

## 2차 모멘트 난류모형에 의한 회전하는 평행 평판유동 해석

신 종 근\* · 최 영 돈\*\*

(1999년 9월 29일 접수)

### Numerical Simulation of Rotating Channel Flows Using a Second Moment Turbulence Closure

Jong-Keun Shin and Young-Don Choi

**Key Words:** Rotating Flow(회전유동), Second Moment Turbulence Closure(2차 모멘트 난류모형) Coriolis Force(코리올리 힘), Rotation Number(회전수)

#### Abstract

A low-Reynolds-number second moment turbulence closure is improved with the aid of DNS data. For the model coefficients of pressure-strain terms, we adopted Shima's model with some modification. Shin and Choi's new dissipation-rate equation is employed to simulate accurately the turbulence energy dissipation rate distribution in the near wall sublayer. The results of computations are compared with DNS, LES data and experimental data for turbulent plane channel flow with rotation about spanwise axis. The present second moment closure achieves a level of agreement similar to that for the non-rotating. In particular, it accurately captures the distribution of turbulence energy dissipation rate in the near wall region.

#### 기호설명

- |   |  |
|---|--|
| <p><math>A</math> : 레이놀즈응력의 불변항,<br/> <math>1 - 9(A_2 - A_3)/8</math></p> <p><math>A_2</math> : 레이놀즈응력의 2차 불변항, <math>a_{ij}a_{ji}</math></p> <p><math>A_3</math> : 레이놀즈응력의 3차 불변항, <math>a_{ij}a_{jk}a_{ki}</math></p> <p><math>a_{ij}</math> : 레이놀즈응력의 비등방성 텐서,<br/> <math>\overline{u_i u_j} / k - 2\delta_{ij}/3</math></p> <p><math>d_{ij}</math> : <math>\overline{u_i u_j}</math>의 확산율, <math>d_{ij}^p + d_{ij}^t + d_{ij}^v</math></p> <p><math>d_{ij}^p</math> : <math>\overline{u_i u_j}</math>의 압력확산율</p> <p><math>d_{ij}^t</math> : <math>\overline{u_i u_j}</math>의 난류확산율</p> <p><math>d_{ij}^v</math> : <math>\overline{u_i u_j}</math>의 점성확산율</p> <p><math>D</math> : 평판의 높이</p> | <p><math>F_{ij}</math> : 회전에 의한 <math>\overline{u_i u_j}</math>의 생성률</p> <p><math>k</math> : 난류운동에너지</p> <p><math>n</math> : 벽에 수직한 단위벡터</p> <p><math>p</math> : 요동압력</p> <p><math>P</math> : 정압</p> <p><math>P^*</math> : 변형된 압력, <math>P - \rho\Omega^2 r^2/2</math></p> <p><math>P_k</math> : 난류운동에너지 생성률</p> <p><math>P_\epsilon^1, P_\epsilon^2, P_\epsilon^3, P_\epsilon^4</math> : 소멸률 방정식의 생성률</p> <p><math>P_{ij}</math> : 레이놀즈응력 생성률</p> <p><math>r</math> : 반경</p> <p><math>Re</math> : 평균속도에 의한 레이놀즈수, <math>U_m D / \nu</math></p> <p><math>Re_r</math> : 벽마찰 속도에 의한 레이놀즈수,<br/> <math>U_\tau D / 2\nu</math></p> <p><math>Ro</math> : 회전수, <math>\Omega D / U_m</math></p> <p><math>R_t</math> : 난류레이놀즈수, <math>k^2 / (\nu\epsilon)</math></p> <p><math>T_\epsilon</math> : 소멸률 방정식의 난류수송률</p> |
|---|--|

\* 회원, 동해대학 자동차서비스과

E-mail : Autoservice@netsgo.com

TEL : (0394)521-9900(교 529)

\*\* 회원, 고려대학교 기계공학과

- $u_i$  : 난류속도 성분
- $u_i'$  :  $u_i$ 의 rms 속도
- $U_i$  : 평균속도 성분
- $U_\tau$  : 벽마찰속도,  $\sqrt{\tau_w/\rho}$
- $U^+$  : 무차원 평균속도,  $U/U_\tau$
- $U_m$  : Bulk 평균속도
- $\overline{u_i u_j}$  : 레이놀즈응력
- $x_i$  : 직교좌표
- $x_n$  : 벽면으로부터의 수직거리
- $y$  : 벽에 수직한 방향좌표
- $y^+$  : 벽면으로부터의 무차원거리,  $yU_\tau/\nu$
- $\epsilon$  : 난류운동에너지 소멸률
- $\epsilon_{ij}$  :  $\overline{u_i u_j}$ 의 소멸률
- $\epsilon_{ijk}$  : Levi-Civita 기호
- $\nu$  : 동점성계수
- $\Pi_\epsilon$  : 소멸률 방정식의 압력확산율
- $\rho$  : 유체의 밀도
- $\tau_w$  : 벽면 전단응력
- $\Gamma$  : 소멸률 방정식의 소멸률
- $\Phi_{ij}$  :  $\overline{u_i u_j}$ 의 압력변형률
- $\Phi_{ij}^n$  :  $\Phi_{ij}$ 의 난류부분, 저속항
- $\Phi_{ij}^r$  :  $\Phi_{ij}$ 의 평균변형부분, 고속항
- $\Phi_{ij}^{rn}$  :  $\Phi_{ij}^n$ 의 벽 반사항
- $\Phi_{ij}^{rr}$  :  $\Phi_{ij}^r$ 의 벽 반사항
- $\Omega$  : 각속도
- $\Omega_i$  : 각속도 벡터

하첨자

- $w$  : 벽면값
- $o$  : 회전이 없을 때의 값
- 1, 2 : 유동방향과 벽면에 수직한 성분들의 값

1. 서 론

최근 난류유동 해석을 위해서는 LES(Large Eddy Simulation)나 DNS(Direct Numerical Simulation)가 가장 각광 받는 해석기법으로 등장하고 있으나, 실제 공학적인 문제 해결에 있어서는 아

직도 통계적 난류모형에 의한 방법(와점성계수 모형, 2차 모멘트모형 등)이 실용적이라고 할 수 있다. 그러나 회전하는 유동장에 대해서 와점성계수 모형은 코리올리 힘에 의한 정확한 유동특성을 나타내지 못하는 것으로 알려져 있다. 따라서 현재는 벽면까지 하나의 난류모형으로 해석이 가능한 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형에 의한 방법이 실제 공학적인 유체기계 내의 유동을 해석할 수 있는 수단이 된다. 이러한 이유로 현재까지 난류유동에 대한 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형들이 많이 개발되어 왔다.

