

## 비점성 평면 정체 유동 응고 문제에 대한 점근적 해석

유 주 식\* · 엄 용 균\*\*  
(1999년 6월 17일 접수)

### An Asymptotic Analysis on the Inviscid Plane Stagnation-flow Solidification Problem

Joo-Sik Yoo and Yong-Kyoon Eom

**Key Words:** Plane Stagnation-flow(평면 정체 유동), Phase Change(상변화), Solidification(응고) Growth Rate of Solid(고체의 성장 속도)

#### Abstract

The problem of phase change from liquid to solid in the inviscid plane-stagnation flow is theoretically investigated. The solution at the initial stage of freezing is obtained by expanding it in powers of time, and the final equilibrium state is determined from the steady-state governing equations. The transient solution is dependent on the three dimensionless parameters, but the equilibrium state is determined by one parameter of (temperature ratio/conductivity ratio). The effect of the fluid flow on the growth rate of the solid in the pure conduction problem can be clearly seen from the solution of the initial stage and the final equilibrium state. The characteristics of the transient heat transfer at the surface of the solid and the liquid side of the solid-liquid interface for all the dimensionless parameters are elucidated.

#### 기호설명

A : 포텐셜 흐름 변형 속도(potential flow strain rate)  
 $C_S$  : 고체의 비열  
 $\text{erf}(x)$  : 에러 함수(error function)  
 $\text{erfc}(x)$  : 보충 에러 함수(complementary error function),  $1-\text{erf}(x)$   
 $K$  : 열전도도  
 $K_R$  : 고체와 액체의 열전도도 비,  $K_S/K_L$   
 $L$  : 잠열  
 $Q_L(t)$  : 고체-액체 경계면의 액체 쪽에서의 열 유속,  $-K_L[\partial T_L(y, t)/\partial y]$  at  $y=X(t)$

$Q_S(t)$  : 고체 표면에서의 열유속,  $-K_S[\partial T_S(y, t)/\partial y]$  at  $y=0$   
 $Q_{steady}$  : 정상 상태의 열유속,  $Q_S(t) = Q_L(t) = Q_{steady}$  at  $t \rightarrow \infty$   
 $Ste$  : Stefan 수,  $C_S(T_F - T_C)/L$   
 $T$  : 온도  
 $T_C, T_H$  : 기관의 온도, 유체의 초기 온도,  
 $T_F$  : 유체의 응고 온도  
 $t$  : 시간  
 $X(t)$  : 고체의 두께  
 $y$  : 수직 좌표

#### 그리스문자

$\alpha$  : 열 확산 계수  
 $\alpha_R$  : 열 확산 계수의 비,  $\alpha_S/\alpha_L$   
 $\delta(\tau)$  : 무차원 고체 두께  
 $\delta_{eq}$  : 평형 상태에서의 무차원 고체 두께

\* 회원, 안동대학교, 기계공학교육과  
 E-mail : jsyoo@anu.andong.ac.kr  
 TEL : (0571)850-5671 FAX : (0571)841-1624  
 \*\* 회원, 안동대학교, 기계공학과

- $\zeta$  : 무차원 좌표,  $\sqrt{A/\alpha_L} y$   
 $\eta$  : 치환된 변수,  $\zeta/\delta(\tau)$   
 $\theta_L$  : 액체 영역에서의 무차원 온도,  
 $(T_L - T_H)/(T_F - T_H)$   
 $\theta_S$  : 고체 영역에서의 무차원 온도,  
 $(T_S - T_C)/(T_F - T_C)$   
 $\theta_R$  : 온도 비,  $(T_H - T_F)/(T_F - T_C)$   
 $\rho$  : 밀도  
 $\sigma$  : Neumann 문제에서의 고체의 성장계수  
 $\tau$  : 무차원 시간,  $At$

#### 하첨자

- L : 액체  
S : 고체  
 $\infty$  : 무한대

## 1. 서론

액체와 고체 사이에서 일어나는 상변화 현상은, 금속의 주조, 음식의 냉동, 얼음의 생성, 열에너지 저장 시스템 등과 같은 넓은 산업적인 응용 분야로 인해 많은 관심을 받아 왔다. 이 분야에 대한 첫 연구는 Stefan에 의해 수행된 극지의 얼음 두께에 대한 연구이며, 이러한 이유로 인하여 액체의 응고 문제는 종종 "Stefan 문제"로 불리어지기도 한다.<sup>(1)</sup> 그 이후 많은 연구가 수행되었는데, 상변화 문제에 대한 연구는 크게 다음과 같은 3가지 종류로 구분할 수 있다. (i) 액체의 유동을 전혀 고려하지 않고 정지해 있는 액체와 고체 사이의 순수한 전도에 의한 열전달만을 고려하여 온도 분포와 응고 혹은 용해 과정을 조사하는 경우,<sup>(2,3)</sup> 액체 내에서 유체의 흐름, 즉, (ii) 강제대류,<sup>(4,5)</sup> 혹은 (iii) 자연대류<sup>(6,7)</sup>가 있는 경우.

이들 중, 강제대류가 있을 때의 상변화에 대한 대부분의 연구들은, 고체와 액체의 경계면에서의 액체 쪽의 대류 열전달률을 주어진 일정한 값으로 놓고서 고체에서의 온도 분포와 경계면의 위치를 결정하였다.<sup>(4,5)</sup> 즉, 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화는 전혀 고려하지 않았다. 그러나 응고 과정과 액체에서의 온도 분포는 서로 영향을 받을 수가 있지만 액체 영역에서의 비정상 온도 분포를 고려한 연구<sup>(8-10)</sup>는 상대적으로 적다.

