2. 광학설계의 최적화 기법

지난 호의 '1. 광학계의 형상설계'에 이어서, '2. 광학설계의 최적화 기법'을 게재한다. 이번 호에는 광학설계 최적화의 수학적 기반인 비선형 연립방정식의 해에 대하여 살펴본 후에 광학설계에서 사용되고 있는 최적화 기법을 소개하고, 아울러 광학설계의 최적화 과정에서 발생하는 여러 문제점에 대하여 살펴본다.

♣글 : 이종웅 교수/청주대학교 광학공학과

I. 서론

전자계산기의 보급과 수치해석기법의 발전에 따라 설계최적화 기법이 광학설계 분야에서 널리 사용되고 있으며, 설계 소프트웨어만 있으면 누구라도 광학설계가 가능하다고 믿는 사람이 많다. 그러나 실제로 광학설계를 자동적으로 해주는 소프트웨어는 없다. 광학설계 소프트웨어는 주어진 조건 내에서 설계의 성능을 개선시키는 정도의 기능만을 가지고 있으며, 성능이 우수하면서도 생산성 있는 좋은 설계를 얻기 위하여서는 많은 경험과 지식을 필요로 한다.

광학설계의 성능개선 방법은 구간조사법과 수학적인 방법으로 크게 나누어 볼 수 있다.

구간조사법은 광학계의 설계변수를 특정구간 내에서 변화시키면서 가장 특성이 우수한 광학계를 구하는 방법으로 예로 power bending을 들 수 있다. 이 방법은 조사구간 내에서 가장 좋은 해를 얻을 수 있으나 렌즈의 매수가 많은 경우에는 사용이 어렵다. 수학적 방법은 광학계의 성능을 나타내는 여러 지표의 실제 값과의 목표값의 차이를 error 함수로 표현하고, 이 error 함수가 0이 되도록 함으로서 설계 목표를 달성하고 있으며, 일반적으로 최적화는 수학적인 방법을 의미한다. 광학설계에서는 설계변수의 수보다 설계에서 고려하여야 하는 error의 수가 더 많기 때문에 최소자승법(least squares method)이 기본적으로 사용된다[2]. 최소자승법은 error의 제곱의 합을 merit function으로 표현하고, merit function을 최소함으로서 error가 가장 작은 해를 얻는 방법으로 선형함수의 최적화에는 매우 효율적이나 비선형함수의 최적화에서는 최적점 부근에 접근하면 불안정성이 켜져 over-shooting이 발생한다. 이 때문에 이를 개선한 감쇠최소자승법(damped least squares method)이 광학설계의 최적화에 가장 많이 사용되고 있다[1,3,4].

광학설계의 최적화에서 error가 최소화되는 조건을 정규방정식(normal equation)이라고 부르며, 최적화는 정규방정식을 만들고 이를 풀어내는 과정의 반복으로 이루어진다. 정규방정식 자체는 선형 연립방정식이다. 모든 변수와 선형 방정식이 서로 1차 독립이고 변수의 수와 방정식의 수가 같으면 수학적으로는 유일해가 존재한다. 그러나 전자계산기를 사용한 연립방정식의 해에는 수치해법의 오차가 포함되어 있으며,

이 때문에 수치해법으로 얻은 해는 정규방정식을 엄밀하게 만족시키지 못한다. 효율적인 최적화를 위하여서는 가능한 한 이 오차를 줄여 주어야 하며, 설계 변수와 error 함수를 직교화함으로서 수치해의 오차를 줄이는 방법이 정규방정식의 해법에 사용되고 있고 이를 직교화기법(orthogonalization technique)라 한다[5,6].

광학설계에서는 error 함수를 줄이는 것과 함께 설계과정에서 일정하게 유지시켜야 하는 조건들이 있다. 이를 설계의 제한조건(constraint)라고 하며, 광학계의 초점거리, 물상거리, 광학계의 크기 등을 예로 들 수 있다. 제한조건이 있는 광학설계에서는 merit function의 최소화하는 조건과 제한조건을 유지하는 조건을 동시에 만족하는 해를 구하여야만 하며, Lagrange 부정승수를 사용하여 merit function과 제한조건의 유지조건을 결합하는 방법이 사용되고 있다[1].

위에서 광학설계의 최적화에 대하여 간략하게 살펴보았으며, 광학설계의 최적화는 제한조건을 유지하면서 설계의 error를 최소화하는 과정으로 이해될 수 있다.

