 경우  $\Delta$ 의  $z^{-1}$ 에 관한 전개계수는 1회의 데이터 관측치로부터  $l-1$ 차 까지를 관측데이터로 결정하면 그 이상의 고차항  $\{\delta_l, \dots\}$ 에 관하여는 데이터 수가 유한이므로 미지이다.

[정리 3.1]을 이용하여 불확실성의  $\Delta(z)$  중  $\|\Delta(z)\|_\infty$ 를 최소로 하는 보간문제가 반드시 존재하고, 그 최소치를 알 수 있다.

[정리 3.1] Caratheodory-Fejer의 정리

$$\begin{aligned} \min_{g(z) \in H_\infty} & \|a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_l z^{-l} \\ & + z^{-(l+1)} g(z)\|_\infty \\ = & \|a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{l+1} z^{-(l+1)}\|_H \\ = & \bar{\sigma}(A_l) \end{aligned} \quad (3.8)$$

이 정리는,  $l-1$ 차까지의 계수  $(a_0, \dots, a_{l-1})$ 가 기지함수  $a(z)$ 의  $H_\infty$  노음의 하한(lower bound)은 하삼각 Toeplitz행렬(lower triangular Toeplitz matrix)  $A_l$ 의 최대특이치가 된다.

#### 4. 모델의 타당성 평가

##### 4.1 모델의 타당성 평가문제

식(3.1), (3.4), (3.5)에 나타난 모델집합에 대해 입출력 데이터로부터 모델을 평가하는 문제를 나타낸다.

공칭모델  $M_0(z)$ , 불확실성의 집합  $\Delta$ , 외란의 집합  $D$ , 입력 데이터  $u_t$ 와 출력데이터  $y_t (t=0, 1, \dots, l-1)$ 가 주어질 때, 식(3.1)이 만족되도록  $\Delta \in \Delta$ 와  $d \in D$ 의 존재여부의 문제이다.

식 (3.1)을 만족하는  $\Delta \in \Delta$ ,  $d \in D$ 가 존재하지 않는 경우는 그 불확실성을 포함하는 모델은 타당하지 않다(invalidated)고 한다. 모델이 타당하지 않으면 공칭모델  $M_0(z)$ 을 재 구축하거나 또는 불확실함의 집합  $\Delta$ , 외란의 집합  $D$ 를 수정할 필요가 있다.

[정리 3. 1]을 이용하면, 조건을 만족하는  $\Delta(z)$ 가 존재하는 문제에 대해 [정리 4. 1]을 얻을 수 있다.

[정리 4. 1]

주어진 입출력 데이터가  $U = \{u_0, u_1, \dots,$

$u_{l-1}\}$ ,  $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{l-1}\}$ 라고 하자. 이 때,  $\|\Delta(z)\|_\infty < \gamma$ ,  $\|d\|_2 \leq \lambda$ 가 되도록 외란  $d$ 가 존재할 필요충분 조건은 식(4.1)과 같다.

$$(Y-D)^T(Y-D) \leq \gamma^2 U^T U \quad (4.1)$$

여기서,  $U$ 는 입력데이터  $\{u_0, u_1, \dots, u_{l-1}\}$ ,  $Y$ 는 출력데이터  $\{y_0, y_1, \dots, y_{l-1}\}$ ,  $D$ 는 외란  $\{d_0, d_1, \dots, d_{l-1}\}$ 에 대한 하삼각 Toeplitz행렬이다. 또 불확실성의 크기를 나타내는  $\gamma$ 는 식(4.2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma = \bar{\sigma} \left[ (Y-D)(U^T U)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.2)$$

식(4.1)은 변수  $d$ 에 관해 식(4.3), (4.4)와 같이 되는 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality, LMI)<sup>5)</sup>과 등가 이므로 이 모델의 타당성 평가문제는 LMI 문제로 귀착된다.

$$\begin{bmatrix} \gamma U^T U & (Y-D)^T \\ (Y-D) & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda I & D \\ D^T & \lambda \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.4)$$

[증명]

