

2개 매개변수를 갖는 탄성지반위에 놓인 복합재료 적층판의 점탄성적 휨, 진동 및 좌굴해석

Viscoelastic Bending, Vibration and Buckling Analysis of Laminated Composite Plates on Two-parameter Elastic Foundation

한 성 천¹⁾ · 장 석 윤²⁾

Han, Sung Cheon · Chang, Suk Yoon

요 약 : 전단 층을 갖는 2개 매개변수 탄성지반 위에 놓인 복합재료 적층판에서 휨, 진동 및 좌굴해석을 위해 에너지 방법을 사용해 탄성해를 구하였다. 복합재료 적층판의 점탄성 해석은 유사-탄성방법을 사용해 탄성해를 구하였다. 전단에 의한 효과는 3차 전단변형이론을 적용하여 고려하였다. 유도된 식들을 검증하기 위해 LUSAS프로그램에 의한 탄성지반위에 놓인 이방성 판의 처짐과 비교하였다. 점탄성 휨, 진동 및 좌굴해석에 관한 수치해석결과들은 적층순서, 적층 수, 재료 비등방성과 전단지반계수 등에 따른 효과를 보여 준다.

ABSTRACT : An energy method has been used for an elastic formulation of bending, vibration and buckling analysis of laminated composite plates on two-parameter elastic foundations. A quasi-elastic method is used for the solution of viscoelastic analysis of the laminated composite plates. The third-order shear deformation theory is applied by using the double-fourier series. To validate the derived equations, the obtained displacements for simply supported orthotropic plates on elastic foundations are compared with those of LUSAS program. Numerical results of the viscoelastic bending, vibration and buckling analysis are presented to show the effects of layup sequence, number of layers, material anisotropy, and shear modulus of foundations.

핵 심 용 어 : 점탄성적 해석, 2개 매개변수 탄성지반, 복합적층판, 전단지반계수, 3차전단 변형 이론.

KEYWORDS : Viscoelastic Analysis, Two-parameter elastic foundation, Laminated composite plates, Shear modulus of foundations, Third-order shear deformation theory.

1) 정희원, 대원과학대학 토목과 조교수, 공학박사
2) 정희원, 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사

본 논문에 대한 토의를 2002년 4월 30일까지 학회로 보내 주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1. 서론

복합재료는 주로 항공기나 우주구조물에 사용되어 왔으나 최근에는 교량의 상판이나 화학물질과 접하는 부분의 보수, 보강재로 토목이나 건축분야에서도 사용이 확장되는 추세에 있다. 현재 사용 중인 복합재료에는 합성 고분자 수지가 사용되는 경우도 있다. 고분자 재질은 사용온도 내에서 상당한 점탄성적 거동을 보인다. 결과적으로 복합재료 구조물에 고분자 재료들을 사용함으로써 이 재질들의 물성치는 시간에 따라 변화할 수 있으며, 예기치 못한 성능 저하 등을 정확히 평가할 필요가 있다. 하지만 지금까지는 추정 가능한 사용조건하에서 복합재료로 구성된 구조물의 성능 저하를 체계적으로 분석하려는 시도가 없었다.

특히 토목구조물 중 대부분의 판 구조는 지반위에서 구조물을 직접 지지하거나 지중구조물과의 연결을 위한 구조재로 이용되고 있어 지반위에 놓인 복합재료 적층판의 점탄성적 휨, 진동 및 좌굴해석은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상이라고 할 수 있다.

탄성지반위에 놓인 판요소의 해석은 1987년 Salari 등⁽¹⁵⁾에 의해 Winkler 지반위에 놓인 원형판의 자유진동해석이 이루어졌으며 전단층을 고려한 탄성지반에 관한 이론은 Pasternak⁽⁹⁾가 최초로 제안하고 연구하였다.

높은 강도-하중비와 같은 특수한 장점을 가진 복합재료를 구조물에 적절하고 효과적으로 사용하기 위해서는 다양한 하중과 외부조건하에서의 복합재료의 거동을 정확히 예측하는 것이 매우 중요하다. 기존의 적층복합판에 관한 해석은 전단변형효과를 고려하지 않은 Kirchhoff의 가정에 기반을 둔 이론이 대부분이었다. 그러나 적층판과 두께가 두꺼운 판에서는 전단변형의 효과가 매우 중요한 것으로 알려져 있다. Reissner⁽⁵⁾는 에너지 원리를 통한 전단변형효과를 이용하여 Kirchhoff의 원리를 발전시켰고 1951년 Mindlin⁽⁶⁾은 전단보정계수에 의해 전단변형효과를 조절할 수 있는

일차전단변형이론을 제안하였다. 1973년 Whitney⁽⁷⁾는 전단보정계수를 이용하여 직교 이방성 적층판의 해석을 수행하였으며 고차전단변형이론은 1974년 Nelson and Lorch⁽⁸⁾등에 의해 각각 9개와 11개의 변수로 제안되었으며 1984년 Reddy⁽¹⁰⁾는 전단변형율과 전단응력이 판의 상부표면과 하부표면에서 0이 된다는 조건으로 11개의 변수를 5개로 줄인 고차전단변형이론을 제안하였다.