비교적 근래에 Yoo<sup>(8)</sup>는 고체와 액체에서의 온도 분포의 시간적인 변화를 모두 고려하여 무한히 큰 평면 원반의 회전에 의해 일어나는 유동장 하에서의 유체의 상변화 문제를 연구하였다. Yoo<sup>(8)</sup>의 연구는, 강제 대류 하에서의 상변화 문제에 있어서 고체와 액체의 비정상 거동을 모두 고려한 최초의 연구라는 데에 큰 의미를 갖고 있다.

강제적인 유체 유동 하에서 운동하고 있는 액체의 응고와 관련된 또 하나의 중요한 문제는 금속 입자의 분무 과정에서 일어나는 응고 현상이다. 높은 온도의 액체 금속 방울을 응고 온도보다 낮은 온도로 유지되고 있는 차가운 기판(cold substrate)에 분사시키면 액체 방울이 변형되면서 기판의 표면에서 액체 금속의 응고가 일어난다. 이와 같은 액체 방울의 변형 과정 동안의 상변화 메커니즘(mechanism)을 연구하는 하나의 방법은, Stefan 모델의 Neumann 해를 이용하여 액체와 고체의 경계면의 위치를 결정하는 방법이 있다.<sup>(11,12)</sup> 그런데 이 접근 방법의 가장 큰 결점은, 액체의 운동이 응고 과정에 미치는 영향이 전혀 고려되지 않는다는 것이다. 최근에 Rangel and Bian<sup>(13,14)</sup>은 비점성 축대칭 정체 유동(invscid axisymmetric stagnation flow)에 대한 응고 모델을 만들어서 액체의 운동이 응고 거동에 미치는 영향을 수치적으로 조사하였다. 또한 Bian and Rangel<sup>(15)</sup>은 점성 정체 유동(viscous stagnation flow)에 대한 응고 과정을 조사하였다. 이들 모델들은, 분무 용착(spray deposition)에서 유체의 흐름이 액적의 응고에 미치는 영향을 보여준다는 데에 의미가 있다.

회전 원반 시스템이나 정체 유동 시스템의 두 경우 모두에 있어서 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면을 향하는 강제적인 유체의 흐름이 있다. 따라서 두 경우는 지배 방정식이나 물리적인 현상에서 서로 비슷한 특성을 많이 보여준다.

본 연구에서는 비점성 평면 정체 유동에서의 응고 현상을 조사한다. 일정 온도  $T_C$  ( $< T_F$ )로 유지되고 있는 있는 차가운 기판을 향하여 유체가 흘러간다. 초기 상태에 있어서 유체의 온도는  $T_H$ 로 일정하게 유지되고 있으며  $T_H$ 는 유체의 응고 온도  $T_F$ 보다 높다. 따뜻한 유체가 차가운 기판을 향해 흐르게 되면 자연스럽게 고체와 액체의 경계면에서 액체의 응고가 일어나게 된다.

유체의 흐름이 없으면 이 문제는 잘 알려진 Neumann 의 해<sup>(1)</sup>를 갖는 Stefan 문제가 된다.

본 연구에서는 응고 과정의 초기 단계와 최종 단계에 대한 해석적인 해를 구하여 유체의 유동이 응고 현상에 미치는 영향에 대해 조사한다. 응고의 초기 단계인  $\tau \ll 1$  에서는 해를 시간에 대한 급수로 전개하여 구한다. 그리고 최종 평형 상태는 정상 상태의 지배 방정식으로부터 결정한다. 본 문제에서 나타나는 중요한 물리량은 고체의 성장 속도와 고체면에서의 열전달률 및 고체-액체 경계면의 액체 쪽에서의 열전달률이다. 지배 방정식을 무차원화시키면  $Ste, \theta_R, \alpha_R, K_R$  의 4 개의 무차원 변수가 나타난다. 그러나 방정식의 해는 3 개의 변수  $\theta_R/K_R, Ste, \alpha_R$ 에 의해 결정됨을 보이고 이들 변수들에 대한 응고 속도와 열전달의 특성을 조사한다.

2. 해 석

2.1 지배 방정식

Fig. 1과 같이 일정한 온도  $T_C$ 로 유지되고 있는 있는 차가운 기관을 향하여 따뜻한 유체가 흘러 간다. 초기 상태에 있어서 유체의 온도는  $T_H$ 로 일정하게 유지되고 있으며  $T_H$ 는 유체의 응고 온도  $T_F$ 보다 높다. 기관의 온도  $T_C$ 가 유체의 응고 온도  $T_F$ 보다 낮으면 고체-액체 경계면에서 응고가 일어나게 되고 고체층의 두께는 점점 커지게 된다. 비점성 평면 정체 유동에서의 수직 방향의 속도는  $v = -Ay$  이므로<sup>(16)</sup> 온도와 고체의 두께에 대한 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같이 된다.<sup>(8,13)</sup>

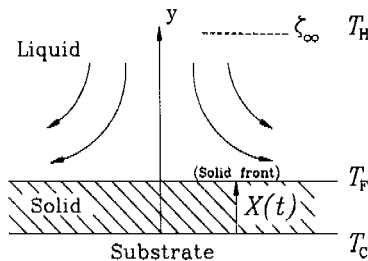


Fig. 1 Plane Stagnation flow ahead of a solidifying interface

$$\frac{\partial T_S}{\partial t} = \alpha_S \frac{\partial^2 T_S}{\partial y^2} \text{ at } 0 < y < X(t) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} - A[y - X(t)] \frac{\partial T_L}{\partial y} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L}{\partial y^2} \text{ at } y > X(t) \tag{2}$$

$$K_S \frac{\partial T_S}{\partial y} - K_L \frac{\partial T_L}{\partial y} = \rho L \frac{dX}{dt} \text{ at } y = X(t) \tag{3}$$

$$T_S = T_C \text{ at } y = 0,$$

$$T_S = T_L = T_F \text{ at } y = X(t) \tag{4}$$

$$T_L = T_H \text{ at } y \rightarrow \infty$$

응고가 일어나기 바로 직전의 액체의 온도는 균일하며  $T_H$ 와 같다. 고체의 표면과 고체-액체 경계면의 액체 쪽에서의 열유속,  $Q_S$ 와  $Q_L$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$Q_S(t) = -K_S \left[ \frac{\partial T_S(y, t)}{\partial y} \right] \text{ at } y = 0 \tag{5}$$

$$Q_L(t) = -K_L \left[ \frac{\partial T_L(y, t)}{\partial y} \right] \text{ at } y = X(t) \tag{6}$$