현재까지의 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형에 관한 연구는 주로 비선형 압력-변형률 관계식을 적용하는데 관한 연구이다. Lumley<sup>(1)</sup>는 압력-변형률 항의 저속항(slow term)에 대한 비선형 모형을 제안하였고, Sarkar와 Speziale<sup>(2)</sup>는 비선형 항의 모형상수를 결정하기 위한 이론을 제시하였다. 고속항(rapid term)에 대한 연구로는 Speziale, Gatski와 Sarkar,<sup>(3)</sup> Launder와 Tselepidakis<sup>(4)</sup> 신과 최<sup>(5)</sup> 등이 비선형 모형의 도입에 관한 연구를 하였다. 이들의 연구는 뛰어난 이론적 배경을 가지고 있으며 단순한 실제 유동장에서는 비교적 타당성이 있는 해를 제시해주고 있으나, 그 모형의 형태가 너무 복잡하여 실제 복잡한 형상을 갖는 3차원 유동장에 대한 적용 가능성은 크게 떨어져 있는 게 사실이다. 따라서 난류모형들을 유체기계 내의 유동해석에 적용하려면 우선 회전하는 단순 유동장에서의 검증이 필요하다.

코리올리 힘(Coriolis force)의 작용은 평균 운동량방정식을 통해 벽면 인접부에서 발생하는 2차 유동의 세기를 주유동의 세기와 같은 정도로 야기시키며, 난류요동(turbulent fluctuation) 자체에 대해서도 상당한 영향을 미친다. 실제 공학적인 유동에서 이러한 두 가지 효과들은 항상 동시에 수반되기 때문에 그 해석을 어렵게 하고 있다. 따라서, 현재 제시되어 있는 모형들을 이용해서 가능하면 코리올리 힘이 유동방정식에는 직접적인 영향을 주지 않고, 단지 난류구조(turbulence structure) 자체에만 영향을 미치도록 고안할 필요가 있다. 이를 위해서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 벽에 평행한 축에 대해서 유동방향에 직각으로 회전하는 무한 평행평판 사이의 유동을 해석함으로써 이루어질 수 있다. 그림과 같이 회전이 있는 경우 코리올리 힘은 흡인축(suction side) 유

동은 안정화(stable)시키고, 반대로 압력측(pressure side) 유동을 불안정화(unstable)시키는 경향이 있다. 회전하는 평판 난류유동에 대한 수치해석 연구로는 DNS를 사용한 Andersson과 Kristoffersen<sup>(6)</sup> (이하 AK), LES를 사용한 Piomelli와 Liu<sup>(7)</sup>(이하 PL), Tafti와 Vanka,<sup>(8)</sup> Kim<sup>(9)</sup> 등이 있고, 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 적용한 연구로는 Launder와 Tselepidakis<sup>(10)</sup>(이하 LT), Shima<sup>(11,12)</sup> 등이 있다. LT<sup>(10)</sup>의 모형은 AK<sup>(6)</sup>의 DNS자료와 아주 잘 일치하는 결과를 보여주고 있지만 낮은 회전수에 대한 해석 결과만을 제시해 주고 있기 때문에 보다 넓은 범위의 회전수에 대해서도 적용 가능한지에 대해서는 명확히 알려져 있지 않다. 이에 반해 Shima<sup>(11,12)</sup>모형은 비교적 단순모형이지만 고 레이놀즈수 및 고 회전수에 대한 해석 예를 보여 주고 있어 현재 가장 일반성이 뛰어난 모형으로 생각되어 진다.

따라서 본 연구에서는 현재까지 제안된 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형 중에서 가장 단순하면서도 비교적 정확한 해를 제시해 주고 있는 즉, 실용성이 있는 Shima 모형을 이론적인 측면에서 보완하고 수정하여 비교적 높은 회전수로 회전하는 난류유동장의 유동특성을 타당성 있게 예측할 수 있는 난류모형을 제시하고자 한다.

2. 수학적모형

Fig. 1과 같이 회전하는 무한 평행평판 유동장 내에서 완전 발달된 유동을 고려하면, 유동방향의 평균 운동량방정식은 다음과 같이 된다.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP^*}{dx_1} - \frac{d}{dx_2} \overline{u_1 u_2} + \nu \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} \quad (1)$$

여기서  $P^* = P - \rho \Omega^2 r^2 / 2$ 이고,  $r$ 은 회전축으로부터 유동장 내부의 임의점까지의 반경방향 거리이다. 변형된 압력구배  $P^*$ 는 유동장 전체에서 균일(uniform)하기 때문에, 전체 전단응력은 비회전 유동과 같이 유동장내에서 선형적으로 변한다. 또한, 식 (1)은 층류유동에 대해서는 주유동 속도 분포가 정지된 평판유동에서와 같게될 것이라는 것을 알 수 있지만, 난류유동의 경우에는 난류요동에 작용하는 코리올리 힘에 의해 그 속도분포

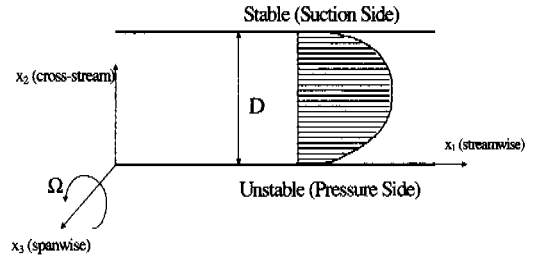


Fig. 1 Rotating channel flow

가 다르게 된다는 것을 보여준다.

한편, 식 (1)의 해석을 위해 필요한 평균화된 레이놀즈응력 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \left\{ \frac{\overline{u_i u_k} \partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\} \\ & \frac{C_{ij}}{P_{ij}} \\ & - 2 \Omega_k \frac{\overline{u_j u_m \epsilon_{ikm}} + \overline{u_i u_m \epsilon_{jkm}}}{F_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right\} \\ & \frac{d_{ij}^t}{d_{ij}^p} \\ & - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \delta_{jk} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} \right\} \\ & + \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right\} - 2 \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \\ & \frac{\Phi_{ij}}{\epsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에 의하면, 평판벽에 수직한 주응력 성분 ( $\overline{u_2^2}$ )에 대해 코리올리 힘의 성분  $F_{22}$ 는  $-4 \Omega \overline{u_1 u_2}$ 가 된다. 또한, Fig. 1의 좌표계에서 전단응력  $\overline{u_1 u_2}$ 는 압력측(pressure side)에 접근하면 음(negative)의 값이 되므로, 이 과정은  $\overline{u_2^2}$ 를 증가시키는 역할을 한다. 따라서, 흡인측(suction side)에서 양의 값을 갖는  $\overline{u_1 u_2}$ 는  $\overline{u_2^2}$ 를 감소시키는 요인이 된다. 주 유동방향의 성분( $\overline{u_1^2}$ )에 대해서 코리올리 힘의 성분  $F_{11}$ 은  $F_{22}$ 와 비교하면 그 크기는 같지만 방향은 반대이다. 그러나, 평균