본 연구에서는 2개 매개변수를 갖는 탄성지반의 효과와 3차전단변형이론을 고려한 복합재료 적층판의 평형방정식을 에너지 방법을 통하여 유도하고 Schapery⁽⁴⁾의 유사-탄성법을 사용하여 점탄성적 휨, 진동 및 좌굴해석을 수행하였다. 복합재료 적층판의 적층순서, 적층 수, 화이버의 보강방향, 재료의 비등방성 및 탄성지반의 지반계수들의 영향을 비교, 분석하여 도표와 그림으로 나타내었다. 유도된 식들의 검증을 위하여 범용유한요소 해석 프로그램인 LUSAS를 이용하여 탄성지반위에 놓인 이방성판의 해석결과를 비교하였고 시간의 변화에 따른 처짐, 진동수 및 좌굴강도의 점탄성적 변화 특성을 검토하기 위한 구조기술자들을 위하여 여러결과들을 도표화 하고자 한다.

2. 탄성해석

2개 매개변수를 갖는 탄성지반위에 놓인 적층판은 그림 1과 같다.

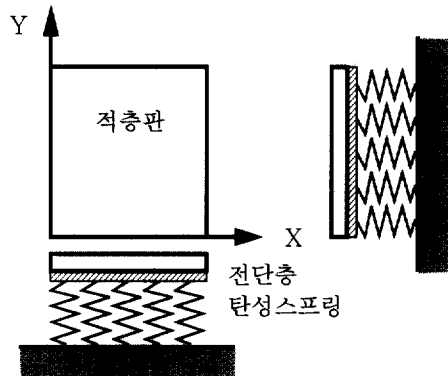


그림 1. 2개 매개변수 탄성지반위에 놓인 적층판

적층판 하부의 임의점에서의 반력강도를 변위 u_3 에 비례하며 Pasternak⁽⁹⁾의 탄성지반 모델에 의한 전단효과를 포함하는 F_e 로 가정하였다. 반력강도 F_e 는 식(1)과 같다.

$$F_e = ku_3 - G(\nabla^2 u_3) \quad (1)$$

여기서 G 는 탄성지반의 전단지반계수이고 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 이다.

일정한 두께 h 를 갖고 중립축에 대하여 대칭 혹은 역대칭으로 적층된 적층판을 그림 2에 나타내었다.

판의 직교좌표계를 $\{X, Y, Z\}$ 로 나타내고, 고차전단변형을 고려하기 위하여 중립면으로부터 거리가 z 만큼 떨어져있는 점의 X 및 Y 축 방향의 변위 u_1, u_2 는 중립면에서의 변위 u_0, v_0 와 두께 방향의 3차식으로 나타낸다. 직교좌표계를 갖는 판의 임의점 (x, y, z) 에서의 변위를 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + z \left\{ \phi_x - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left[\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \right\} \\ u_2 &= v_0 + z \left\{ \phi_y - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left[\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \right\} \\ u_3 &= w_0 \end{aligned} \quad (2)$$

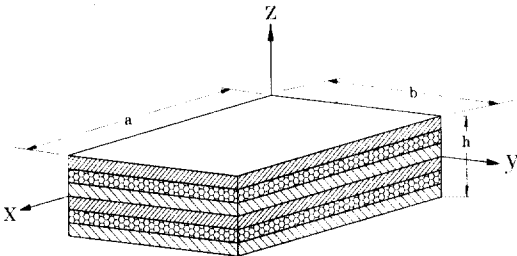


그림 2. 적층판의 좌표계

여기서 (u_1, u_2, u_3) 는 판의 임의점 (x, y, z) 의 X, Y, Z 방향의 변위이며, u_0, v_0, w_0 는 $z=0$ 인 판의 중립면상의 임의점 (x, y) 의 변위이고, ϕ_x, ϕ_y 는 X 및 Y 방향의 중립면에 수직인 선분의 회전각을 나타내며 $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ 는 (x, y) 의 함수이다.