$Q_S(t)$  와  $Q_L(t)$ 는  $t \rightarrow \infty$ 에서 같은 값을 갖는다.  $Q_S(\infty) = Q_L(\infty) = Q_{steady}$ .

다음과 같은 무차원 변수를 도입하면

$$\tau = At, \quad \zeta = \sqrt{\frac{A}{\alpha_L}} y, \quad \theta_S = \frac{T_S - T_C}{T_F - T_C}$$

$$\theta_L = \frac{T_L - T_H}{T_F - T_H}, \quad \theta_R = \frac{T_H - T_F}{T_F - T_C} \tag{7}$$

$$K_R = \frac{K_S}{K_L}, \quad \alpha_R = \frac{\alpha_S}{\alpha_L}, \quad Ste = \frac{C_S(T_F - T_C)}{L}$$

식 (1)-(4)는 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \zeta^2} \text{ at } 0 < \zeta < \delta \tag{8}$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} - (\zeta - \delta) \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \zeta^2} \text{ at } \zeta > \delta \tag{9}$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \zeta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \zeta} = \frac{1}{\alpha_R Ste} \frac{d\delta}{d\tau} \text{ at } \zeta = \delta \tag{10}$$

$$\theta_S = 0 \text{ at } \zeta = 0, \quad \theta_S = \theta_L = 1 \text{ at } \zeta = \delta(\tau),$$

$$\theta_L = 0 \text{ at } \zeta \rightarrow \infty \tag{11}$$

$$\text{여기에서 } \delta(\tau) = \sqrt{\frac{A}{\alpha_L}} X(t) \quad (12)$$

는 무차원화된 고체의 두께를 나타낸다.

무차원 지배 방정식 (8)-(11)에서  $\theta_R/K_R$ 이 하나의 변수로 표현된다는 것에 주목할 필요가 있다. 이것은 열전달이 Fourier의 열전도 법칙에 의해 일어나기 때문이다. Rangel and Bian<sup>(13,14)</sup>과 Bian and Rangel<sup>(15)</sup>은 온도비  $\theta_R$  과 열전도 계수의 비  $K_R$  을 독립된 변수로 취급하였는데 그렇게 할 필요가 없음을 말해준다. 반면 Yoo<sup>(8)</sup>는 이 두 변수들을 단일 변수  $\theta_R/K_R$ 로 표현하여 조사하였다.

식 (8)-(11)의 해를 구하기 위해 먼저 다음과 같은 좌표 변환을 하여 움직이는 경계면의 위치  $\xi = \delta(\tau)$  를  $\eta = 1$ 에 고정시키면

$$\eta = \frac{\xi}{\delta(\tau)} \quad (13)$$

식 (8)-(11)은 다음과 같이 변환된다.

$$\delta^2 \frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2} \frac{d\delta^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} = \alpha_R \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \eta^2} \quad \text{at } 0 < \eta < 1 \quad (14)$$

$$\delta^2 \frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} - \frac{\eta}{2} \frac{d\delta^2}{d\tau} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} - (\eta - 1) \delta^2 \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \eta^2} \quad \text{at } \eta > 1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} = \frac{1}{2\alpha_R Ste} \frac{d\delta^2}{d\tau} \quad \text{at } \eta = 1 \quad (16)$$

$$\theta_S = 0 \text{ at } \eta = 0, \quad \theta_S = \theta_L = 1 \text{ at } \eta = 1,$$

$$\theta_L = 0 \text{ at } \eta \rightarrow \infty \quad (17)$$

### 2.2 응고의 초기 단계

응고의 초기 단계 ( $\tau \ll 1$ )에서는  $\theta_{S,L}(\tau, \eta)$ 와  $\delta(\tau)$ 를 다음과 같이 전개할 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$\theta_S(\tau, \eta) = \theta_S^0(\eta) + \theta_S^1(\eta)\tau + \dots \quad (18)$$

$$\theta_L(\tau, \eta) = \theta_L^0(\eta) + \theta_L^1(\eta)\tau + \dots \quad (19)$$

$$\delta^2(\tau) = b_0\tau + b_1\tau^2 + \dots \quad (20)$$

식 (18)-(20)을 식 (14)-(17)에 대입하면 다음과 같은  $O(\tau^0)$ 에 대한 방정식과 경계 조건이 구해

진다.

$$\frac{d^2 \theta_S^0}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2\alpha_R} \eta \frac{d\theta_S^0}{d\eta} = 0 \quad \text{at } 0 < \eta < 1 \quad (21)$$

$$\frac{d^2 \theta_L^0}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2} \eta \frac{d\theta_L^0}{d\eta} = 0 \quad \text{at } \eta > 1 \quad (22)$$

$$\frac{d\theta_S^0}{d\eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{d\theta_L^0}{d\eta} = \frac{b_0}{2\alpha_R Ste} \quad \text{at } \eta = 1 \quad (23)$$

$$\theta_S^0(0) = 0, \quad \theta_S^0(1) = \theta_L^0(1) = 1, \quad \theta_L^0(\infty) = 0 \quad (24)$$