식(4.5)와 같은 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \gamma I & \Delta_l \\ \Delta_l^T & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.5)$$

식(4.5)의 좌변은 식(4.6)과 같이 분해할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \gamma I & \Delta_l \\ \Delta_l^T & \gamma I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{\gamma} \Delta_l^T & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & \gamma I - \frac{1}{\gamma} \Delta_l^T \Delta_l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & \frac{1}{\gamma} \Delta_l \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

식(4.5)와 (4.7)이 준정정(semi-positive definite)인 것은 등가이다. 따라서,

$$\begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & \gamma I - \frac{I}{\gamma} \Delta_i^T \Delta_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.7)$$

식(4.7)에서  $\gamma I \geq 0$ 이므로 식(4.8)과 같이 된다.

$$\gamma^2 I - \Delta_i^T \Delta_i \geq 0 \quad (4.8)$$

$\Delta_i^T \Delta_i = T^T \Lambda T$ ,  $T^T T = I$ 라 두면 식(4.9)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} T^T \Lambda T &\leq \gamma^2 T^T T \\ (\gamma^2 I - \Lambda) &\geq 0 \\ \Lambda^{\frac{1}{2}} &\leq \gamma I \\ \bar{\sigma}(\Lambda^{\frac{1}{2}}) = \bar{\sigma}(\Delta_i) &\leq \gamma \end{aligned} \quad (4.9)$$

그러므로 식(4.5)의 LMI는  $\bar{\sigma}(\Delta_i) \leq \gamma$ 와 등가이다.

#### 4.2 convexity and LMI

LMI는 각 요소가 변수의 선형에 의존하는 행렬에 관한 부등식이다. LMI를 만족하는 변수를 convex optimization 등에 기초하여 수치계산을 효율 높게 구할 수 있다는 것이다<sup>6,7)</sup>.

지금, 행렬  $F(\delta)$ 를 식(4.10), (4.11)과 같이 두면  $F(\delta)$ 는 식(4.12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$F(\delta) = \begin{bmatrix} \gamma I & \Delta_i \\ \Delta_i^T & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.10)$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \delta_0 & & & 0 \\ \delta_1 & \delta_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \delta_{l-1} & \cdots & \delta_1 & \delta_0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\gamma > 0, \quad \delta_i > 0 \quad (i=0, 1, \dots, l-1)$$

$$F(\delta) = F_0 + \delta_0 F_1 + \cdots + \delta_{l-1} F_l > 0 \quad (4.12)$$

단,  $I_2$ 는  $(2l \times 2l)$ 의 단위행렬,  $I_1$ 은  $(l \times l)$ 의 단위행렬이다.

$$I_i = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad i=2, 3, \dots, l-1$$

여기서, 식(4.12)는 LMI의 일반형이며,  $F_0, F_1, \dots, F_l$ 는 대칭행렬이다. 또, 행렬  $F(\delta)$ 는 정정(positive definite)이며, 최소 고유치가 정(positive)인 것을 의미한다. 일반적으로  $F(\delta)$ 의 최소 고유치  $\lambda_{\min}[F(\delta)]$ 는  $\delta$ 의 비선형 함수이므로  $F(\delta) > 0$ 은  $\delta$ 에 대해 선형의 제약조건을 부과하는 것은 아니지만, LMI조건은 효율이 높은 수치계산을 가능하게 하는 주요한 성질을 가진다. 즉,  $F(\delta) > 0$ 은  $\delta$ 에 대해 convex의 제약조건을 부과하는 것이며 식(4.13)은 convex 집합이다.

$$F \triangleq \{ \delta : F(\delta) > 0 \} \quad (4.13)$$

[증명]

$\delta = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}]$ 라 두자. 임의의  $\delta^1 \in R^l$ ,  $\delta^2 \in R^l$ 에 대해  $F(\delta^1), F(\delta^2)$ 를 구성한다.