미소변형이론에 의하여 3차원 탄성체의 변형도-변위 관계식에서 고차항을 무시하고, 판에 수직인 변형도를 무시하면 식(3)과 같은 판의 변형도-변위 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{1,x} = \epsilon_x^0 + z \cdot (\chi_x^0 + z^2 \cdot \chi_x^2) \\ \epsilon_y &= u_{2,y} = \epsilon_y^0 + z \cdot (\chi_y^0 + z^2 \cdot \chi_y^2) \\ \epsilon_z &= u_{3,z} = 0 \\ \epsilon_{xy} &= u_{1,y} + u_{2,x} = \epsilon_{xy}^0 + z \cdot (\chi_{xy}^0 + z^2 \cdot \chi_{xy}^2) \\ \epsilon_{xz} &= u_{1,z} + u_{3,x} = \epsilon_{xz}^0 + z^2 \cdot \chi_{xz}^2 \\ \epsilon_{yz} &= u_{2,z} + u_{3,y} = \epsilon_{yz}^0 + z^2 \cdot \chi_{yz}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\epsilon_x^0 = u_{0,x}$, $\epsilon_y^0 = v_{0,y}$,

$$\begin{aligned} \chi_x^0 &= \phi_{x,x}, \chi_x^2 = -c_2(w_{0,xx} + \phi_{x,x}), \\ \chi_y^0 &= \phi_{y,y}, \chi_y^2 = -c_2(w_{0,yy} + \phi_{y,y}), \\ \chi_{xy}^0 &= \phi_{y,x} + \phi_{x,y}, \epsilon_{xy}^0 = u_{0,y} + v_{0,x}, \\ \chi_{xy}^2 &= -c_2(2w_{0,xy} + \phi_{x,y} + \phi_{y,x}), \\ \chi_{xz}^2 &= -c_1(w_{0,x} + \phi_x), \epsilon_{xz}^0 = \phi_x + w_{0,x}, \\ \chi_{yz}^2 &= -c_1(w_{0,y} + \phi_y), \epsilon_{yz}^0 = \phi_y + w_{0,y}, \\ c_1 &= 4/h^2, c_2 = c_1/3 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

동적 평형방정식을 유도하기 위하여 Hamilton 원리를 적용하면 식(4)와 같다.

$$\delta \int_0^t [(T - (U + V))] dt = \delta \int_0^t (T - \Pi) dt = 0 \quad (4)$$

여기서 U, V 그리고 T 는 각각 변형에너지, 외력에 의한 일 그리고 운동에너지이다. 그리고 Π 는 전체 포텐셜 에너지이며 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{yz} \epsilon_{yz} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} \\ & + \sigma_{xy} \epsilon_{xy}] dx dy dz - \int_R q w_o dx dy \\ & - \frac{1}{2} \int_R \left\{ N_1 \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + N_2 \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_R \left\{ k w_o^2 - G \left[\left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 N_1, N_2 는 각각 x, y 축 축방향력, V 는 판의 체적이고 R 은 중립면이다.

두께 h 를 갖는 판의 내력은 식(6)과 같이 작용력을 두께에 대하여 적분하여 구할 수 있고 식(6)에 응력-변형을 관계식과 변형-변위 관계식을 대입하여 정리하면 식(7)과 같이 단면력-변위 관계식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^3) dz \\ &\quad (i=x, y, xy) \\ (Q_x, R_x) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}(1, z^2) dz \\ (Q_y, R_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}(1, z^2) dz \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & E_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} \\ E_{ij} & F_{ij} & H_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \epsilon_{xy}^o \\ \chi_x^o \\ \chi_y^o \\ \chi_{xy}^o \\ \chi_x^2 \\ \chi_y^2 \\ \chi_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} & D_{55} & D_{45} \\ A_{45} & A_{44} & D_{45} & D_{44} \\ D_{55} & D_{45} & F_{55} & F_{45} \\ D_{45} & D_{44} & F_{45} & F_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \chi_x^2 \\ \chi_y^2 \end{Bmatrix}$$

여기서 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} , 등은 적층판의 강성이며 k 번째 적층판의 변환된 강도계수 $(\overline{Q}_{ij})_k$ 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) \\ = \int_{-h/2}^{h/2} \overline{Q}_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \\ (i, j=1, 2, 6, 5, 4) \end{aligned}$$

식(6)과 (12)을 식(4)에 대입하여 부분적분하여 정리하고 $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \phi_x$ 와 $\delta \phi_y$ 의 계수로 정리하면 Reddy의 운동방정식에 탄성지반의 효과가 고려된 식(8)과 같은 새로운 동정평형방정식을 얻을 수 있다.⁽²¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_o \ddot{u}_o + J_1 \ddot{\phi}_x - c_2 I_3 \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_o \ddot{v}_o + J_1 \ddot{\phi}_y - c_2 I_3 \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial y} \\ \frac{\partial \overline{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{Q}_y}{\partial y} \\ &+ c_2 \left(\frac{\partial^2 \hat{P}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{P}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \hat{P}_y}{\partial y^2} \right) \\ &+ N_1 \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \right) + N_2 \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right) + (q - F_e) \\ &= I_o \ddot{w}_o - c_2^2 I_6 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_o}{\partial x^2} \right) \\ &+ c_2 \left[I_3 \left(\frac{\partial^2 \ddot{u}_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{v}_o}{\partial x^2} \right) \right. \\ &\left. + J_4 \left(\frac{\partial^2 \ddot{\phi}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\phi}_y}{\partial x^2} \right) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial y} - \hat{Q}_x \\ = J_1 \ddot{u}_o + K_2 \ddot{\phi}_x - c_2 J_4 \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{M}_y}{\partial y} - \hat{Q}_y \\ = J_1 \ddot{v}_o + K_2 \ddot{\phi}_y - c_2 J_4 \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } F_e = kw_o - G \left(\frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \right).$$