유동장은 벽에 수직한 방향( $x_2$ )의 요동 성분들에 의해서만 강하게 영향을 받기 때문에,  $F_{22}$ 의 효과가  $F_{11}$ 의 효과보다 클 것이라는 기대를 할 수 있다. 한편,  $F_{33}=0$ 이므로,  $F_{kk}=0$ 이다. 이는 와 점성계수 모형에서는 레이놀즈응력 방정식 대신 난류운동에너지 방정식만을 해석하기 때문에 전체 유동장에 코리올리 효과를 반영할 수 없는 이유가 된다.

식 (2)에서 모형화가 필요한 항은 이미 잘 알려져 있는 바와 같이 압력-변형률항  $\Phi_{ij}$ , 소멸항  $\epsilon_{ij}$ , 확산항  $d_{ij}(\equiv d_{ij}'' + d_{ij}' + d_{ij}''')$  등이다. 이 모형화 과정에서 특이한 것은 압력측(pressure side), 즉 불안정(unstable) 부분의 불균일 유동(inhomogeneous flow)을 고려하기 위하여 "평균변형(mean-strain)" 항  $\Phi_{i2}$ 을 다음과 같이 수정하였다. 일반적으로  $\Phi_{i2}$ 항은 평균변형 유동장을 준균일유동(quasi-homogeneous)으로 가정하여

$$\Phi_{i2} = \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_m} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{dVol}{|\mathcal{V}|} \quad (3)$$

로 나타내며, 텐서 형식으로는 다음과 같이 표시한다.

$$\Phi_{i2} = (a_{ij}^{mi} + a_{ij}^{mj}) \frac{\partial U_1}{\partial x_m} \quad (4)$$

식 (3)에서 프라임(')은  $\Phi_{i2}$ 가 고려되는 곳으로부터 거리  $|\mathcal{V}|$ 되는 곳에 분포되어 있는 값들을 나타낸다. 실제 난류모형화 과정에서 식 (4)의 4차위 텐서  $a_{ij}^{mi}$ 는 비등방 레이놀즈응력  $a_{ij}$ 항으로 모형화 된다. 유동장에 회전이 있는 경우에는 이 효과를 고려하기 위하여  $\Phi_{i2}$ 항은 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$\Phi_{i2} = (a_{ij}^{mi} + a_{ij}^{mj}) \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_m} + \Omega_p \epsilon_{ijm} \right) \quad (5)$$

따라서 식 (5)로부터  $\Phi_{i2}$ 의 모형에  $F_{ij}$ 를 포함하는, 즉 코리올리 효과를 고려하여 표현할 필요가 있는 것이다. 또한, 본 연구에서는 식 (5)에서

평균변형률  $\partial U_1 / \partial x_m$ 을 압력측(pressure side)의 벽면 인접부에서 매우 강한 불균일 유동을 예측해 내기 위해  $LI^{(10)}$ 가 적용했던 모형을 다음과 같이 수정하여 회전유동장의 불안정(unstable) 부분에서만 적용하도록 하였다.

$$\left( \frac{\partial U_1}{\partial x_m} \right)_{eff} = \min \left[ \frac{\partial U_1}{\partial x_m}, \frac{\partial U_1}{\partial x_m} + C_I L \frac{\partial L}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_m \partial x_k} \right] \quad (6)$$

윗 식에서  $C_I = \min[0.6Ro^{1/2}, 0.2]$ 으로 사용하였고,  $L = k(\overline{u_p u_q n_p n_q})^{1/2} / \epsilon$ 을 의미한다. 식 (6)을 완전 발달한 단층 2차원 유동장에서 고려하면  $\partial U_1 / \partial x_2$ 가 양의 값을 갖는 부분에서만 불균일 수정이 이루어지게 된다.

레이놀즈응력 방정식 모형의 정확성에 큰 영향을 주는 것의 하나는 레이놀즈응력 소멸률  $\epsilon_{ij}$  모형이다. Shima<sup>(11)</sup>는 Kim 등<sup>(13)</sup>의 DNS자료를 근거로 하여 레이놀즈응력 소멸률  $\epsilon_{ij}$ 의 분포가  $\epsilon_{ij} = (\epsilon/k) \overline{u_i u_j}$  형태에 가깝다는 것을 이용하여 소멸률 모형으로  $\epsilon_{ij} = (2/3)\delta_{ij}\epsilon$ 을 사용하였다. 그러나 이 모형은 Launder와 Tselepidakis<sup>(4)</sup>가 제안한 벽면극한조건을 만족시키지 않기 때문에 본 연구에서는 다음과 같은 모형을 적용하였다.

$$\epsilon_{ij} = f_\epsilon \epsilon_{ij}^* + \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (7)$$

여기서

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{\epsilon}{k} \{ \overline{u_i u_k n_k n_k} + \overline{u_j u_k n_k n_k} + \overline{u_k u_k n_k n_k} \} \quad (8)$$

이다. Table 1은 본 연구에서 개선한 모형을 나타낸다.

한편, 난류운동에너지 소멸률  $\epsilon$  방정식은 2-방정식 모형과 2차 모멘트 모형 모두에서 난류의 길이척도에 관한 관계식으로 반드시 해석되어야 하는 식이다.  $\epsilon$  방정식 모형은 신과 최<sup>(14)</sup>(이하 SC)에 의해서 개발된 저레이놀즈수 다중 생성물 모형을 본 연구의 레이놀즈응력 방정식 모형과 조화되도록 수정하였다. Table 2는 수정된  $\epsilon$  방정식 모형을 나타낸다.