그리고  $O(\tau)$ 에 대한 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_S^1}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2\alpha_R} \eta \frac{d\theta_S^1}{d\eta} - \frac{b_0}{\alpha_R} \theta_S^1 \\ = -\frac{b_1}{\alpha_R} \eta \frac{d\theta_S^0}{d\eta} \quad \text{at } 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_L^1}{d\eta^2} + \frac{b_0}{2} \eta \frac{d\theta_L^1}{d\eta} - b_0 \theta_L^1 \\ = -[(\eta - 1)b_0 + b_1\eta] \frac{d\theta_L^0}{d\eta} \quad \text{at } \eta > 1 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{d\theta_S^1}{d\eta} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{d\theta_L^1}{d\eta} = \frac{b_1}{\alpha_R Ste} \quad \text{at } \eta = 1 \quad (27)$$

$$\theta_S^1(0) = \theta_S^1(1) = \theta_L^1(1) = \theta_L^1(\infty) = 0 \quad (28)$$

식 (21)-(24)의  $O(\tau^0)$ 의 식에 대한 해는 유체 유동이 없는 경우의 Neumann 해이다.<sup>(1)</sup>

$$\theta_S^0(\eta) = \frac{\text{erfc}(\sigma\eta)}{\text{erfc}(\sigma)} \quad (29)$$

$$\theta_L^0(\eta) = \frac{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R}\eta)}{\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} \quad (30)$$

$$\frac{\exp(-\sigma^2)}{\text{erfc}(\sigma)} - \frac{\theta_R\sqrt{\alpha_R}\exp(-\sigma^2\alpha_R)}{K_R\text{erfc}(\sigma\sqrt{\alpha_R})} = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{Ste} \quad (31)$$

$$b_0 = 4\sigma^2\alpha_R \quad (32)$$

식 (25)-(28)의  $O(\tau)$ 의 식에 대한 해는 다음과 같은 Homogeneous solution을 이용하여 구한다.

$$u_S(\eta) = \eta^2 + \frac{1}{2\sigma^2} \quad (33)$$

$$u_L(\eta) = \eta^2 + \frac{1}{2\sigma^2\alpha_R} \quad (34)$$

해는 다음과 같다.

$$\theta_S^1(\eta) = -u_S(\eta) \int_{\eta}^1 \frac{b_1 C_1 \left( \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2} + C_5 \right)}{\exp(\sigma^2 \eta^2) u_S^2(\eta)} d\eta \quad (35)$$

$$\theta_L^1(\eta) = u_L(\eta) \int_1^\eta \frac{C_3 f(\eta) + b_1 C_2 (\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R}) + C_4}{\exp(\sigma^2 a_R \eta^2) u_L^2(\eta)} d\eta \quad (36)$$

여기에서

$$C_1 = -\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi} a_R \operatorname{erf}(\sigma)}; \quad C_2 = \frac{2\sigma\sqrt{a_R}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sigma\sqrt{a_R})};$$

$$C_3 = \frac{8\sigma^3 a_R^{3/2}}{\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sigma\sqrt{a_R})};$$

$$C_4 = -\frac{1}{\int_1^\infty g(\eta) d\eta} [C_3 \int_1^\infty f(\eta) g(\eta) d\eta - b_1 C_2 \int_1^\infty g(\eta) (\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R}) d\eta];$$

$$C_5 = -\frac{\int_0^1 (\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2}) \exp(-\sigma^2 \eta^2) u_S^{-2}(\eta) d\eta}{\int_0^1 \exp(-\sigma^2 \eta^2) u_S^{-2}(\eta) d\eta}$$

$$b_1 = \frac{1}{S} \frac{\theta_R}{K_R} C_3 (\frac{K_3}{K_1} R_1 - R_3)$$

이고

$$R_1 = u_L(1)g(1); \quad R_3 = u_L(1)f(1)g(1)$$

$$R_2 = u_L(1)g(1)(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sigma^2 a_R})$$

$$S = \frac{C_1(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sigma^2} + C_5)}{\exp(\sigma^2) u_S(1)} - \frac{1}{a_R Ste} + \frac{\theta_R}{K_R} C_2 [R_2 - R_1 \frac{\int_1^\infty g(\eta) (\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R}) d\eta}{\int_1^\infty g(\eta) d\eta}]$$

이며  $f(\eta)$ 와  $g(\eta)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$f(\eta) = \frac{\eta^4}{4} - \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^2}{4\sigma^2 a_R} - \frac{\eta}{2\sigma^2 a_R}$$

$$g(\eta) = \exp(-\sigma^2 a_R \eta^2) u_L^{-2}(\eta)$$

### 2.3 평형 상태

유체 유동이 없는 순수한 전도만에 의한 응고 (Neumann 문제<sup>(1)</sup>)에 있어서는, 시간이 지남에 따라 액체 영역 내에서 온도 경계면 ( $T_L = T_{II}$ 인 면)이 계속 전파되며 고체는  $X(t) = 2\sigma\sqrt{a_S t}$ 의 관계식에 따라 계속 자라나게 된다. Neumann 문제에 있어서는 이와 같은 온도면의 전파를 막

을 물리적인 메커니즘이 없으므로 고체가 계속 자라게 되지만 본 문제에 있어서는 경계면을 향해 흐르고 있는 유체 유동이 온도 경계면의 전파를 억제하므로 시간이 지남에 따라 최종 평형 상태에 도달하게 된다. 식 (8)-(11)에서  $\partial/\partial\tau = 0$ 로 하면 다음과 같은 평형 상태의 방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{at } 0 < \xi < \delta \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \xi^2} + (\xi - \delta) \frac{\partial \theta_L}{\partial \xi} = 0 \quad \text{at } \xi > \delta \quad (38)$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial \xi} + \frac{\theta_R}{K_R} \frac{\partial \theta_L}{\partial \xi} = 0 \quad \text{at } \xi = \delta \quad (39)$$

$$\theta_S = 0 \quad \text{at } \xi = 0, \quad \theta_S = \theta_L = 1 \quad \text{at } \xi = \delta_{eq},$$

$$\theta_L = 0 \quad \text{at } \xi \rightarrow \infty \quad (40)$$

식 (37)-(40)의 해는 다음과 같다.