본 해설에서는 먼저 광학설계 최적화의 수학적 기반인 비선형 연립방정식의 해에 대하여 살펴본 후에 광학설계에서 사용되고 있는 최적화 기법을 소개하고, 아울러 광학설계의 최적화 과정에서 발생하는 여러 문제점에 대하여 살펴보고자 한다.

II. 비선형 연립방정식의 해

1. 비선형 연립방정식

방정식의 수가 m, 변수의 수가 n 인 비선형 연립방정식에서 변수 vector를 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$라 하고, 함수 vector를 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$라 하면, 이 연립방정식은

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=0 \\ &\cdots\cdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=0 \end{aligned} \tag{1}$$

의 형태로 표현된다. 일반적인 수치해법에서는 비선형함수를 Taylor 급수전개를 통하여 선형화하여 근사해를 구하고, 이를 반복하여 해에 수렴하게 한다. 함수 f_i를 1차함수로 근사하면

$$f_i = f_{i,o} + \sum_j a_{ij}\Delta x_j + \cdots \tag{2}$$

$$,\ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$$,\ \Delta x_j = x_j - x_{j,0}$$

로 근사되며, (1)식의 근사해는 다음과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$F \approx F_0 + A\Delta X = 0 \tag{3}$$

(3)식에서 a_{ij}를 성분으로 하는 (m×n)행렬이며, F는 fi를 성분으로 하는 m 차원 vector이고, X는 xi를 변수로 하는 n차원 vector 이다. (3)식의 해는 다음과 같이 3가지의 경우로 나누어 볼 수 있다.

i) m ＞ n, 불능(over-constraint problem)
ii) m=n, 유일해
iii) m ＜ n, 부정(under-constraint problem)

불능인 경우에는 해가 존재하지 않으며, m=n이면 유일해가 존재하고, m＜n 이면 무한개의 해가 존재한다. 유일해가 존재하는 경우(m=n)는 비선형 방정식의 해법에 많이 사용되고 있는

Newton-Raphson method를 비선형 연립방정식으로 확장한 것이며, 이 때 해를 구하는 것은 해의 존재여부와 초기치의 선정에 달려있다.

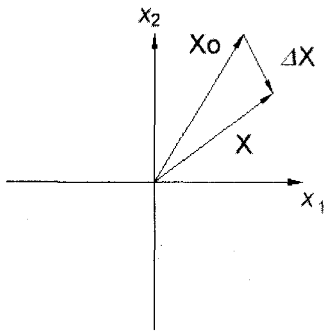
2. Over-Constraint Problem의 해

변수 vector와 함수 vector와의 관계는 vector의 좌표계 변환으로 볼 수 있다. (3)식에서 vector 는 ΔF는

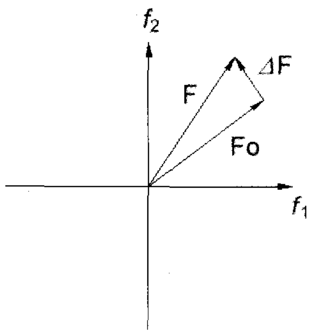
$$\begin{aligned}\Delta F &= F - F_0\\ &= A\Delta X\end{aligned}$$

로 쓸 수 있으며, 행렬 A는 vector 공간 X와 vector 공간 F간의 대응관계를 나타낸다(그림 1).

그림 1. 변수 vector공간과 error vector 공간

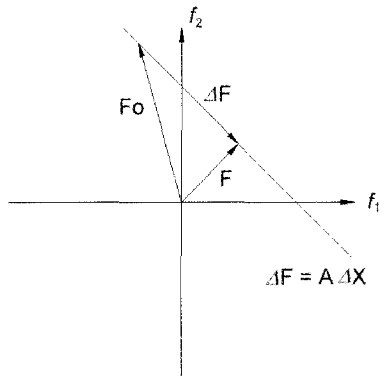


(a) Vector X



(b) Vector F

그림 2. Over-constraint problem과 error vector의 존재영역



m〉n인 경우는 vector공간 X에 대응하는 F가 vector 공간 F의 부분집합인 경우이며, F=0인 해는 이 부분집합에 포함되지 않는다. 그림 2는 이 경우의 예로서

$$\begin{aligned}f_1 &= x\\ f_2 &= -x+1\end{aligned}$$

일 때 변수 x에 대응하는 vector F는 그림 2에서 점선으로 나타나고 있다. 이 때에는 vector공간 X에 대응하는 F 중 원점에서 가장 가까운 해가 최선의 해이며, 이는 F의 norm(절대값의 제곱)이 가장 작은 해가 된다.