$$\begin{aligned} F(\delta^1) &= F_0 + \delta_0^1 F_1 + \delta_1^1 F_2 + \cdots + \delta_{l-1}^1 F_l \\ &= F_0 + \delta^1 f > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\delta^2) &= F_0 + \delta_0^2 F_1 + \delta_1^2 F_2 + \cdots + \delta_{l-1}^2 F_l \\ &= F_0 + \delta^2 f > 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} F(\alpha \delta^1 + (1-\alpha)\delta^2) &= F_0 + (\alpha \delta_0^1 + (1-\alpha)\delta_0^2) F_1 + \cdots \\ &\quad + (\alpha \delta_{l-1}^1 + (1-\alpha)\delta_{l-1}^2) F_l \\ &= \alpha F(\delta^1) + (1-\alpha)F(\delta^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

여기서,  $0 < \alpha < 1$ 이면, 식(4.15)와 같다.

$$\begin{aligned} F(\alpha \delta^1 + (1-\alpha)\delta^2) &= \alpha F(\delta^1) + (1-\alpha)F(\delta^2) > 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

#### 4.3 robustness and trade off

앞 절에서는 관측된 입출력 데이터에 주어지는 공칭모델 및 외란의 상계의 타당성 여부를 평가하는 방법에 대해 논하였다. 앞 절의 방법은 convex의 최

적화를 LMI에 귀착시켜 해결할 수 있다. Fig. 3은 LMI에 의해 불확실성의 크기  $\gamma$ 를 변화시켰을 때 외란의 크기  $\lambda$ 의 최소치를 구한 불확실성의 크기와 외란의 관계를 나타낸 것이며 이를  $\gamma$ 와  $\lambda$ 의 trade off곡선이라고 한다.

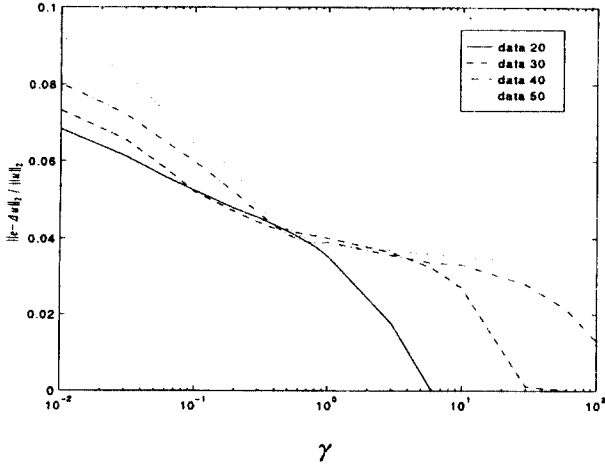


Fig. 3 Trade off curve of uncertainty and disturbance

Fig. 3의 종축은  $\min_{\Delta} \frac{\|e - \Delta u\|_2}{\|u\|_2}$ , 횡축은 불확실성의 크기  $\gamma$ 를 나타낸다. Fig. 3에서 불확실성의 크기  $\gamma$ 를 크게하면 외란의 크기  $\lambda$ 까지를 불확실함이라고 간주했다. 또 불확실성의 크기  $\gamma$ 를 적게하면 불확실성이 외란으로 간주됨을 알 수 있다. 그러므로 불확실성의 집합  $\Delta$ , 외란의 집합  $D$ 를 크게하든가 또는 한쪽의 집합은 고정하고, 다른쪽의 집합을 크게하면 관측데이터를 설명할 수 있다. 결국 모델의 타당성 평가에서는 불확실성과 외란을 일의적으로 결정할 수 없다고 하는 문제점이 있다.

### 5. 불확실성의 동정

#### 5.1 확률적 가정의 도입

식(3.1)에서 식(5.1)의 관계가 성립된다.

$$y_t - M_0(z) u_t = \Delta_a(z) u_t + d_t \quad (5.1)$$

입출력 데이터  $u_t, y_t$  및 공칭모델  $M_0(z)$ 는 주어져 있으므로  $e_t = y_t - M_0(z) u_t$ 는 기지의 량이며 식(5.1)은 식(5.2)와 같이 된다.