$$\theta_S(\xi) = \frac{\xi}{\delta_{eq}}, \quad \theta_L(\xi) = \operatorname{erfc}(\frac{\xi - \delta_{eq}}{\sqrt{2}}),$$

$$\delta_{eq} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{K_R}{\theta_R}} \quad (41)$$

그리고 평형 상태에서의 열유속은 다음과 같이 된다.

$$Q_{steady} = -K_S \frac{(T_F - T_C)}{X_{eq}} \quad \text{at } t \rightarrow \infty \quad (42)$$

따라서 변환된 좌표계에서  $Q_S(At)$ 와  $Q_L(At)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{Q_S(At)}{Q_{steady}} = \frac{\delta_{eq}}{\delta} \frac{\partial \theta_S}{\partial \eta} \quad \text{at } \eta = 0 \quad (43)$$

$$\frac{Q_L(At)}{Q_{steady}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta_L}{\partial \eta} \quad \text{at } \eta = 1 \quad (44)$$

### 3. 결과 및 논의

기판의 온도를 응고점 이하로 내리면 액체에서 고체로의 상변화가 일어나며 고체는 계속 자라나서 최종 평형 상태로 접근해 간다. 고체의 두께  $\delta(t)$ 는 시간에 따라 단조적으로 증가하여 최종 평형 상태에 도달하기 때문에 초기 과정과 최종 평형 상태의 해들로부터 유체 유동과 여러 가지

의 변수들,  $(\theta_R/K_R, Ste, \alpha_R)$ , 이 응고 과정에 미치는 영향을 조사할 수 있다.

응고 과정의 초기 단계에서의 고체층의 두께에 대한 표현식  $\delta^2(\tau) = b_0\tau + b_1\tau^2$ 에서, 첫번째 항은 Neumann의 순수한 전도 상태의 해를 나타내고, 두 번째 항은 유체 유동에 의해 생성된 해를 나타낸다. 계산 결과는, 모든 경우에 있어서  $b_1$  이 음의 값을 가짐으로써 기관을 향한 유체의 흐름은 언제나 고체의 성장을 방해한다는 것을 보여 주었다. 이것은 식 (2)에서 대류항이 음의 값을 가짐으로써 나타나는 현상이다. 즉, 유체의 흐름은 따뜻한 유체를 응고가 진행되고 있는 고체 표면 쪽으로 흐르게 함으로써 언제나 응고를 억제시키는 효과를 갖는다. 그리고 유체 유동이 고체의 성장에 미치는 영향은 다음의 식

$$X^2(t) = 4\sigma^2\alpha_S t [1 - |b_1/b_0|(At)] \quad (45)$$

으로부터 알 수 있다. 이 식에서  $-|b_1/b_0|(At)$  은 유체 유동이 순수한 전도 문제에 미치는 영향력의 크기를 나타낸다.  $b_0, -b_1, -(b_1/b_0)$ 의 값들을  $\theta_R/K_R, Ste, \alpha_R$ 의 함수로써 조사하여 Figs. 2-4에 도시하였다.

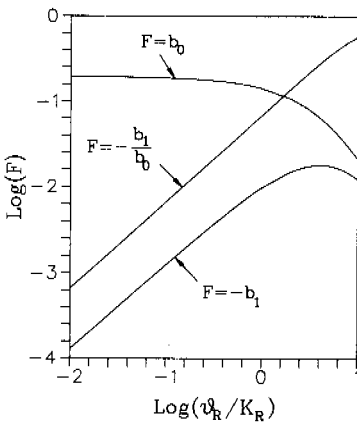


Fig. 2 Effect of temperature ratio( $\theta_R$ ) and conductivity ratio( $K_R$ ) on the growth rate of solid  $\delta^2(\tau) = b_0\tau[1 + (b_1/b_0)\tau]$  with  $\alpha_R=1$  and  $Ste=0.1$

먼저 Fig. 2에 온도비  $\theta_R$  과 열전도도비  $K_R$ 에 의한 영향을 나타내었다. Fig. 2를 보면,  $\theta_R/K_R$ 이 증가하면  $b_0$ 는 감소한다는 것을 알 수 있다. 즉, 순수한 전도 상태에서 고체의 성장 속도는 느려진다. 그러나  $-(b_1/b_0)$ 는  $\theta_R/K_R$ 이 증가하면 같이 증가한다. 즉 유체 유동의 영향은 그만큼 커지게 된다. 이것은 유체의 온도가 높

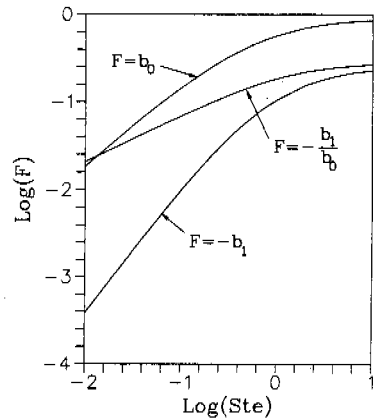


Fig. 3 Effect of Stefan number( $Ste$ ) on the growth rate of solid  $\delta^2(\tau) = b_0\tau[1 + (b_1/b_0)\tau]$  with  $\alpha_R = \theta_R/K_R = 1$