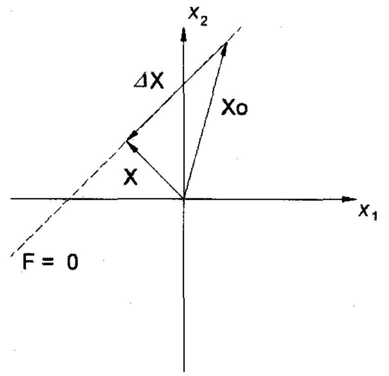
$$\| F \| = F^T F = \sum_i f_i^2 \tag{4}$$

(4)식에서 F의 norm은 함수 제곱의 합이며, 이를 최소화하는 것이 최소자승법이다.

m〉n인 경우에 (3)식에서 양변에 행렬 A의 전치행렬을 A^T을 곱하면

$$A^T F_0 + A^T A \Delta X = 0 \tag{5}$$

그림 3. Under-Constraint Problem과 해의 존재영역



이 얻어지며, (5)식에서 A^TF_0는 성분의 개수가 n인 vector이고 A^TA는 $(n\times n)$의 정방행렬이 되어, (5)식은 유일해를 갖게 된다. 이 해는 그림 2에서 norm이 최소인 F에 대응하는 해이며, 최소자승법의 해가 된다.

3. Under-Constraint Problem의 해

조건의 수가 변수의 수보다 적은 경우에 대하여 생각하여 보자. 이 경우에는 (3)식의 해가 무한개가 존재하며, F = 0 인 점에 대응하는 X 가 vector 공간 X의 부분집합으로 존재하는 경우가 된다. 그림 3은 이 경우의 예이며

$$f=x_1-x_2+1$$

일 때 f=0 인 해의 영역은 그림 3에서 점선으로 표시된 영역이 된다. 이 해의 집합 중에서 vector 공간 X의 원점에서 가장 가까운 해(norm이 가장 작은 해)는 하나만이 존재하며, X의 norm은 다음과 같다.

$$\| X \| = X^TX = \sum_j x_j^2 \tag{6}$$

m<n인 경우에 A의 전치행렬 A^T의 역행렬이 존재한다고 가정하면 (3)식은

$$F_0 + A\{A^T(A^T)^{-1}\}\Delta X = 0 \tag{7}$$

의 형태로 쓸 수 있고,

$$Y = (A^T)^{-1}\Delta X$$

로 정의하면,

$$F_0 + AA^TY = 0, \tag{8}$$
$$\Delta X = A^TY$$

으로 바꾸어진다. (8)식에서 AA^T는 $(m\times m)$의 행렬이며, Y는 성분의 개수가 m인 vector이므로 유일해가 존재하며, 이 해는 그림 3에서 $\| X \|$이 최소인 해에 대응한다.

4. 광학설계의 최적화와 비선형방정식의 해법

광학설계에서 광학수차의 보정조건과 제한조건의 유지조건은 수학적으로 (1)식의 비선형 연립방정식으로 주어지게 된다. 광학설계의 최적화에서도 변수의 수와 조건식의 수를 조절함으로서 앞에서 살펴본 바와 같이 여러 가지 해법이 가능하다고도 생각할 수 있으나, 실제로는 over-constraint의 경우만이 사용되고 있다. 이것은 광학계의 수차함수는 비선형함수이기 때문에 해가 존재하지 않은 경우가 많으며, 존재하더라도 유용하지 못한 경우가 많다. 이 때문에 변수의 수보다 error 함수의 수를 많게 하여 최소자승법을 기반으로 하는 수학적 방법을 사용하고 있다.

III. 최소자승법과 감쇠최소자승법

1. Error 함수와 Error Vector

광학설계에 고려하여야 하는 여러 요소들(광학수차, efl, bfl 등)은 설계변수의 함수로 얻어진다. 광학설계의 error는 현재의 설계가 가지고 있는 실제 값과 목표 값의 차이며, error 함수 f_i는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_i &= f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= w_i\{e_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - t_i\} \qquad (9) \\ &\quad ,w_i = \text{가중치(weighting factor)} \\ &\quad ,e_i = \text{실제 값} \\ &\quad ,t_i = \text{목표 값} \end{aligned}$$

(1)식에서 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$는 광학계의 설계변수이며, 설계과정에서 변화시킬 수 있는 면의 곡률반경, 면간의 거리, 재질의 굴절률, 비구면계수 등이다. Error 함수 f_i를 1차함수로 근사하면

$$\begin{aligned} f_i &= f_{i,0} + \sum_j a_{ij}\Delta x_j + \cdots \qquad (10) \\ &\quad ,\ a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ &\quad ,\ \Delta x_j = x_j - x_{j,0} \end{aligned}$$