$$e_t = \Delta_a(z) u_t + d_t \quad (5.2)$$

여기서,  $\Delta_a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i z^{-i}$ 라 하고  $l$ 개의 데이터에 대해 식(5.3)과 같이 정의한다.

$$e = D_l u + d \quad (5.3)$$

단,

$$e = [e_0, e_1, \dots, e_{l-1}]^T \quad (5.4)$$

$$u = [u_0, u_1, \dots, u_{l-1}]^T \quad (5.5)$$

$$d = [d_0, d_1, \dots, d_{l-1}]^T \quad (5.6)$$

$D_l$ 는  $\delta = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}]$ 에 대해 하삼각 Toeplitz행렬이며 식(5.7)과 같다

$$D_l = \begin{bmatrix} \delta_0 & & & 0 \\ \delta_1 & \delta_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \delta_{l-1} & \dots & \delta_1 & \delta_0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

외란의 기대치가 0인 확률적 가정을 이용하기 위해 식(5.8)과 같은 벡터를 정의한다.

$$i^T = [I_0 \ I_1 \ \dots \ I_{l-1}] \quad (5.8)$$

식(5.8)을 식(5.3)의 양변에 곱하면 식(5.9)와 같이 된다.

$$i^T e = i^T D_l u + i^T d$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} e_i = u^T \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & \\ 1 & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \delta + \sum_{i=0}^{l-1} d_i \quad (5.9)$$

식(5.9)의 양변을 데이터 수  $l$ 로 나누면 식(5.10)과 같다.

$$\frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} e_i = \frac{1}{l} u^T \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & \\ 1 & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \delta + \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} d_i \quad (5.10)$$

여기서, 외란의 기대치가 0인 가정을 이용하면

식(5.10)의 우변의 제2항은 식(5.11)과 같이 된다.

$$\frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} d_i \approx 0 \quad (5.11)$$

따라서 식(5.10)은 식(5.12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$u^T \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & \\ 1 & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \delta \approx \sum_{i=0}^{l-1} e_i \quad (5.12)$$

여기서, 식(5.12)의 우변을 식(5.13)과 같이 두면 식(5.14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=0}^{l-1} e_i = b \quad (5.13)$$

$$u^T \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & \\ 1 & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \delta = b \quad (5.14)$$

### 5.2 복수 데이터의 셋트 도입

식(5.14)에서 복수 데이터 셋트를 이용하여 불확실성의 계수  $\delta$ 를 구할 수 있다.

여기서,  $l$ 개의 입력 데이터  $m$ 셋트를 이용하면 식(5.15)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} u^{1T} \\ u^{2T} \\ \vdots \\ u^{mT} \end{bmatrix}_{l-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & \\ 1 & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} \delta = b \quad (5.15)$$

단,

$$u^{iT} = [u_0^i, u_1^i, \dots, u_{l-1}^i] \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$b = [b^1, b^2, \dots, b^m]^T \text{ 이다.}$$

그러므로  $\hat{\delta}$ 는 식(5.16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & \\ 1 & -1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{1T} \\ u^{2T} \\ \vdots \\ u^{mT} \end{bmatrix}_{l-1}^+ \cdot b \quad (5.16)$$

$l$ 개의 불확실성의 계수  $\hat{\delta} = [\hat{\delta}_0, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_{l-1}]^T$ 를 구할 수 있다.

여기서,  $[\cdot]^+$ 는 행렬  $[\cdot]$ 의 Moore-Penrose의 의사역행렬(pseudo inverse matrix)을 나타낸다.

또, 식(5.16)에서 구한  $\hat{\delta}$ 를 식(5.3)에 대입하면 식(5.17)이 되어 외란을 구할 수 있다.

$$\hat{d} = e - \hat{D}_l \cdot u \quad (5.17)$$

단,  $\hat{D}_l$ 은  $\hat{\delta}$ 에 대한 하삼각 Toeplitz행렬이다.

## 6. 시뮬레이션

### 6.1 불확실성의 동정

앞 장에서 제안한 불확실성의 동정은 수치계산 예를 통해 검토를 행하기로 한다. 동정대상은 다음과 같은 8차 유리전달함수로 나타냈다.