$$\hat{M}_i = \beta M_i - \gamma c_2 P_i,$$

$$\hat{P}_i = \gamma c_2 P_i + \alpha M_i, \quad \hat{Q}_i = \beta Q_i - \gamma c_1 R_i$$

$$\bar{Q}_i = \beta(1-\alpha) Q_i - \gamma c_1 R_i,$$

$$I_i = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^k z^i dz \quad (i=0,1,2,\dots,6),$$

$$J_i = I_i - c_2 I_{i+2}, \quad K_2 = I_2 - 2c_2 I_4 + c_2^2 I_6,$$

판의 변위 및 내력에 대한 경계조건은 4변이 단순지지인 경우 화이버의 보강방향에 따라 각각 직교 이방성인 경우 SS1, 역대칭 앵글-플라이인 경우 SS2로 식(9)와 같이 가정된다.^{(10),(21)}

직교이방성인 경우:

$$(1) \quad x=0, a \text{ 에서 } u_2 = N_x = 0$$

$$(2) \quad y=0, b \text{ 에서 } u_1 = N_y = 0$$

역대칭 앵글-플라이인 경우:

$$(1) \quad x=0, a \text{ 에서 } u_1 = N_{xy} = 0$$

$$(2) \quad y=0, b \text{ 에서 } u_2 = N_{xy} = 0$$

직교이방성, 앵글-플라이 공통의 경우:

$$(1) \quad x=0, a \text{ 에서}$$

$$u_3 = \phi_y = M_x = P_x = 0$$

$$(2) \quad y=0, b \text{ 에서}$$

$$u_3 = \phi_x = M_y = P_y = 0 \quad (9)$$

수직하중이 작용하는 경우의 두께가 일정한 판의 변위 (u_3, ϕ_x, ϕ_y)를 식(9)의 경계조건을 만족하는 이중삼각함수의 무한 급수형태로 가정하면 식(10)와 같다.

$$\begin{aligned} u_3 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn}(t) f_3 e^{-i\omega t} \\ \phi_x &= \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn}(t) f_2 e^{-i\omega t} \\ \phi_y &= \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn}(t) f_1 e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (10)$$

변위 (u_1, u_2)는 식(11)과 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}(t) [k_1 f_2 + k_2 f_1] e^{-i\omega t} \\ u_2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn}(t) [k_1 f_1 + k_2 f_2] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $f_1 = \sin \alpha x \cos \beta y$,

$$f_2 = \cos \alpha x \sin \beta y, \quad f_3 = \sin \alpha x \sin \beta y,$$

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \text{ 그리고}$$

역대칭 앵글플라이의 경우 : $k_1 = 0, k_2 = 1$,

직교이방성인 경우 : $k_1 = 1, k_2 = 0$ 이다.

식(7)과 (10) 그리고 (11)을 식(8)에 대입하면 식(12)와 같은 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} - \{F_e\} \quad (12)$$

여기서 $[M]$ 은 질량행렬, $[K]$ 는 강성행렬, $\{F\}$ 는 하중벡터, $\{F_e\}$ 는 탄성지반의 반력강도이고 $\{\Delta\} = \{U_{mn} V_{mn} W_{mn} X_{mn} Y_{mn}\}^T$ 이다.

식(12)에서 시간에 관한 항을 무시하고 면내하중 항을 고려하면 좌굴 해석을 위한 식(13)과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[K]\{\Delta\} + \lambda[G]\{\Delta\} = \{F\} - \{F_e\} \quad (13)$$

여기서 λ 는 좌굴하중이고 $[G]$ 는 면내하중에 의한 행렬이다. 식(13)에서 면내하중에 관한 항을 무시하면 정적 해석을 위한 식(14)와 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[K]\{\Delta\} = \{F\} - \{F_e\} \quad (14)$$

3. 점탄성 해석

복합재료 적층판의 점탄성 물성치는 참고문헌(3)에 주어진 것처럼 미세 재료역학적 모델링법을 사용하여 식(15)와 같이 결정하였다.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{ft}V_f + E_mV_m \\ E_2 &= \frac{E_{ft}E_m}{V_mE_{ft} + V_fE_m} \\ G_{12} &= \frac{G_fG_m}{V_mG_f + V_fG_m} \\ \nu_{12} &= V_f\nu_f + V_m\nu_m \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 E, G, V 는 탄성계수, 전단탄성계수, 체적 비이며 첨자 f, m 은 화이버, 수지를 나타낸다.