로 근사되며, $\{x_{1,0}, x_{2,0}, \cdots, x_{n,0}\}$는 현재의 설계 값이며 $f_{i,0}$는 현재의 error이다. Error 함수를 성분으로 하는 error vector F는 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$F \approx F_0 + A\Delta X \qquad (11)$$

2. 최소자승법

최소자승법에서는 error vector F를 0으로 하는 해를 구하지 않고 F의 norm을 최소화하는 해를 구하고 있다. Vector F의 norm은 merit function Φ로 정의되며

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=1}^{m} f_i^2,\ \text{merit function} \\ &= F^T F \\ &= F_0^T F_0 + 2A^T F_0 \Delta X + \Delta X^T A^T A \Delta X + \cdots \qquad (12) \end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. Merit function의 최소화 조건은

$$\begin{aligned} \Phi &= 0 \\ &= 2A^T F_0 + 2A^T A \Delta X = 0 \qquad (13) \end{aligned}$$

이며, 이는 (5)식과 같고 merit function의 최소화 조건인 정규방정식(normal equation)은,

$$A^T F_0 + A^T A \Delta X = 0,\ \text{정규방정식} \qquad (14)$$

가 된다. (13)식에서 merit function이 최소화하는 것은 (11)식에서 error 함수를 1차함수로 근사하였기 때문이다. 따라서 merit function은 1차함수의 제곱으로 구성된 2차함수이며, 이 경우에는 2차항의 계수가 항상 양의 값을 가지므로 극값은 최소가 된다.

3. 감쇠최소자승법

최소자승법을 사용하여 최적화가 진행되면 merit function은 gradient가 0인 점으로 수렴하게 되며, (13)식에서 error vector F의 1차 미분행렬 A도 0으로 수렴하게 된다. 이 경우 (14)식의 정규방정식에서 ΔX의 계수행렬 A^TA가 상수항 A^TF_0보다 더 빨리 0에 수렴하며, 이 때문에 최적점 부근에서는 step size ΔX가 커져 최적점을 지나치는 현상이 발생하며, 이를 overshooting이라고 한다. Over-shooting이 발생하면 merit function은 커졌다 작아졌다를 반복하게 되며, 최적화를 계속 진행하더라도 merit function이 줄어들지 않고, 광학계도 사용불가능한 형태로 바뀌게 되는 경우가 많다.

감쇠최소자승법은 최소자승법의 merit function에 적절한 감쇠항을 추가하여 1차 미분행렬 A가 0에 수렴하더라도 step size가 커지는 것을 방지하여 최적점부근에서도 안정한 수렴이 이루어지도록 하고 있다. 감쇠항을 포함한 감쇠최소자승법의 merit function은 일반화된 merit function(generalized merit function)으로 불리며 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi = \Phi + p^2 \Delta X^T Q \Delta X, \text{ generalized merit function} \quad (15)$$
$$= F_0^T F_0 + 2A^T F_0 \Delta X + \Delta X^T (A^T A + p^2 Q) \Delta X + \cdots$$

(15)식에서 p^2는 damping factor이며, Q는 scale matrix로 각 변수에 주는 damping의 크기를 조절하는 역할을 하고 있다. 감쇠최소자승법은 damping을 주는 방법에 따라 additive damping과 multiplicative damping으로 나눠어 진다.

$$q_{ij} = \delta_{ij}, \text{ additive damping } (Q=I) \quad (16)$$

$$\delta_{ij}, \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}, \text{ multiplicative damping}$$

Additive damping은 모든 변수에 같은 크기의 damping을 주고 있으며, multiplicative damping은 변수의 민감도(sensitivity)에 따라 damping의 크기를 조절하고 있다. Multiplicative damping에서는 민감한 변수에는 큰 damping을 주어 변화량이 적어지도록 하며, 민감하지 않은 변수는 적은 damping을 주어 상대적으로 변화의 폭이 커지도록 하고 있다.

감쇠최소자승법의 정규방정식은 (15)식의 일반화된 merit function이 최소화하는 조건이며

$$\Psi = 2A^T F_0 + 2(A^T A + p^2 Q) \Delta X + \cdots = 0$$

에서

$$A^T F_0 + (A^T A + p^2 Q) \Delta X = 0 \quad (17)$$

로 주어진다.