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$D(z) = 1 - 2.2958z^{-1} + 3.2273z^{-2} - 2.9640z^{-3} + 1.8971z^{-4} - 0.8315z^{-5} + 0.1470z^{-6} + 0.0207z^{-7} - 0.0069z^{-8}$$

$$N(z) = 1 - 1.3282z^{-1} + 0.0977z^{-2} + 0.3246z^{-3} + 0.2110z^{-4} - 0.3551z^{-5} + 0.1513z^{-6} - 0.0272z^{-7} + 0.0018z^{-8}$$

시스템의 입력데이터  $u_t$ 는  $[-5, 5]$ 의 값을 취하는 일양난수에 의해 결정된다.  $G(z)$ 에  $u_t$ 를 입력한 출력에 평균 0, 분산  $0.01^2$ 의 정규난수를 가하여 시스템의 출력데이터를  $y_t$ 로 했다. 이 입출력데이터 ( $u_t, y_t$ )는 3000개, 최소자승법(식오차법)(Matlab-System Identification-Toolbox)<sup>(8-13)</sup>을 이용하여 4차의 공칭모델  $M_0(z)$ 를 추정했다. Fig. 4, Fig. 5는 데이터 수  $l=60$ , 셋트 수  $m=1000$ 으로 했을 때의 경우, 불확실성의 임펄스 응답과 주파수응답이다. Fig. 5에서 실제 불확실성의 크기는  $\gamma_{true} = 0.1870$ , 제안법으로 구한 불확실성의 크기는  $\gamma_{pro} = 0.1858$ 이다. 이들의 수치계산에 보다 제안법의 유효성이 확인되었다.

6.2 불확실성을 고려한 제어기설계

앞 절에서 구한 불확실성의 동정을 이용하여 외란을 억제하는 제어기 설계를 행한다. 앞 절에서 구한 불확실성에 의한 오차상계의 하중함수를 다음의 2차모델로 근사시켰다.

$$W_a(z) = \frac{0.1832 - 0.2843z^{-1} + 0.1198z^{-2}}{1.0000 - 0.6324z^{-1} + 0.3222z^{-2}}$$

또 성능방법의 하중함수는 다음의 1차모델로 했다.

$$W_a(z) = \frac{0.5386 - 0.5196z^{-1}}{1.0000 + 0.8942z^{-1}}$$

강인한 동정에 의한 최적해는 Matlab-Toolbox의 다변수함수 최소화 함수의 심플렉스법(simplex method)을 이용했다.

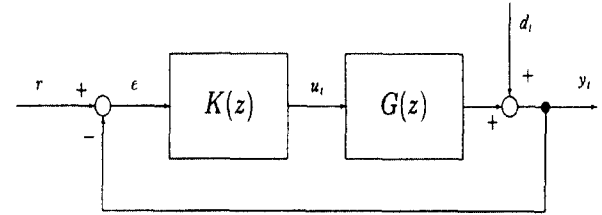


Fig. 6 Control system

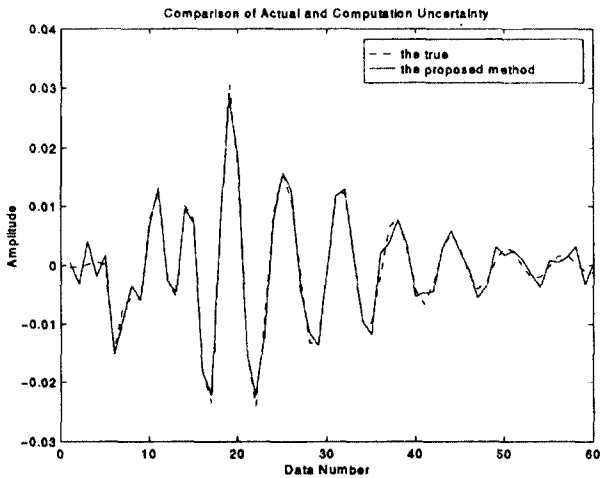


Fig. 4 Impulse response of uncertainty(Nominal model case of 4th)