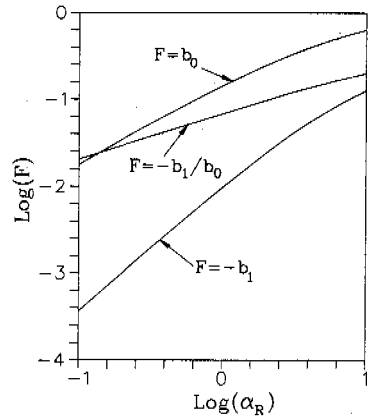


Fig. 4 Effect of diffusivity ratio( $\alpha_R$ ) on the growth rate of solid  $\delta^2(\tau) = b_0\tau[1 + (b_1/b_0)\tau]$  with  $\theta_R/K_R=1$  and  $Ste=0.1$

아지거나 열전도도가 증가하면 용고 과정은 유체 유동에 의해 그만큼 더 방해받는다를 것을 말하고 있다. 그리고 Stefan 수가 작은 경우 ( $Ste < 0.1$ )에 있어서는 Fig. 2에서와 같이  $-(b_1/b_0)$ 의 크기가  $\theta_R/K_R$ 에 거의 선형적으로 비례한다는 것을 관찰하였다. Fig. 3과 Fig. 4는 Stefan 수와  $\alpha_R$ 이 유체의 용고 속도에 미치는 영향을 나타낸다.  $Ste$ 와  $\alpha_R$ 이 증가하면,  $b_0$ 와  $-(b_1/b_0)$ 의 값들이 모두 증가된다. 즉, 순수한 전도에 의한 용고 속도는 빨라지며, 아울러 유체 유동이 미치는 영향도 함께 증대된다.

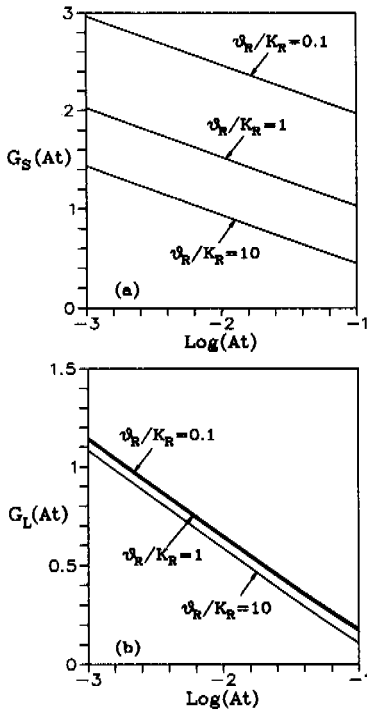


Fig. 5 Transient heat fluxes at the surface of solid ( $Q_S$ ) and the liquid side of solid-liquid interface( $Q_L$ ) for several values of  $\theta_R/K_R$  with  $\alpha_R=1$  and  $Ste=0.1$  :

- (a)  $G_S(At) = \text{Log}[Q_S(At)/Q_{steady}]$  ;
- (b)  $G_L(At) = \text{Log}[Q_L(At)/Q_{steady}]$

다음에는 유체 유동과 용고 과정에 관련된 여러 변수들이 고체와 액체의 경계면에서의 열전달 특성에 미치는 영향을 조사해 보기로 하겠다.

먼저 Fig. 5에  $\theta_R/K_R$ 에 따른 고체 표면에서의 열전달 [ $Q_S(At)/Q_{steady}$ ]과 고체-액체 경계면에서의 액체 쪽에서의 열전달 [ $Q_L(At)/Q_{steady}$ ]의 거동을 도시하였다.  $\theta_R/K_R$ 이 증대되면 성장할 수 있는 고체층의 두께가 작아짐으로 인해 준 정상 상태에 더 빨리 도달한다. 즉,  $\theta_R/K_R$ 이 증대되면 반응 시간이 짧아진다. 그에 따라 Fig. 5는,  $\theta_R/K_R$ 이 증가할수록  $Q_S(At)/Q_{steady}$ 와  $Q_L(At)/Q_{steady}$ 가 모두 감소함을 보여주고 있다.

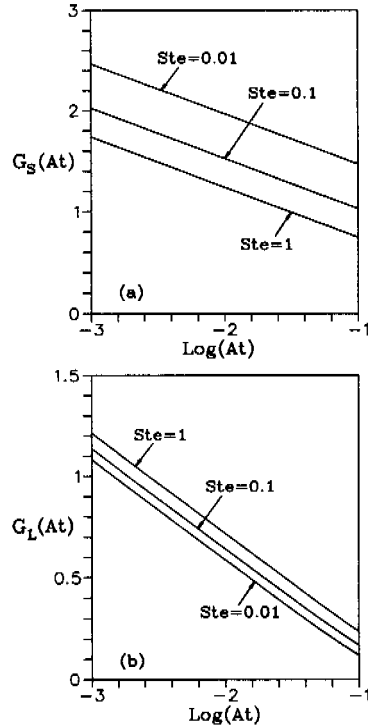


Fig. 6 Transient heat fluxes at the surface of solid ( $Q_S$ ) and the liquid side of solid-liquid interface( $Q_L$ ) for several  $Ste$ 's with  $\alpha_R=1$  and  $\theta_R/K_R=1$  :

- (a)  $G_S(At) = \text{Log}[Q_S(At)/Q_{steady}]$  ;
- (b)  $G_L(At) = \text{Log}[Q_L(At)/Q_{steady}]$  ]

정체 유동 응고 문제에서 나타나는 이러한 경향은 회전 원판에서의 특성<sup>(9)</sup>과 일치한다. 이것은 성장할 수 있는 고체의 최대 두께( $\delta_{eq}$ )는  $\theta_R/K_R$ 에 반비례하기 때문이다 [식 (41)].