감쇠최소자승법에 사용되는 일반화된 merit function은 최소자승법의 merit function에 변수의 변화량 vector ΔX의 norm을 추가한 것으로, (17)식에는 ΔX가 최소화되는 조건이 포함되어 있으므로 step size의 증가가 방지되고 있다.

IV. 직교화기법과 Singular Value Decomposition

1. 선형연립방정식의 해

최소자승법, 감쇠최소자승법의 정규방정식은 방정식의 수가 n, 변수의 수가 n인 선형 연립방정식이며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E \Delta X + G = 0 \quad (18)$$

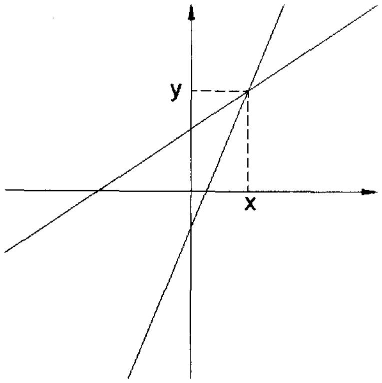
$E = A^T A$, 최소자승법

$= (A^T A + p^2 Q)$, 감쇠최소자승법

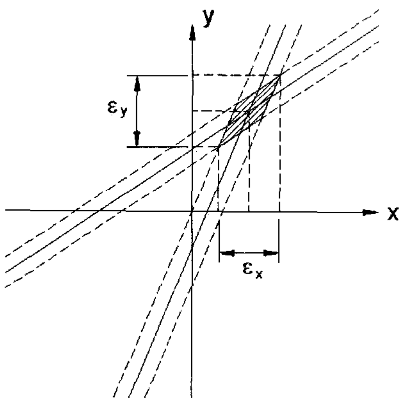
$G = A^T F_0$

선형 연립방정식에서는 계수행렬 E의 행렬식(determinant)이 0이 아니면 수학적으로 유일해를 가지며, 이는 어떠한 방법으로 풀어내더라도 해가 같다는 것을 의미한다. 그러나 수치해법에서 구하는 수치해는 오차가 포함되어 있으며, 이것은 전자계산기의 고유오차와 계산에 따른 오차의 전파에 기인한다.

그림 4. 수치해법에 따른 해의 오차



(a) 수학적인 유일해



(b) 수치해법의 해

2개의 변수 {x, y}를 가진 2개의 1차 방정식을 생각하여 보자. 연립 방정식은

$$y = a_1x + b_1 \qquad (19)$$
$$y = a_2x + b_2$$

의 형태로 바꾸어 쓸 수 있다. 해는 그림 4(a)에서와 같이 두 직선의 교점이며, 두 직선이 평행하지 않다면 유일해를 가진다. (19)식에서 주어진 x에 대응하는 y를 계산하는 과정에서 수치연산의 오차를 각각 ε_1, ε_2이라고 가정하면, 수치적인 근사해는 그림 4(b)의 빗금친 영역 내에서 얻어지며 해의 오차범위는 {ε_x, ε_y}가 된다. 이 수치해의 오차는 두 직선이 평행에 가까우면 커지며, 수직인 경우에 가장 적어지게 된다. 직교화 기법은 이와 같은 수치해의 오차를 줄이기 위하여 사용되며, (18)식의 조건식들이 서로 직교하도록 변형하여 해를 구하고 있다. 이 방법은 수치해의 오차를 줄일 뿐만 아니라 행렬식이 0이 가까운 경우에도 거의 평행한 vector를 제거함으로서 해가 발산하는 것을 방지하는 역할도 하고 있다.

2. 계수행렬의 대각화

(18)식의 선형 연립방정식에서 계수 행렬 E를 직교화하는 방법으로는 Gram-Schmidt method, modified Gram-Schmidt method 도 사용될 수 있으나, 광학설계의 최적화에서는 E의 고유 vector(eigen vector)를 구하여 대각화(diagonalization)하는 방법이 많이 사용되고 있다.

행렬 E의 고유 vector의 단위 vector를 각각 {v_1, v_2,⋯, v_n}라 하고, 이를 열(column)로 하는 행렬을 V라 하면

$$V^T = V^{-1}$$

이며, 행렬의 유사변환(similarly transformation)에 의하여

$$V^TEV = D \qquad (20)$$

로 변환되고, D는 대각행렬로서 대각성분은 행렬 E의 고유치(eigen value)가 된다. (18)식은

$V^TE(VV^T)\Delta X=-V^TG$

에서

$$DY=-H, \quad (21)$$

$\Delta X=VY,\ H=V^TG$

의 형태로 바꾸어 쓸 수 있으며, Y는 고유 vector를 좌표축으로 하는 vector로서 D가 대각행렬이며 대각요소는 E의 고유치 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$이므로 해는

$$\lambda_i y_i=-h_i \quad (22)$$

로 주어진다.