**Table 1** Present improved low Reynolds number turbulence closure

Process	Closure
$\Phi_{ij}$	$\Phi_{ij1} + \Phi_{ij2} + \Phi_{ij1}^w + \Phi_{ij2}^w$
$\Phi_{ij1}$	$-C_1 \epsilon a_{ij}$
$\Phi_{ij2}$	$-C_2 \left( P_{ij} + \frac{1}{2} F_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right)$
$\Phi_{ij1}^w$	$C_1^w \frac{\epsilon}{k} \left( \overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_j} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_i} \right) f \left( \frac{l}{n_k \Gamma_k} \right)$
$\Phi_{ij2}^w$	$C_2^w \left( \phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki2} n_k n_i \right) f \left( \frac{l}{n_k \Gamma_k} \right)$
$\epsilon_{ij}$	$f_\epsilon \epsilon_{ij}^* + \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon$
$\epsilon_{ij}^*$	$\frac{\epsilon}{k} \{ \overline{u_i u_k n_k n_j} + \overline{u_j u_k n_k n_i} + \overline{u_k u_i n_k n_j} \}$
$d_{ij}^t$	$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right)$
$d_{ij}^p$	$-\frac{1}{3} (d_{ik}^v n_k n_j + d_{jk}^v n_k n_i) + \frac{1}{3} \delta_{ij} d_{kl}^v n_k n_l$

where;

$$C_1 = 1 + 2.58 A A_2^{\frac{1}{4}} [1 - \exp(- (0.0067 R_t)^2)]$$

$$C_2 = 0.75 A^{\frac{1}{2}}$$

$$C_1^w = \left( -\frac{2}{3} C_1 + 1.67 \right) / \max [f_1^w, 0.005]$$

$$C_2^w = \max \left[ \frac{2}{3} (C_2 - 1) + 0.5, 0 \right] / C_2$$

$$f_1^w = 1 - \exp[- (R_t/15)^2],$$

$$f \left( \frac{l}{n_k \Gamma_k} \right) = \frac{k^{1.5}}{2 c_l \epsilon x_n} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{47.4}{R_t}} \right)$$

$$c_l = 2.5, \quad f_\epsilon = \exp[- (R_t/70)^2]$$

$$C_s = 0.4 / \{1 + \exp[- (R_t/65)^2]\}$$

수정된 생성항에는 새로운 무차원거리  $y_\epsilon^+$ 를 도입하였는데, 이는 Abe 등<sup>(15)</sup>이 재부착 유동해석

**Table 2** Present turbulence energy dissipation rate equation model

Process	Model
$\epsilon$	$\frac{D\epsilon}{Dt} = D_\epsilon + \Pi_\epsilon + T_\epsilon + P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 - \Gamma$
$D_\epsilon$	$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right)$
$T_\epsilon$	$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( C_\epsilon \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right)$
$P_\epsilon^1$	$f_{u2} \frac{P_k \epsilon}{k}$
$P_\epsilon^2$	$C_{e1} [1 - \exp(-y_\epsilon^+/4.6)] \frac{P_k \epsilon}{k}$
$P_\epsilon^3 + \Pi_\epsilon$	$C_{e2} \left[ \nu \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} U_{i,j} U_{i,k} \right]$
$P_\epsilon^4$	$C_{e3} [1 - \exp(-y_\epsilon^+/4.6)]^3 f_{e1}(R_t) \frac{\epsilon^2}{k}$
$\Gamma$	$C_{e4} [\tanh(y_\epsilon^+/7.5)] f_{e1}(R_t) f_{e2}(R_p) \frac{\epsilon^2}{k}$

where;

$$f_{e1}(R_t) = 1 - 0.3 \exp[- (R_t/6)^2]$$

$$f_{e2}(R_p) = \exp(R_p^3), \quad R_p = \frac{P_k/\epsilon(1+0.4f_{u2})}{0.3R_t^{0.5}}$$

$$f_{u2} = \frac{2f_{u1}}{1+1.5u_2^2/k}, \quad f_{u1} = \exp[- (R_t/83)^2]$$

$$C_\epsilon = 0.46 / \{1 + \exp[- (R_t/65)^2]\}$$

$$C_{e1} = 1.44, \quad C_{e2} = 0.15, \quad C_{e3} = 3.1, \quad C_{e4} = 5.02$$

$$y_\epsilon^+ = y^*(1 + 0.0248y^*) / (\epsilon_w^+)^{0.25}, \quad y^* = y(\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} / \nu$$

을 위해 사용한 무차원수  $y^*$  ( $\equiv y(\nu\epsilon)^{1/4}/\nu$ )를 포물형 함수로 수정한 것이다. 이 함수를 사용하는 경우 일반적인 무차원거리  $y^+$  ( $\equiv yu_\tau/\nu$ )를 사용하지 않아도 되기 때문에 형상이 복잡하거나 재순환유동이 발생하는 유동장에서도 용이하게 본 소멸률 방정식 모형을 적용할 수 있다.

현재의  $\epsilon$  방정식을 해석하기 위하여 사용한 벽면 경계조건은 벽면에 정확하게 접근하는  $\epsilon_w = 2\nu(\partial k^{1/2}/\partial x_2)^2$ 를 사용하였다.

### 3. 결과 및 토의

새로 개선된 레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 정확성을 시험하기 위하여 본 연구에서는

먼저 DNS 자료가 있는 완전 발달된 2차원 평행 평판유동에 대한 해석을 시도하였다. 이 유동은 DNS 자료들을 이용해 개발된 난류모형이 2차원 유동에서 평균속도 분포와 레이놀즈응력 분포를 정확히 예측해줄 수 있는지의 여부와 난류모형들이 벽인접부에서 적절히 거동하는지 살펴보기 위한 시험이 된다.

해석에 사용된 격자는 벽인접부에서 변수들의 급격한 변화를 잘 반영하면서 동시에 수치해석 결과가 격자수에 무관하도록 여러 번의 반복계산을 시도하여 적정 격자수를 선정하였다. 벽으로부터 첫 번째 격자는  $y^+ = 1$ 에 위치 시켰고, 그 다음 격자부터는 1.05배의 일정비율로 격자간격을 증가시켜 유동장의 저레이놀즈수 구역 ( $y^+ < 70$ )에 약 70%의 격자를 배치했고, 이후의 나머지 30%의 격자는 일정간격으로 유지시켰다. 이러한 방법으로 격자를 구성하면 한쪽 벽으로부터 반대쪽 벽까지의 격자수는  $Re = 6000$ 인 경우 196개,  $Re = 34400$ 이면 260개로 레이놀즈수의 변화에 따라 격자수가 변하게 구성하였다.

Fig. 2는 무차원 난류운동에너지  $k/U\tau_o^2$  분포를 나타낸다. DNS 자료와 비교할 때 본 모형에 의한 예측값은 전반적으로 DNS자료와 잘 일치하고 있고, Shima모형보다 우수한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

Fig. 3은  $SC^{(14)}$ 가 제안한 다중 생성물 모형에 의한  $\epsilon$  방정식을 본 연구의 새로운 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형에 알맞게 수정하여 예측한 무차원 난류운동에너지 소멸률  $\nu\epsilon/U\tau_o^4$  분포를 도시한 것이다. 본 모형에 의한 해석결과는  $5 < y^+ < 10$  영역에서는 DNS 보다 다소 크게 예측되지만 Shima 모형이 나타내지 못한 DNS 형상을 그대로 따르고 있다. 이 소멸률 분포에 대한 개선이 다른 모형과 비교해서 본 모형이 갖는 최대의 장점이라고 할 수 있으며, DNS자료와의 약간의 차이는 레이놀즈응력 방정식 모형의 정확성 결여에서 오는 것이라고 판단할 수 있다.