복합재료 적층판의 화이버는 탄성적 거동을 보이는데 반하여 복합재료 적층판의 수지는 점탄성적 거동을 보이며 수지의 크리프 컴플라이언스는 식(16)과 같은 Findley의 파워 함수로 가정하였다.⁽¹²⁾

$$S(t) = S_0 + a't^\gamma \quad (16)$$

여기서 상수 S_0, a', γ 는 표 1에 주어졌다.

영의 계수 형태가 더욱 편리한 이유로 식(16)을 탄성-점탄성 일치원리를 이용하여 변환시키면 식(16)의 라플라스 변환 계수함수 $E_m(s)$ 는 식(17)과 같다.

표 1. 복합재료의 물성치

| | |
|----------|--|
| E_{ft} | $1.66 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ |
| E_{fm} | $1.38 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ |
| ν_f | 0.3 |
| G_f | $2.75 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ |
| E_m | $4.60 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ |
| ν_m | 0.3 |
| S_0 | $1/E_m$ |
| a' | $4.22 \times 10^{-4} (\text{N/mm}^2)^{-1}$ |
| γ | 0.2 |
| V_f | 0.62 |

$$E_m(s) = \frac{1}{[a'\Gamma(1+\gamma)s^{-\gamma}/S_0] + 1} \cdot \frac{1}{sS_0} \quad (17)$$

$E_m(s)$ 의 라플라스 역변환은 식(18)과 같다.

$$E_m(t) = \frac{1}{S_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_1}{\Gamma(k\gamma + 1)} \quad (18)$$

여기서 $\Gamma_1 = (-1)^k t^{k\gamma} [a'\Gamma(1+\gamma)/S_0]^{k\gamma}$ 이다. 식(18)은 $t > \frac{1}{2} [S_0/a'\Gamma(1+\gamma)]^{1/\gamma}$ 일 때 발산하게 되므로 참고문헌(4)의 유사-탄성법을 사용하여 t 가 클 경우의 $E_m(t)$ 를 구하였다. 유사-탄성법에 의한 $E_m(t)$ 와 엄밀 라플라스 역변환의 결과를 비교하여 그림 3에 나타내었다.

점탄성 해석은 유사-탄성법에 의한 시간에 따른 함수인 강성 $A_{ij}(t), B_{ij}(t), D_{ij}(t), E_{ij}(t), F_{ij}(t)$ 와 $H_{ij}(t)$ 를 구하여 평형방정식 식(12)-(14)에 대입하여 수행하였다.

4. 결과분석

복합재료 적층판의 보강방향, 적층 수, 지반계수의 변화와 적층순서가 처짐, 진동수 및 좌굴하중

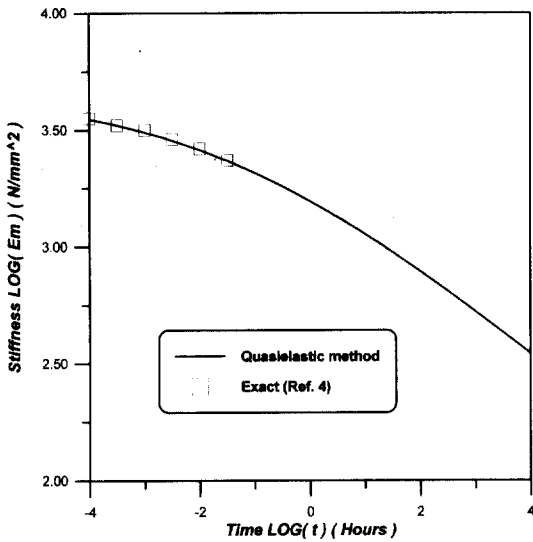


그림 3. 엄밀 라플라스 역변환과 유사 탄성법의 비교

에 어떻게 영향을 주는지를 체계적으로 이해하기 위해서 여러 매개변수를 통한 수치결과로 알아보았다.

본 연구의 해석결과에 대한 정확도를 검증하기 위해 4변이 단순지지되고 2개 매개변수를 갖는 탄성지반위에 놓인 직교이방성 판의 경우를 예로 들어 LUSAS 프로그램의 해석결과와 비교하였다.

직교이방성판의 탄성계수, 전단탄성계수, 프아송 비등은 각각 다음과 같다.

$$a = b = 10 \text{ cm}, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad q = 10 \text{ N/cm}^2,$$

$$E_1/E_2 = 40, \quad G_{12}/E_2 = 0.5, \quad h = 0.1 \text{ cm},$$

$$E_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ N/cm}^2.$$

표 2의 결과에서 알 수 있듯이 본 연구의 해석결과와 비교 결과는 정확히 일치하였다.