3. Singular Value Decomposition

(15)식의 일반화된 merit function Ψ는 설계 변수$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$를 base로 하는 vector X의 함수로 표현된 것이다. 이는 vector의 좌표변환

$$\Delta X=X-X_0=VY$$

를 이용하여 E의 고유 vector $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$를 base로 하는 vector Y의 함수로 바꾸어 써 줄 수 있으며

$$\Psi=Y^TDY+2HY+F_0^TF_0 \quad (23)$$

의 형태로 표현되어, Y의 성분 y_i에 대하여 2차식이 된다. 예로서 2개의 변수 $\{x_1, x_2\}$가 있는 경우에 대하여 일반화된 merit function의 등고선은 그림 5와 같이 나타낼 수 있으며, E의 고유 vector $\{v_1, v_2\}$는 타원의 장축, 단축에 해당하고 고유치 $\{\lambda_1, \lambda_2\}$의 제곱근은 각각 장축, 단축의 반지름의 역수에 대응된다. (23)식에서 Y 공간에 대한 의 gradient를 구하면

$$\nabla\Psi= H$$

이며, (21)식에서 최적화는 Ψ의 negative

그림 5. Merit function의 등고선과 고유 vector

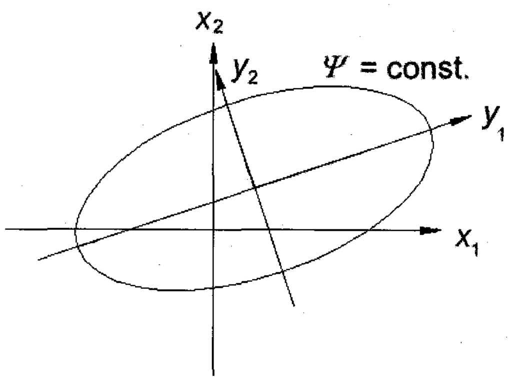
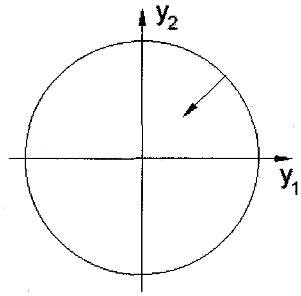
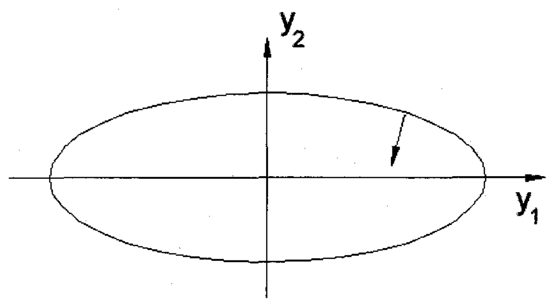


그림 6. Matrix의 조건수와 최적화의 진행방향



(a) good contintioning



(b) ill conditioning

gradient 방향을 따라 진행되는 것을 알 수 있다. 그림 6은 최적화가 잘 진행되는 경우(good conditioning)와 잘 진행되지 않는 경우(ill conditioning)의 예를 보여주고 있다. 행렬 E의 고유치에서 최대치와 최소치의 비를 조건수(conditioning number) Λ로 정의하면

$$\Lambda = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}, \text{조건수} \tag{24}$$

조건수는 그림 5에서 타원체의 모양을 나타낸다.

그림 6(a)는 조건수가 1인 경우로서 Ψ의 등고선은 원을 이루고 있으며, negative gradient는 최저점(원의 중심)을 향하고 있다. 반면에 그림 6(b)는 조건수가 큰 경우이며 등고선은 긴 타원을 이루고 있고, negative gradient는 최저점을 향하고 있지 않다. 따라서 조건수가 1에 가까우면 최적점으로 빨리 수렴할 것으로 예상되며, 반면에 조건수가 큰 경우는 최적화의 진행이 매우 느려질 것으로 예상된다. Singular value decomposition(SVD)은 (21)식에서 고유치가 작은 성분을 제거함으로서 수렴속도를 높이는 방법으로 설계변수가 많은 경우에 유용하게 사용될 수 있다. (24)식에서 조건수를 줄이려면 고유치가 큰 vector를 제거하여도 가능할 것으로 생각되나, 고유치가 작은 vector를 제거하는 것은 step size를 줄이기 위함이다. 그림 5에서 주축상의 반지름은 고유치의 제곱근의 역수이며 고유치가 적은 방향의 경사가 완만하다. 최적화는 경사가 급한 방향으로 진행하는 것이 보다 효율적이며, 부수적으로 step size가 적어지는 효과가 있게 된다.