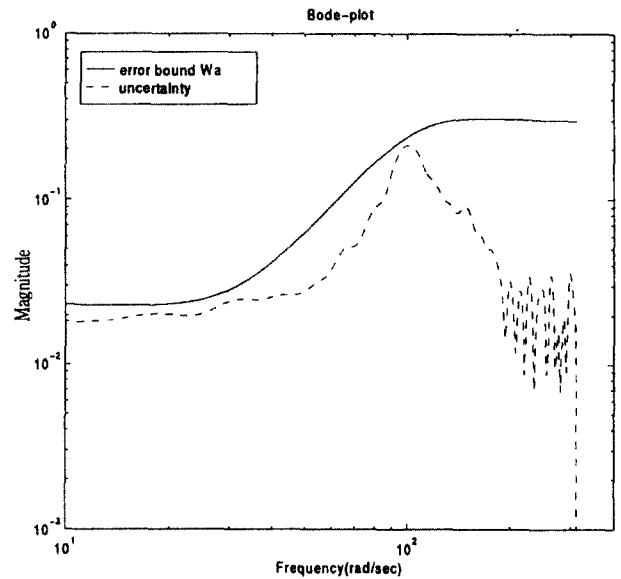


Fig. 7 Uncertainty and error bound(frequency characteristic)

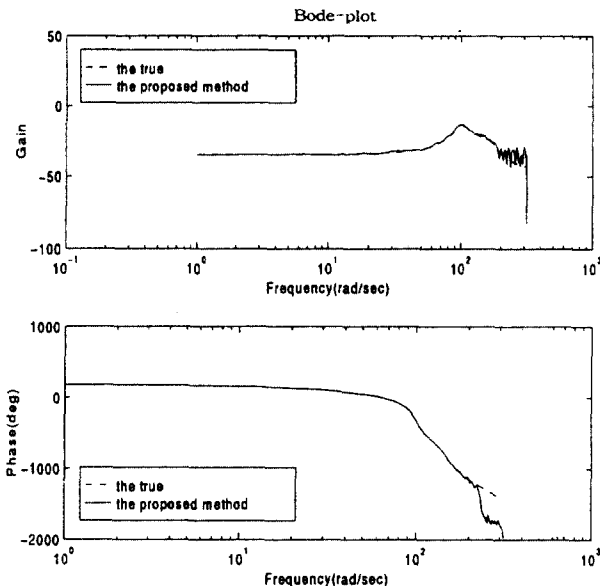


Fig. 5 Bode-plot of uncertainty(Nominal model case of 4th)

제어기  $K(z)$ 는 다음과 같이 7차로 나타냈다.

$$K(z) = \frac{N_k(z)}{D_k(z)}$$

$$N_k(z) = 2.8277 - 1.9407z^{-1} + 2.2559z^{-2} + 1.5097z^{-3} - 1.5787z^{-4} + 2.4546z^{-5} - 1.0353z^{-6} + 0.4461z^{-7}$$

$$D_k(z) = 1.0000 - 1.3237z^{-1} - 0.3967z^{-2} + 1.3852z^{-3} - 0.7569z^{-4} + 0.0018z^{-5} + 0.1613z^{-6} - 0.0567z^{-7}$$

Fig. 7은 앞 절에서 제안한 방법으로 구한 불확실함의 이득선도에 의한 오차상계를 나타내는 하중



함수를 근사시킨 것이다. Fig. 8은 공칭모델  $M_0$ , 오차상계의 하중함수  $W_a$ , 감도함수  $S(y_t/d_t)$ , 성능방법의 하중함수  $W_d$ 를 나타낸다. Fig. 8에서  $\omega_d = 358[\text{rad/sec}]$ 이하의 주파수 대역에서는 외란의 영향이 억제되며 제어될 수 있음을 알 수 있다.