Fig. 4는 무차원 레이놀즈응력  $u_1'/U\tau_o$ ,  $u_2'/U\tau_o$ ,  $u_3'/U\tau_o$  분포에 대한 예측 결과들을 나타낸 것인데, 본 모형에 의한 예측치가 비교적 DNS 자료에 잘 일치하며, Shima모형보다 우수한 결과를 보여주고 있다.

본 연구의 최종 목적은 개선된 저레이놀즈수

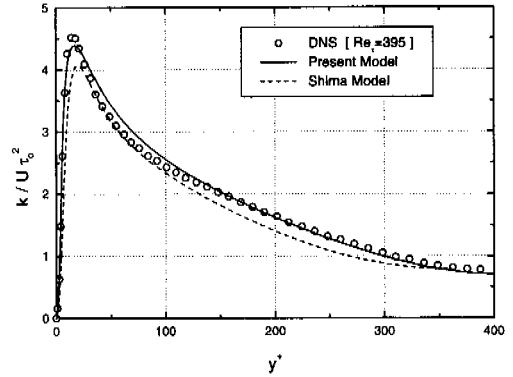


Fig. 2 Turbulent kinetic energy profile in non-rotating channel

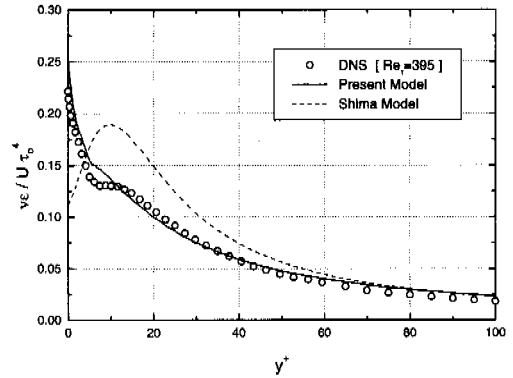


Fig. 3 Distribution of turbulence energy dissipation rate in non-rotating channel

2차 모멘트 모형을 비등방성이 강한 복잡한 회전 유동장에 적용하기 위한 것이며, 이를 위해 새로이 시도된 난류모형에 비등방성 효과가 충분히 반영되도록 고려하였다.

그 첫 번째는 저레이놀즈수 구역에서 거동하는 난류운동에너지 소멸률 방정식을 적용한 것이고, 두 번째는 유동이 회전을 동반하는 경우 유동장의 압력축(불안정부분)에서 상당히 강한 불균일 유동이 발생하기 때문에 이를 적절히 나타내기 위하여 평균변형률의 평균변형률을 식 (6)과 같이 불균일유동 수정을 하였다.

Fig. 5~7은 레이놀즈수  $Re$  변화에 따라 무차

원 레이놀즈응력  $u_1'/U\tau_o, u_2'/U\tau_o, u_3'/U\tau_o$  분포를 DNS 및 LES자료와 비교한 것이다. Re가 6000인 경우 본 모형과 Shima모형에 의한 예측값은 모두 DNS자료(6)와 유사한 결과를 보여주나,  $u_1'/U\tau_o$ 와  $u_3'/U\tau_o$ 의 경우 유동의 흡인측(안정부분)에서는 모두 약간의 차이를 보여주고 있다.

이 현상은 실제 회전유동장의 흡인측(안정부분)에서 난류유동이 층류유동화 되는 경향을 본 모형이나 Shima모형이 정확히 묘사하지 못한다는 것을 보여주며, 앞으로의 난류모형 연구는 층류유동과 난류유동사이의 천이영역을 정확히 예측해 줄 수 있는 모형개발이 필요하다는 것을 나타낸다. Re가 27600인 경우에는 본 모형에 의한 예측값이 압력측(불안정부분)에서 LES자료(9)보다 너무 크거나( $u_1'/U\tau_o$ ) 작은( $u_3'/U\tau_o$ ) 분포를 보여준다. 비록 레이놀즈수나 회전수가 다르지만 Fig. 5와 Fig. 6을 본 모형에 의한 예측결과와 간접 비교해 보면  $u_1'/U\tau_o$ 의 경우 압력측(불안정부분)에서 LES가 상당한 작은 분포를 보여주고 있다. 본 모형에 의한  $u_1'/U\tau_o$  값은 유동의 압력측 부분에서 불균일유동 수정이 가해지게 되어 실제값보다 다소 크게 예측될 수 있지만, DNS 자료를 비교적 정확한 값이라고 가정하면 Kim(9)의 LES자료는 어느 정도 오차가 있다고 할 수 있다. Fig. 7은 Re가 23000이고 회전수 Ro가 비교적 고속인 0.21인 경우에 대해서 PL(7)의 LES 결과와의 비교를 나타낸다. 이 경우에 대해서는 Shima모형에

의해서는 수렴된 해를 얻을 수 없었는데, 이는 압력측(불안정부분)의 유동장에서 벽면 대수법칙을 Shima모형이 나타내기가 어렵기 때문에 수치적 불안정이 발생하기 때문이다.(12) 이에 반해 본 모형은 LES 자료와 약간의 차이( $u_2'/U\tau_o$ 의 경우)는 있지만 전반적으로 레이놀즈응력 분포를 적절히 예측해 내고 있다. 비록 본 모형이 이 경우에는 예측이 가능하였지만 레이놀즈수가 작고 회전수가 큰 경우(예, Re = 11500, Ro = 0.21)에는 본 모형도 해의 수렴을 얻을 수 없었다. 그러나 Fig. 7은 본 모형이 Shima모형보다 비교적 큰 레이놀즈수 및 높은 회전수에서도 적용이 가능하다는 것을 보여주기 때문에 실제 유체기계의 실제