V. 최적화와 제한조건의 유지

1. 설계의 제한조건

광학설계의 최적화에서는 수차를 줄이면서도 설계사양에서 요구되는 특별한 parameter들은 일정한 값으로 유지시켜야 하며, 광학계의 초점거리, 물상거리, 전체 공간 등을 그 예로 들 수 있다. 제한조건은 error 함수와 마찬가지로 설계변수 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$의 함수 s_k로 나타낼 수 있다. 유지하고자 하는 목표치를 t_k라 하면 제한조건은

$$s_k\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = t_k \tag{25}$$

로 표현할 수 있다.

제한조건을 유지시키는 간단한 방법중의 하나는 (25)식의 조건을 merit function에 error 함수로 포함시키는 것이다. 이 때 제한조건의 error f_k는 (9)식과 마찬가지로 가중치 w_k를 주어

$$f_k = W_k(s_k - t_k) \tag{26}$$

형태로 표현할 수 있으며, 최적화는 error를 최소화하는 방향으로 진행하기 때문에 적절한 가중치를 부여하면 제한조건을 목표치 부근으로 유지시킬 수 있다.

2. Lagrange 부정승수법

제한조건을 error항에 포함시키는 경우에는 목표치에 크게 벗어나지 않게는 할 수 있으나, 줌 렌즈계의 설계에서 각 군의 굴절능과 같이 최적화 동안 특정한 값을 유지시켜야 하는 경우도 있다. 이 경우에는 Lagrange 부정승수를 사용하여 제한조건을 유지하는 조건과 merit function의 최소화 조건을 결합시키고 있다.

(25)식의 제한조건은 선형근사를 통하여

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \Delta x_j = t_k - s_{k,0} = u_k \qquad (27)$$

$$b_{kj} = \frac{\partial s_k}{\partial x_j}$$

로 쓸 수 있고, p개의 제한조건이 있을 때 전체 제한조건을 유지하는 조건은 다음과 같다.

$$B \Delta X = U \qquad (28)$$

(28)식은 방정식의 수가 p, 변수의 수가 n인 연립 방정식이 된다. (27)식의 조건이 만족된다고 가정하면, Lagrange 부정승수 z_k를 사용하여 최적화의 merit function은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi_L = \Psi + \sum_k z_k \{\sum_j b_{kj} \Delta x_j - u_k\} \qquad (29)$$

윗 식에서 (27)의 조건이 만족된다면 Lagrange 부정승수 z_k와 무관하게 Ψ와 Ψ_L은 같은 값을 가진다. 변수 x_j에 대한 (29)식의 최소화조건은

$$\partial \Psi_L = 0 = \partial \Psi \quad + \sum_k z_k b_{kj}$$

로 주어지며, 이를 matrix로 정리하면

$$(A^T A + p^2 Q) \Delta X + A^T F_0 + B^T Z = 0 \qquad (30)$$

으로 표현된다. (30)식에서 Z는 Lagrange 부정승수 $\{z_1, z_2, \cdots, z_p\}$를 성분으로 하는 vector이며, 이 식은 (n+p)개의 변수를 가진 n개의 방정식이 된다. 여기에 제한조건의 유지조건 (28)식을 추가하면 전체적으로 (n+p)의 변수를 가진 (n+p)개의 선형 연립방정식이 되어, 제한조건이 유지되면서 (29)식의 Ψ_L이 최소화 된다.

VI. 최적화기법의 문제점과 한계

앞에서 최소자승법과 감쇠최소자승법을 사용하는 광학설계의 최적화기법에 대하여 살펴보았다. 광학설계의 실무에 있어서 최적화가 잘 진행되지 않거나 오히려 초기설계보다 나빠지는 경우를 종종 보게 되며 이것은 다음과 같이 설명할 수 있다.

최적화가 잘 진행되지 않는 근본적인 원인은 함수의 비선형성에 있다. 선형 연립방정식의 경우에는 계수행렬의 행렬식이 0이 되지 않는다면 해가 존재하지만, 비선형함수의 경우에는 주어진 조건을 만족하는 해 자체가 없는 경우도 있기 때문이다. 비선형함수의 최적화에서 최적화 과정에서 최소화되는 것은 error 함수의 1차항까지이며, 2차 이상의 고차항은 근사오차로 남아 있게 된다. 이 때문에 선형 error는 적어지지만 2차 이상의 항은 오히려 커지게 되어 최적화 후에 merit function이 커지는 경우도 종종 나타난다.