Fig. 6에는 Stefan 수에 따른  $Q_S(At)/Q_{steady}$ 와  $Q_L(At)/Q_{steady}$ 의 거동을 도시하였다. 먼저 Fig. 6(a)는,  $Ste$ 가 증가할수록  $Q_S(At)/Q_{steady}$ 가 감소함을 보여주고 있다. 이것은  $Ste$ 가 커지면 고체의 성장은 정상 상태에 더 빨리 도달하기 때문이다. 그러나 Fig. 6(b)는,  $Ste$ 가 증가할수록  $Q_L(At)/Q_{steady}$ 도 함께 증가함을 보여준다. 유체 내에서는 경계면으로부터 액체 영역으로의 일종의 온도 경계면( $T = T_H$ )의 전파가 있다.

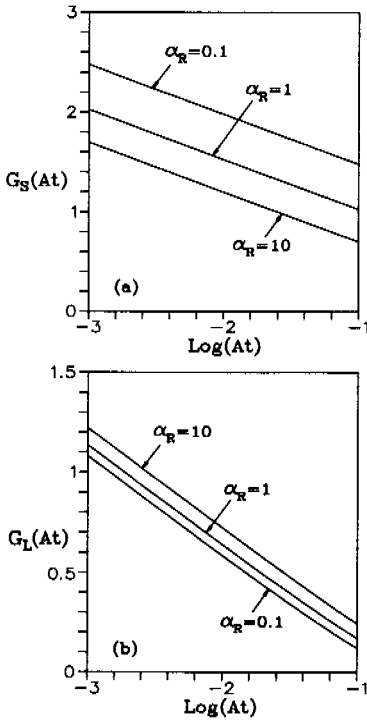


Fig. 7 Transient heat fluxes at the surface of solid ( $Q_S$ ) and the liquid side of solid-liquid interface( $Q_L$ ) several  $\alpha_R$ 's with  $\theta_R/K_R=1$  and  $Ste=0.1$ :

- (a)  $G_S(At) = \text{Log}[Q_S(At)/Q_{steady}]$  ;
- (b)  $G_L(At) = \text{Log}[Q_L(At)/Q_{steady}]$

Stefan 수가 커지면, 고체는 더 빨리 자라게 되고, 따라서 초기의 응고 과정에서는 이 온도 경계면의 전파가 더 크게 방해받게 되므로  $Q_L(At)/Q_{steady}$ 는 증가하게 된다.

Stefan 수의 경우와 같이 최종 평형 상태는  $\alpha_R$ 과 무관하며 [식(41)] 고체의 성장 속도는  $\alpha_R$ 이 증가할수록 함께 증대된다. 따라서 Fig. 7에서 볼 수 있듯이  $\alpha_R$ 에 대한 열유속의 의존성은 Stefan 수의 경우와 같은 특성을 가지고 있음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 6과 Fig. 7을 비교해 보면 비정상 열유속  $Q_S(At)$ 와  $Q_L(At)$ 는  $\alpha_R Ste = \text{constant}$  이면  $\alpha_R$ 과  $Ste$ 를 바꾸어도 거의 변화하지 않음을 알 수 있다. 즉,

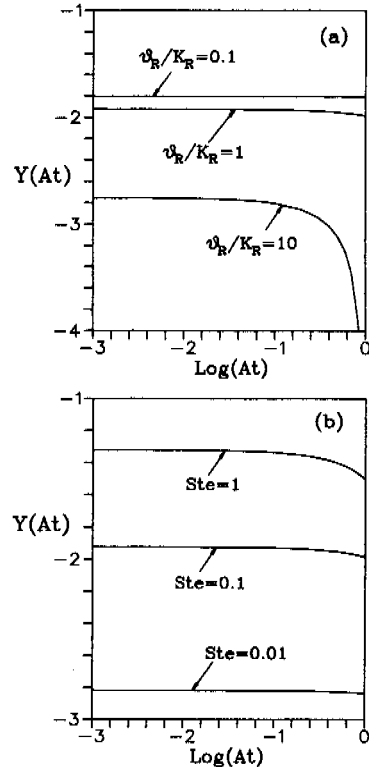


Fig. 8 Plot of  $Y(At) = \text{Log}[\frac{Q_S(At)X(At)}{Q_{steady}X_{eq}} - 1]$  with time : (a) ( $\theta_R/K_R$ )-dependency, with  $\alpha_R = 1$  and  $Ste = 0.1$ ; (b) ( $Ste$ )-dependency, with  $\alpha_R = \theta_R/K_R = 1$



$Q_S(At)$ 와  $Q_L(At)$ 는 대략적으로 두 변수의 곱인  $\alpha_R Ste$ 의 함수이다.

이상에서 여러 개의 변수들에 대한 고체의 성장  $[X(t)]$ 과 열전달  $[Q_S(At), Q_L(At)]$  특성을 각각 살펴보았는데 두 개의 물리량의 곱으로 표현되는  $Q_S(At)X(At)$ 는 주목할 만한 특징을 보여주고 있다는 것을 관찰하였다. 두 개의 변수  $\theta_R/K_R$ 과  $Ste$ 의 변화에 따른  $Y(At) = \text{Log}[Q_S(At)X(At)/Q_{steady}X_{eq} - 1]$ 의 그래프를 Fig. 8에 도시하였다. Fig. 8의 모든 경우에 있어서  $Y(At)$ 의 값은 -1보다 작다. 이것은 응고 과정 중에서  $Q_S(At)/Q_{steady}$ 와  $X_{eq}/X(At)$ 이 거의 같은 값을 갖는다는 것을 보여주고 있다. 그리고  $\theta_R/K_R$ 이 증가할수록,  $Ste$ 가 작아질수록 두 값의 차이는 더욱 더 작아진다. 즉, 응고 과정 중에서 근사적으로  $Q_S(At)/Q_{steady} \approx X_{eq}/X(At)$ 의 관계를 갖는다. 따라서 특히  $\theta_R/K_R$ 이 큰 경우, 혹은  $Ste$ 가 작은 경우에 있어서는,  $Q_S(At)$ 와  $X(At)$  중 어느 하나를 측정함으로써 다른 하나의 값을 상당히 정확하게 구할 수 있음을 말해 준다. Fig. 8(a)에서  $Z(t) = [Q_S(At)/Q_{steady}] \cdot [X(At)/X_{eq}]$ 의 값은,  $\theta_R/K_R=0.1$ 인 경우  $1 < Z(t) < 1.016$ 이며  $\theta_R/K_R=10$ 인 경우  $1 < Z(t) < 1.0018$ 이다. 그리고 Fig. 8(b)에서  $Z(t)$ 의 값은,  $Ste=1$ 인 경우  $1 < Z(t) < 1.048$ 이며  $Ste=0.01$ 인 경우  $1 < Z(t) < 1.0015$ 이다. 본 문제에 있어서 유체를 응고시키기 위한 냉각 열의 근원은 고체 표면의 찬 온도이므로 고체의 성장과 고체 표면에서의 열전달 사이에는 이와 같은 경향을 보이게 된다.