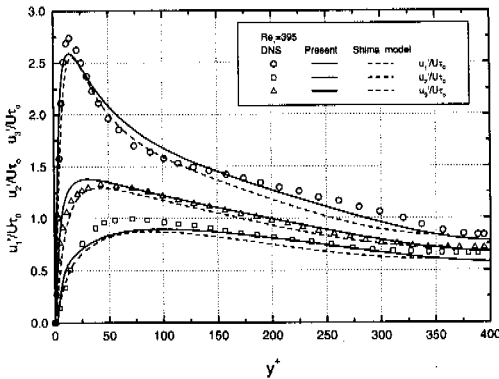


Fig. 4 Root mean square velocity fluctuation in non-rotating channel

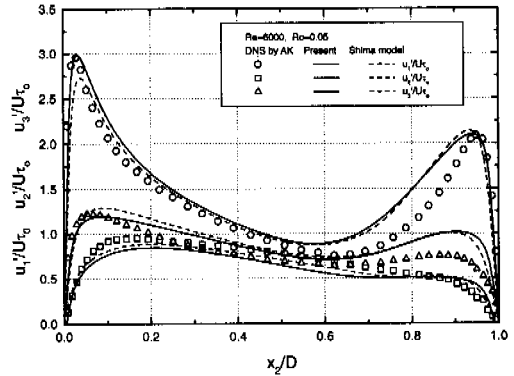


Fig. 5 Root mean square velocity fluctuations across rotating channel, Re = 6000, Ro = 0.05

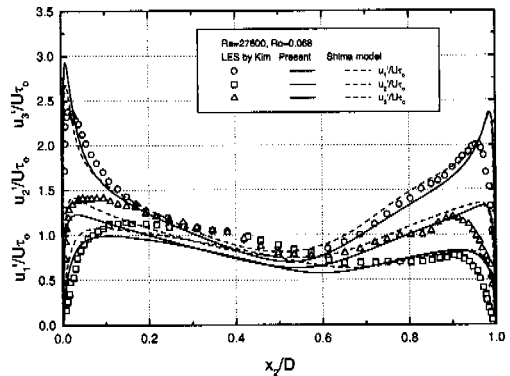


Fig. 6 Root mean square velocity fluctuations across rotating channel, Re = 27600, Ro = 0.068

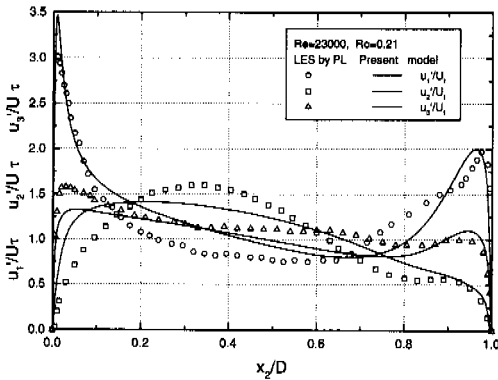


Fig. 7 Root mean square velocity fluctuations across rotating channel,  $Re = 23000, Ro = 0.21$

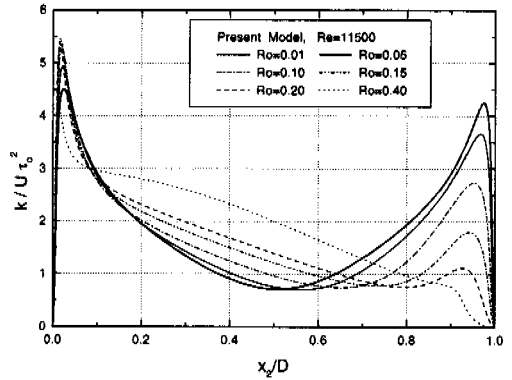


Fig. 9 Turbulent kinetic energy profiles in rotating channel,  $Re = 11500$

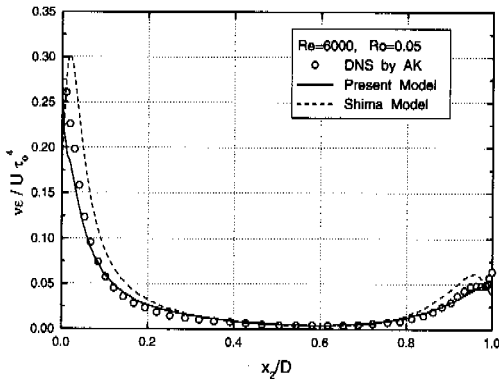


Fig. 8 Distribution of turbulence energy dissipation rate across rotating channel,  $Re = 6000, Ro = 0.05$

응용에 본 모형이 보다 적극적으로 적용될 수 있을 것이라고 사료된다.

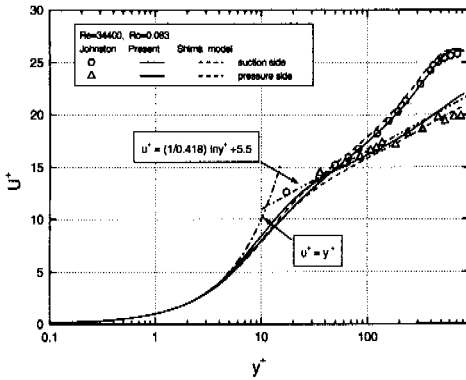
Fig. 8은  $Re = 6000, Ro = 0.05$ 에 대한 무차원 난류운동에너지 소멸률 분포를 전유동장에 대해 도시한 것이다. 난류운동에너지 소멸률은 압력측의 벽면( $x_2/D = 0$ ) 및 흡인측의 벽면( $x_2/D = 1$ ) 인접부에서 본 모형에 의한 해석결과는 평행 평판유동에 의한 결과와 마찬가지로 DNS자료<sup>(6)</sup>와 아주 유사한 결과를 보여주고 있다. 따라서 본 모형의 개선효과는 회전이 포함된 복잡한 유동장에서도 적절히 표현되고 있음을 입증해 주고 있다.

Fig. 9는  $Re = 11500$ 이고  $Ro$  이 0.01에서 0.40까

지 변할 때의 난류운동에너지 분포를 보여준다. 매우 낮은 회전수 ( $Ro = 0.01$ )에서는 그 분포가 회전에 의해 압력측(불안정부분)이 흡인측(안정부분)보다 다소 커지게 되는, 즉 서로 반대의 효과를 발휘하며 좌우 대칭의 형태가 불균형이 시작되는 것을 보여주고 있다. 회전이 존재하는 경우 이러한 비대칭이 발생하는 이유는 다음과 같이 설명할 수 있다. 낮은 회전수에서는 회전에 의한 생성률  $F_{ij}$ 가 평균전단에 의해 발생하는 생성률  $P_{ij}$ 와 비교할 때 벽에 수직한 성분 ( $i = j = 2$ )을 제외하고는 무시할 정도이다. 그러나  $P_{22} = 0$ 이기 때문에 압력측(불안정부분)으로부터 흡인측(안정부분)까지  $F_{22} = -4Q\overline{u_1u_2}$ 의 부호의 변화가 유동장의 중심을 기준으로 서로 비대칭적인 난류운동에너지 분포를 나타낸다는 것을 알 수 있다. 보다 상세하게 기술하면, Fig. 1에서 보여준 회전 유동장에서  $F_{22}$ 의 부호가 압력측에서는 양의 값이 되므로, 결국 코리올리 효과에 의한 벽에 수직한 응력성분  $\overline{u_2^2}$ 을 증가시키는 방향으로 진행하는 것이다.