복합재료 적층판의 점탄성 해석을 위한 재료의 성질은 표 1의 값들과 다음의 값들을 사용한다.

$$G_{13} = G_{12}, \quad G_{23}/G_{12} = 0.9,$$

$$a = b = 10 \text{ mm}, \quad h = 1 \text{ mm}.$$

표 2. 탄성지반위에 놓인 직교이방성판의 처짐

| $k(N/cm^3)$ | 처짐 (cm) | |
|-------------|-----------------------|----------|
| | LUSAS ⁽²⁰⁾ | 본 연구 |
| 30 | 0.383235 | 0.386683 |
| 50 | 0.238211 | 0.239687 |
| 80 | 0.148537 | 0.149014 |
| 100 | 0.117681 | 0.117889 |
| 200 | 0.055944 | 0.055829 |

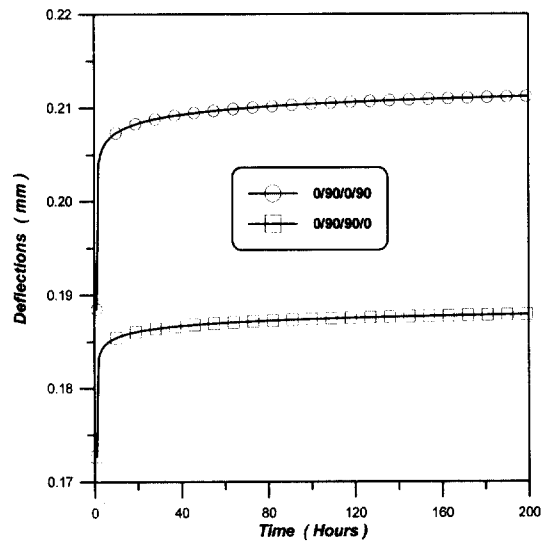


그림 4. 대칭 및 역대칭 직교이방성 적층판의 점탄성적 처짐 해석

$$q = 10 \text{ N/mm}^2, \quad \rho = 1 \text{ Nsec}^2/\text{mm}^4.$$

0/90 으로 적층된 복합재료 적층판이 대칭으로 적층된 경우와 역대칭으로 적층된 경우의 처짐 해석결과와 진동해석결과를 그림 4와 그림 5에 나타내었다. 그림 4와 그림 5는 역대칭 적층판의 경우 점탄성 해석결과가 처짐은 약 13% 증가되고 진동수는 약 6% 감소되며 대칭 적층판의 경우 처짐은 약 8% 증가하였고 진동수는 약 4% 감소됨을 보여준다. 적층판의 형상비가 1이고 폭-두께비가 10인 본 연구의 경우 역대칭으로 배열된 경우가 점탄성에 의한 영향이 상대적으로 크을 알 수 있다.