또한 최적화에서 사용불가능한 해가 얻는 경우도 많다. 이것은 해 자체가 사용 불가능한 영역에 있는 경우도 있으나, error 함수의 상호 종속성에 기인하는 경우도 많다. 예로서 error 함수의 gradient 방향이 서로 반대인 경우에는 하나가 적어지면 다른 하나는 커지게 된다. 직교화 기법을 쓰지 않는 경우에는 해가 발산하는 경향을 가지게 되어 사용불가능한 해가 되며, 직교화 기법을 사용하더라도 최적화는 매우 불안정하게

진행된다. 직교화기법은 상호 종속적인 vector를 제거하여 해의 발산은 방지할 수는 있으나, 종속적인 error중의 하나가 커지는 것은 방지할 수 없기 때문이다.

감쇠최소자승법, 최소자승법은 merit function의 negative gradient 방향을 따라 진행된다. 광학계의 merit function은 매우 복잡한 형태의 등고선을 가지는 지형으로 생각할 수 있고, 경사를 따라 진행하는 최적화는 오목한 local minimum에 빠지는 경우에는 빠져 나올 수 없게 된다. 주어진 변수 영역 내에서 궁극적인 최소점(global minimum)을 찾는 알고리즘에 대한 연구는 최근에 활발하게 진행되고 있으나, 이의 응용은 아직까지 제한적이며 사용이 불가능한 해가 되는 경우가 많다.

광학설계에서 최적화는 만능설계법으로 잘못 이해되는 경우가 많다. 최적화는 수학적, 현실적 한계를 가지고 있으며, 이 한계는 초기설계에 따라 결정된다. 좋은 초기설계는 merit function의 큰 분지이며 이 때만이 다양하고 유용성 있는 설계를 얻을 수 있을 것이다. 광학 설계에서 최적화를 많이 한다고 좋은 설계를 얻는 것은 아니다. 단순히 최적화에 시간과 노력을 투입하기보다는 광학계를 구성하고 있는 여러 광학소자의 역할을 이해하고, 각 소자의 수차부담을 적절하게 배분함으로서 최적화를 통하여 좋은 설계가 나올 수 있는 여건을 만들어 주는 것이 더 필요하다고 하겠다.

[참고문헌]

[1] T. H. Jamison, Optimization Techniques in Lens Design,(American Elsevier Pub. Co. Inc., New York, 1971).

[2] S. Rosen and C. Eldert, 'Least squares method for optical system design', J. Opt. Soc. Am., 44, 250(1954).

[3] J. Meiron, 'Damped Squares Methods for Automatic Lens Design', J. Opt. Soc. Am., 55, 1105(1965).

[4] D. P. Feder, 'Automatic Lens Design', Appl. Opt. 2, 1209(1963).

[5] D. S. Grey, 'Aberration Theories for Semiautomatic Lens Design by Electronic Computer', J. Opt. Soc. Am., 53, 672(1963).

[6] G. E. Forsythe and C. B. Moler, Computer Solution of Linear Algebraic Systems,(Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1967).

잡가정보

Y6B-'B'는 10억명, 'Billion'의 머리글자로 2000년에 세계 인구가 60억명을 돌파한다는 의미. 인구 팽창을 통제하지 못할 경우 인류는 전쟁, 기아, 경제적 붕괴 같은 심각한 문제에 처하게 될 것이라는 주장이 들어있다. Y2K처럼 전세계적으로 동시에 문제를 일으키지는 않지만 식량난과 주거난, 교통난, 학교 과밀 현상을 악화시키고 동식물의 급속한 멸종과 지구 온난화 등을 부채질해 Y2K보다 훨씬 과제를 안겨 줄 것이다.

ASP-ASP(Application Service Provider)는 애플리케이션 서비스 제공업체. 즉 웹애플리케이션 호스팅 서비스를 하는 업체를 말한다. 웹애플리케이션 호스팅 서비스는 소프트웨어를 패키지 형태로 판매하지 않고 일정한 요금을 받고 인터넷을 통해 임대해 주는 서비스. 예를 들면 인터넷과 같은 통신망을 통해 전사적자원관리(ERP), 제품정보관리(PDM), 그룹웨어, 전자상거래(EC), 전자문서교환(EDI) 등 하이엔드 애플리케이션과 오피스 제품 등을 빌려주는 것이다.