$Ro$ 가 증가할수록 흡인측(안정부분)에서 난류의 정도가 점차적으로 위축되는 것을 보여준다. 반면에 압력측(불안정부분)에서는 난류교란이  $Ro = 0.15$ 까지는 증가되나 그 이후는 강도가 떨어지는 것을 보여준다. 높은 회전수에서 발생하는 이러한 현상을 현 단계에서 명확히 설명할 수는 없지만 AK<sup>(6)</sup>에 따르면 압력확산의 영향이 어

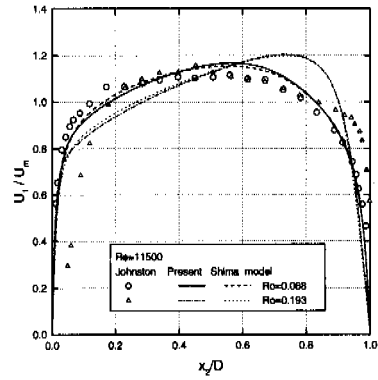




**Fig. 10** Mean velocity profiles in wall coordinates,  $Re = 34400, Ro = 0.083$

는 정도 이 현상에 영향을 준다고 보고하고 있다. 또한, Fig. 9는 회전수가 0.2에서부터 유동장의 흡인측에서 유동이 층류로 변화되는 경향을 보여 주고 있으며, 0.4에서는 완전한 층류화가 일어났음을 알 수 있다.

Fig. 10은  $Re=34400$ 이고,  $Ro=0.083$ 인 경우에 대해 평판의 양쪽 벽면부에서의 무차원 속도분포를 나타내는데 본 모형에 의한 결과들이 Johnston 등<sup>(16)</sup>의 실험자료와 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 따라서 본 모형은 유동장의 압력측(불안정 부분)의 매우 강한 불균일유동 및 흡인측(안정 부분)에서 발생하는 층류화 경향을 비교적 적절하게 반영하고 있다고 할 수 있다. 그러나 회전수가 높아지는 경우에는 Fig. 11에서 보여지는 바와 같이 난류모형에 의한 계산값들이 모두 실험값들과는 다른 양상으로 예측된 것을 알 수 있다. 이는 유동장의 압력측(불안정 부분)의 대수 벽법칙을 난류모형들이 잘 모사하지 못하기 때문인 것으로 사료된다. 이렇게 한쪽 벽면에서의 잘못된 예측은 반대쪽의 흡입측(안정 부분)에도 영향을 미쳐 실제 실험결과와 다른 해를 보여주는 것으로 생각된다. 또한, 회전수를 증가시키며 난류모형에 의한 해석을 시도하는 과정에서 유동장의 압력측(불안정 부분)에서 대수 벽법칙을 만족하지 못하게 되는 시점부터 수치해는 불안정해지며, 따라서 수렴된 해를 얻지 못하게 되는 경우가 있다. 이러한 경향이 회전수의 증가에 따라 지속되다가 회전수의 어느 시점부터는 유동장의 안정부분에서 층류유동 현상이 예측되면서 오히려 저 회전



**Fig. 11** Mean velocity profiles

전수에서 보다 빠르게 수렴에 이르는 현상을 공통적으로 가지고 있다. 이러한 현상은 본 모형과 Shima모형이 모두 보여주지만 레이놀즈수가 커질수록 본 모형이 Shima모형보다 폭 넓은 회전수의 범위에서 타당성 있는 해를 보여준다. 앞서 설명하였던 Fig. 7의 현상이 이에 해당한다.

Fig. 12는 회전수의 변화에 따라 양쪽벽에서 측정되거나 계산된 벽 마찰속도를 보여준다. 본 모형에 의한 계산 결과들이 Johnston 등<sup>(16)</sup>이 수집해 놓은 자료들과 AK<sup>(6)</sup>에 의해 계산된 자료들과 비교되었다. 실험자료들은 압력측(불안정 부분)에서 벽 마찰값들이 점차 증가하다가  $Ro$ 가 약 0.07 부근에서 일정한 값으로 유지되는 경향을 보여주고 있으며, 흡인측(안정 부분)에서는  $Re$ 가 작을 때 회전수가 증가함에 따라 ( $Ro \geq 0.1$ ) 현저하게 벽 마찰값이 감소하고 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 유동장의 안정부분, 즉 흡인측에서 층류화가 가속되고 있다는 것을 나타내는 것이다. 본 모형에 의한 결과들은  $Re$ 가 11500인 경우 실험값들과 비교적 잘 일치하는 경향을 보여주나,  $Re$ 가 23000일 때는 유동장의 불안정 부분에서 비교 자료들보다 작은 분포를 유지하는 것을 보여준다. 이 현상은 본 모형에 적용한 식 (6)으로 표시한 동가 평균변형률이 이 압력측(불안정 부분)에 작용하기 때문에 발생한 것으로 사료된다. 그러나, 유동장의 흡인측(안정 부분)에서는 본 모형에 의한 예측값들이 실험값들에 매우 근접하는 결과들을 보여준다. 따라서 현재까지의 결과들을 볼 때 본 연구에 의해 개선된 저레이놀

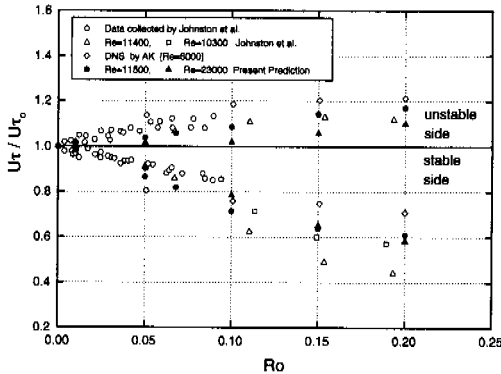


Fig. 12 Friction velocity on the two sides of the channel

스수 2차 모멘트 모형은 회전을 포함한 실제 유동장에서 타당성을 갖기 때문에, 향후 비등방성이 강한 복잡한 3차원 유동장 해석에서는 기존의 저레이놀즈수  $k-\varepsilon$  및 2차 모멘트 모형들보다 분명히 우수한 예측결과를 나타낼 수 있을 것이라고 사료된다.