#### 4. 결론

점근적인 방법을 사용하여 비점성 평면 정체 유동에서의 응고 현상을 이론적으로 해석하였다. 무차원 지배 방정식에는 4 개의 무차원 변수들 ( $Ste, \theta_R, \alpha_R, K_R$ )이 나타난다. 그러나 이 방정식의 해는 3 개의 변수 ( $Ste, \theta_R/K_R, \alpha_R$ )에 의해 결정된다. 응고 과정의 초기 단계의 해는

시간에 대한 급수로서 전개하여 구하고 평형 상태는 정상 상태의 지배 방정식으로부터 구하였다. 기관을 향한 유체의 흐름은 따뜻한 유체를 응고가 진행되고 있는 고체-액체 경계면으로 흐르게 함으로써 언제나 고체의 응고를 억제시킨다. 유체의 온도가 높아지거나 열전도도가 증가하면 응고 과정은 유체의 유동에 의해 더 크게 방해받는다. Stefan 수가 커질수록 순수한 전도에 의한 응고 속도는 빨라지며, 아울러 유체 유동이 미치는 영향도 함께 증대된다. 평형 상태는 하나의 변수  $\theta_R/K_R$ 에 의해 결정된다.

$Ste$ 와  $\alpha_R$ 은 최종 평형 상태에 영향을 미치지 않는다. 응고가 진행 중일 때의 고체층의 두께와 고체 표면에서의 열유속 사이의 관계를 조사함으로써 특히  $\theta_R/K_R$ 이 크거나  $Ste$ 가 작을 때에는 두 개의 양 중 어느 하나를 측정함으로써 다른 하나의 양을 근사적으로 정확하게 측정할 수 있음을 보였다.

#### 참고문헌

- (1) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., pp. 282 ~ 296, Clarendon Press, Oxford.
- (2) Muehlbauer, J. C. and Sunderland, J. E., 1965, "Heat Conduction with Freezing or Melting," *App. Mech. Rev.*, Vol. 18, pp. 951 ~ 959.
- (3) Hsieh, C.K., 1995, "Exact Solutions of Stefan Problems for a Heat Front Moving at Constant Velocity in a Quasi-Steady State," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 71 ~ 79.
- (4) Beaubouef, R. T. and Chapman, A. J., 1967, "Freezing of Fluids in Forced Flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 10, pp. 1581 ~ 1587.
- (5) Epstein, M., 1976, "The Growth and Decay of a Frozen Layer in Forced Flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 1281 ~ 1288.
- (6) Sparrow, E. M., Patankar, S. V. and Ramadhyani, S., 1977, "Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region," *J. Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 520 ~ 526.
- (7) Benard, C., Gobin, D. and Zanoli, A., 1986,

- "Moving Boundary Problem : Heat Conduction in the Solid Phase of a Phase-Change Material During Melting Driven by Natural Convection in the Liquid," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 29, pp. 1669~1681.
- (8) Yoo, J.-S., 1991, "Effect of Fluid Flow Induced by a Rotating Disk on the Freezing of Fluid," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 12, pp. 257~262.
- (9) Yoo, J.-S., 1997, "Unsteady Heat Transfer From a Rotating Disk with Solidification," *Numerical Heat Transfer Part A*, Vol. 31, pp. 765~781.
- (10) 유 주석, 1999, "von- Kármán 회전 유동 하에서의 액체 실리콘의 응고와 열전달," 대한기계학회 논문집 B권, 제 23권 제 2호, pp. 185~197.
- (11) Watanabe, T., Kuribayashi, I., Honda, T. and Kanzawa, A., 1992, "Deformation and Solidification of a Droplet on a Cold Substrate," *Chem Eng. Sci.*, Vol. 47, pp. 3059~3065.
- (12) Liu, H., Lavernia, E. J. and Rangel, R. H., 1993, "Numerical Simulation of Substrate Impact and Freezing of Droplets in Plasma Spray Processes," *J. Phys. D : Appl. Phys.*, Vol. 26, pp. 1900~1908.
- (13) Rangel, R. H. and Bian, X., 1995, "Numerical Solution of the Inviscid Stagnation-Flow Solidification Problem," *Numerical Heat transfer Part A*, Vol. 28, pp. 589~603.
- (14) Rangel, R. H. and Bian, X., 1996, "The Inviscid Stagnation-Flow Solidification Problem," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 1591~1602.
- (15) Bian, X. and Rangel, R. H., 1996, "The Viscous Stagnation-Flow Solidification Problem," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 3581~3594.
- (16) Schlichting, H., 1979, *Boundary layer theory*, 7-th ed., McGraw-Hill, Inc., pp. 95~99.