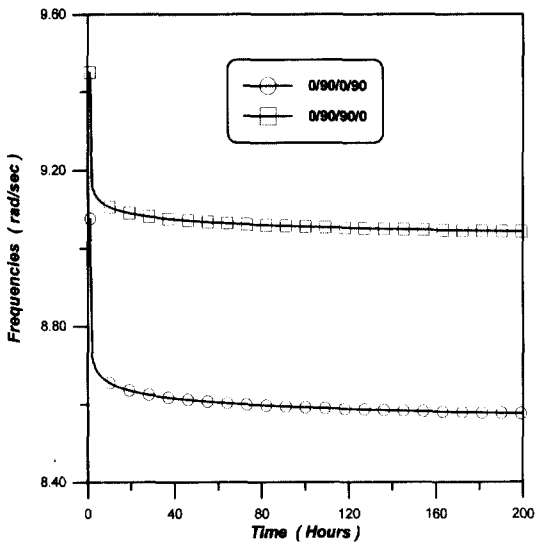


그림 5. 대칭 및 역대칭 직교이방성 적층판의 점탄성적 진동 해석

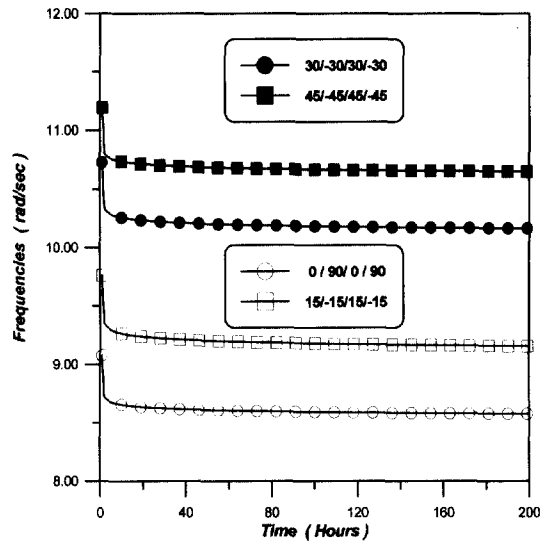


그림 7. 역대칭 앵글플라이 적층판의 각도변화에 따른 점탄성적 진동 해석

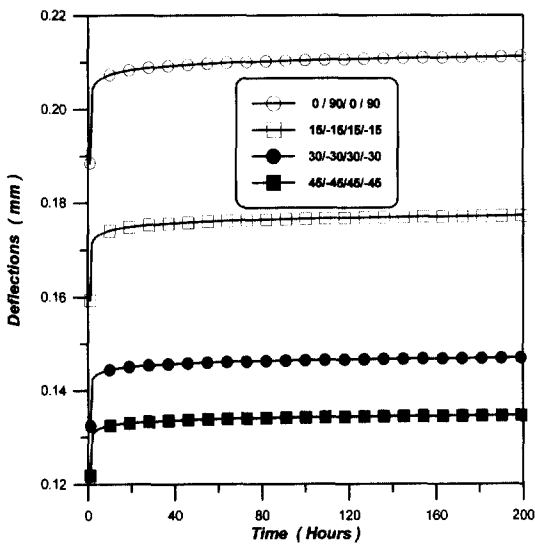


그림 6. 역대칭 앵글플라이 적층판의 각도변화에 따른 점탄성적 처짐 해석

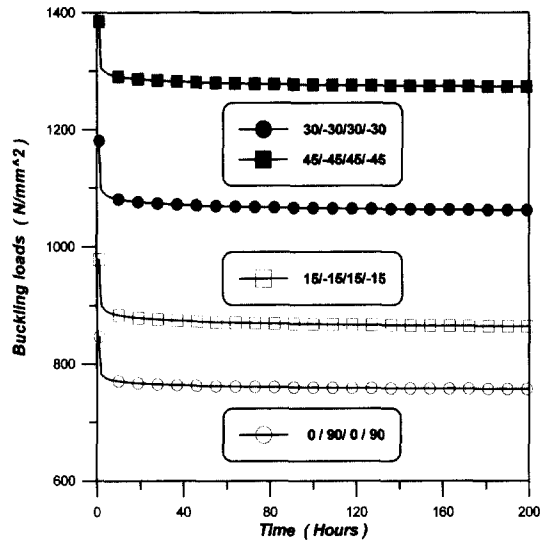


그림 8. 역대칭 앵글플라이 적층판의 각도변화에 따른 점탄성적 좌굴 해석

역대칭 앵글플라이의 여러 경우들에 대한 점탄성 해석결과를 그림 6, 그림 7과 그림 8에서 보여준다. 45/-45/45/-45로 적층된 경우에 탄성해석에서는 물론 점탄성적 해석을 수행하여 저하된 성능을 고려하더라도 최대의 강성이 유지되어 처짐값은 가장 작고 진동수와 좌굴하중은 가장 큼을

알 수 있다.

시간의 경과에 따른 강성의 저하를 정확히 예측하기 위해 45/-45/45/-45로 적층된 경우의 중앙선의 처짐값을 그림 9에 나타내었다. 시간의 경과가 100시간이 넘으면 성능의 저하는 거의 없는 것으로 보여진다.