한편, 회전수가 증가함에 따라 발생하는 수치해의 불안정 및 흡인층(안정부분)에서의 급격한 층류화가 일어나는 이유는 벽에 수직한 난류응력 방정식  $\overline{u_2^2}$  으로부터 그 원인을 찾을 수 있다. 즉, 회전에 의한 생성항  $F_{22} = -4\Omega \overline{u_1 u_2}$  은 앞에서 이미 언급한 바와 같이 흡인층(안정부분)에서 음의 값을 갖게 되므로 회전수의 증가에 따라 싱크항이 점점 커지게 되며, 이는 결국  $\overline{u_2^2}$  방정식을 0으로 이끌기 때문에 회전수가 증가하는 경우 어느 순간에 갑자기 층류화가 일어난다. 따라서 현재와 같은 난류모형으로는 구조적으로 급격히 층류화가 되는 것을 막을 수 없으나, 현재의 난류모형에서  $\overline{u_2^2}$  방정식과 관계가 있는  $\varepsilon_{22}$  모형을  $F_{22}$ 와 보완적 관계를 갖도록 개선함으로써 어느 정도의 높은 회전수까지는 급격히 층류화가 일어나는 것을 막을 수 있다. 따라서 난류모형에 의한 예측이 보다 타당성을 갖기 위해서는 회전유동에 대한 다양하고 정확한 실험결과들이 우선 도출되어야 하며, 이 실험자료들을 바탕으로 현재의 난류모형을 보완하는 경우 회전유동장의 재층류화 현상을 어느 정도까지는 사실적으로 예측

하는 것이 가능할 것으로 생각한다.

#### 4. 결론

본 연구에서 새로 개선한 저레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형을 완전 발달된 평행 평판유동 및 회전유동에 적용하여, 그 해석 결과들을 기존의 Shima<sup>(11,12)</sup>모형에 의한 해석결과와 현재 제시되어 있는 DNS, LES 및 실험 자료들과 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 모형을 Shima모형과 비교할 때 회전유동에서는 전반적으로 유사한 해석결과를 보여준다. 그러나 Shima모형으로는 해를 얻을 수 없었던 고 레이놀즈수 및 고 회전수에 대해서 본 모형은 해석이 가능하였으므로, 실제 유체기계의 설계에 보다 폭 넓게 적용될 수 있다.

(2) 본 모형에 수정 적용한  $SC^{(14)}$ 의 소멸률 방정식의 다중생성률 모형에 의한 예측결과는 과거의 다른 2차 모멘트 모형에서는 나타내지 못했던 벽면 인접부의 무차원 난류에너지 소멸률 분포를 DNS자료에 보다 근접하게 나타낸다. 이는 본 모형의 개선효과를 가장 잘 나타내는 현상이다.

(3) 본 모형에 의한 저회전 유동장의 흡인층(안정부분)에서 보여준 예측결과는 본 모형이 난류에서 층류로 전이되는 전이유동 구역에서도 타당성을 갖고 적용될 수 있음을 보여준다.

(4) 본 연구에서 개선한 저레이놀즈수 2차 모멘트 모형은 일부 평행 평판유동 및 회전유동에서는 비교적 우수한 예측결과를 보여주었으나, 본 모형에 대한 보다 엄밀한 검증은 정확한 실험결과가 있는 비등방성이 큰 복잡한 3차원 유동장에서 이루어져야 한다고 사료된다.

#### 참고문헌

- (1) Lumley, J. L., 1978, "Computational Modelling of Turbulent Flows," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 123~176.
- (2) Sarkar S. and Spezilae C. G., 1990, "A Simple Nonlinear Model for the Return to Isotropy in Turbulence," *The Physics Fluids A*, Vol. 2, pp. 84~93.
- (3) Speziale, C. G., Gatski, T. B. and Sarkar, S.,

- 1992, "On the Testing for the Pressure-Strain Correlation of Turbulence Using Direct Simulations," *The Physics of fluids A*, Vol. 4, pp. 2287~2899.
- (4) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1991, "Directions in Second-Moment Modelling of Near-Wall Turbulence," *AIAA Paper 91-0219*, 29th Aerospace Science Meeting, Reno, Nevada.
- (5) 신종근, 최영돈, 1996, "DNS 자료에 의한 저 레이놀즈수 2차 모멘트 난류모형의 개발," 대한기계학회 논문집 제20권 8호, pp. 2572~2592.
- (6) Andersson, H. I. and Kristoffersen, R., 1995, "Turbulence Statistics of Rotating Channel Flow," in *Turbulent Shear Flows-9*, (ed. Durst et al.), Springer.
- (7) Piomelli, U. and Liu, J., 1995, "Large-Eddy-Simulation of Rotating Channel Flows Using a Localized Dynamic Model," *Phys. Fluids*, Vol. 7, No.4, pp. 339~848.
- (8) Tafti, D. K. and Vanka, S. P., 1991, "A Numerical Study of the Effects of Spanwise Rotation on Turbulent Channel Flow," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, No. 4, pp. 642~656.
- (9) Kim, J., 1983, "The Effect of Rotation on Turbulence Structure," *Proceedings 4th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Karlsruhe, pp. 6.14~6.19.
- (10) Launder, B. E. and Tselepidakis, D. P., 1994, "Application of a New Second-Moment Closure to Turbulent Channel Flow Rotating in Orthogonal Mode." *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 15, No. 1, pp. 2~10.
- (11) Shima, N., 1993, "Prediction of Turbulent Boundary Layers with a Second-Moment Closure : Part I - Effects of Periodic Pressure Gradient, Wall Transpiration, and Free-Stream Turbulence," *Trans. of the ASME*, Vol. 115, pp. 56~63.
- (12) Shima, N., 1993, "Prediction of Turbulent Boundary Layers with a Second-Moment Closure : Part II - Effects of Streamline Curvature and Spanwise Rotation," *Trans. of the ASME*, Vol. 115, pp. 64~69.
- (13) Kim, J., Moin, P. and Moser, R. D., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, pp. 133~186.
- (14) 신종근, 최영돈, 1996, "저 레이놀즈수  $k-\varepsilon$  모형에서 DNS 자료에 의한  $\varepsilon$ 방정식의 다중생성률 모형," 대한기계학회 논문집 제20권 제1호, pp. 304~320.
- (15) Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., 1994, "A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching Flows- I. Flow Field Calculations," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, No. 1, pp. 139~151.
- (16) Johnston, J. P., Halleen, R. M. and Lezius, D. K., 1972, "Effects of Spanwise Rotation on the Structure of Two-Dimensional Fully Developed Turbulent Channel Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 56, pp. 533~557.