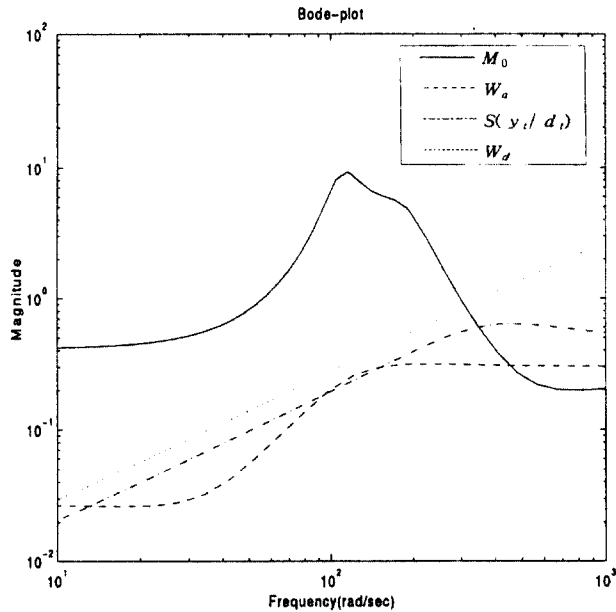


Fig. 8 Frequency characteristic of control system

### 7. 결론

본 연구에서는, 모델의 타당성 평가에 기초한 강인한 동정에 대해 언급했다. 외란과 불확실성의 trade off, 하나의 사전정보를 주는데 따라 불확실성과 외란을 분리하여 불확실성을 동정하는 방법을 제안했다. 이 제안법은 확률적 외란의 기대치가 0이라는 사전정보와 복수데이터 셋트를 이용하여 불확실성을 동정하는 것이다. 그러나, 오차출력(불확실성+외란)에 대한 외란의 SN비가 클 경우, 결국 불확실성의 크기 보다 큰 외란이 있는 경우가 불확실성을 동정하는 것이 곤란함을 알 수 있었다.

또한 불확실성을 이용하여 오차상계의 하중함수를 선정하고 외란억제를 목적으로 제어시스템이 안정되도록 제어기  $K$ 를 설계하여 제안방법의 유효성을 확인할 수 있었다.

### 참고문헌

1. Kameshwar poolla and Pramod Khargonekar,

"A Time-Domain Approach to Model Validation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-39, No. 5, pp. 951~959, 1994

2. H. Kimura, "Robust Stabilizability for a Class of Transfer Function," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29, pp. 788~793, 1984

3. 木村英記, "ハーディ空間における補間極値問題とシステム理論", *計測と制御*, Vol. 24, No. 7, pp. 605~614, 1985

4. I. D. Landau, *System Identification and Control Design*, Prentice-Hall, Inc., 1990

5. S. Boyd, et al, *Linear Matrix Inequalities in System and control Theory*, SIAM, 1994

6. M. Athans, P. L. Flab, *Optimal Control*, Mcgraw-Hill, pp. 69~73, 1966

7. 黒木, 今井, 和田, "時間領域における不確かさを含むモデルの妥当性評価について", 第26回制御理論シンポジウム資料, 1997

8. P. Ghainet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox for Use with Matlab.*, Math Work. Inc. 1995

9. U. Grenander and G. Szego, *Toeplitz Forms and its Application*, Univ. California Press, 1958

10. Munter A. Dahleh and J. Boyd Pearson, " $l^1$ -Optimal Feedback Controllers for MIMO Dicrete-Time Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-32, No. 4, pp. 314~322, 1987

11. A. J. Helmicki, C. A. Jacobson, C. N. Nett, "Control-Oriented System Identification: A Worst-Case / Deterministic Approach in  $H_\infty$ ," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-39, No. 10, pp.1163~1176, 1991

12. I. Masubuchi, A. Ohara & N. Suda, "A Unified Synthesis Method of Controllers that satisfy LMI-Conditions," *JSICE*, Vol. 31, No. 10, pp. 1586~1594, 1995

13. T. Uchiyama, J. Imai, K. Wada, "A Study on Robust Identification in the Presence of Noise," *JSICE*, Vol. 43, No. 10, pp. 1374~1379, 1998

14. 細江, 荒木, *制御系設計*, 朝倉書店, 1994