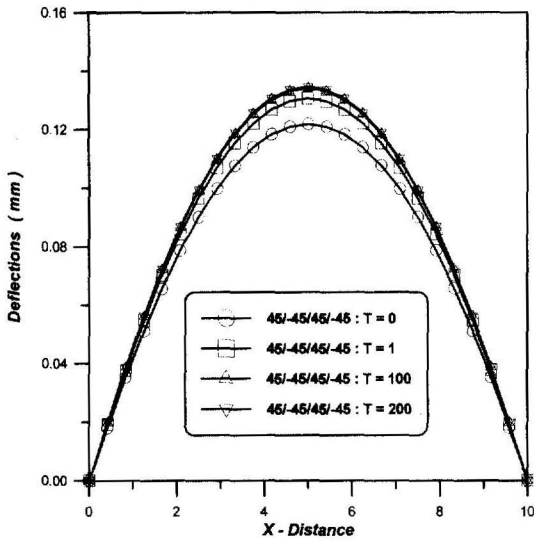


그림 9. 45/-45/45/-45 로 적층된 앵글플라이 적층판의 시간경과에 따른 점탄성적 처짐 해석

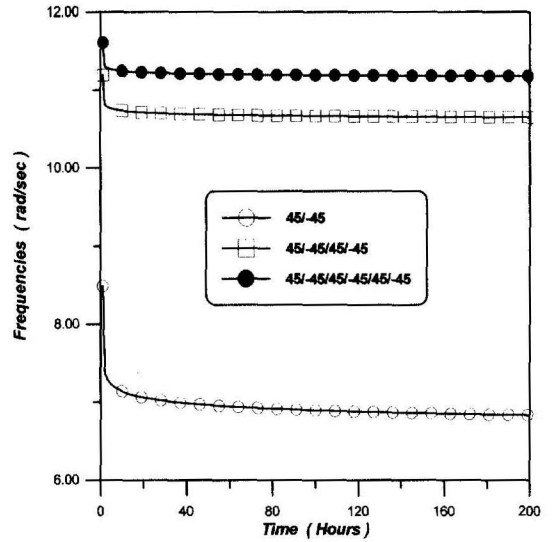


그림 11. 역대칭 앵글플라이 적층판의 층수변화에 따른 점탄성적 진동 해석

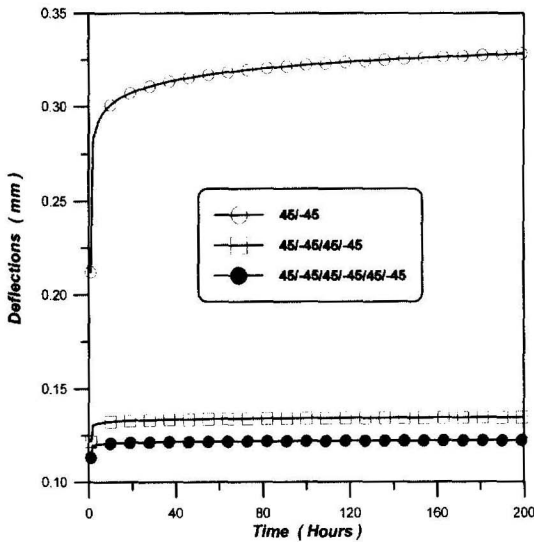


그림 10. 역대칭 앵글플라이 적층판의 층수변화에 따른 점탄성적 처짐 해석

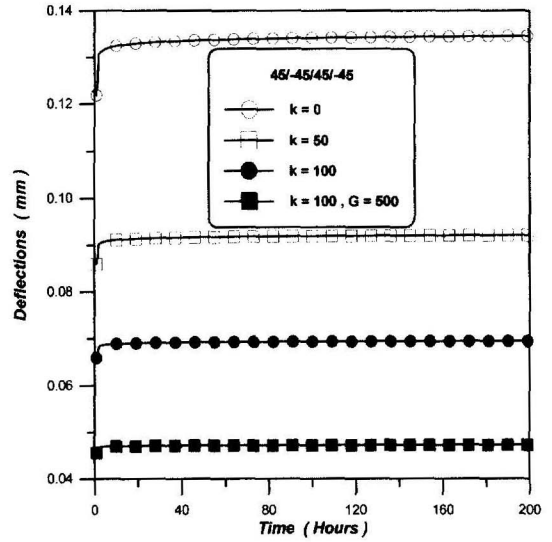


그림 12. 역대칭 앵글플라이 적층판의 지반계수 변화에 따른 점탄성적 처짐 해석

그림 10과 그림 11에서는 동일한 두께의 복합 재료 적층판에서 적층 수의 증가는 처짐 감소와 진동수 증가를 유발하며 처짐 감소와 진동수 증가의 비율은 층수가 6층 이상으로 증가하게 되면 커플링 효과(B_{ij})의 감소로 급격히 감소함을 보여준다.

그림 12, 그림 13과 그림 14는 지반계수와 전단지반계수의 변화에 따른 처짐, 진동수 및 좌굴 하중의 변화를 보여준다. 점탄성 해석시에도 지반 계수가 증가할수록 강성의 증대 효과를 가져와 처짐은 감소되고 진동수와 좌굴하중은 증가된다. 이측면내하중의 복합재료 적층판에서 적층순서

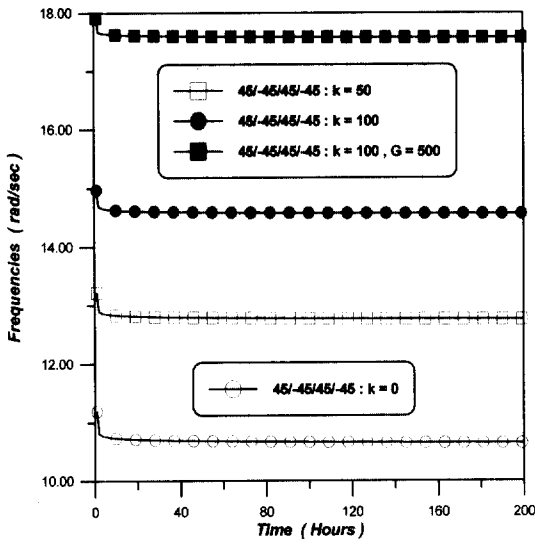


그림 13. 역대칭 앵글플라이 적층판의 지반계수 변화에 따른 점탄성적 진동 해석

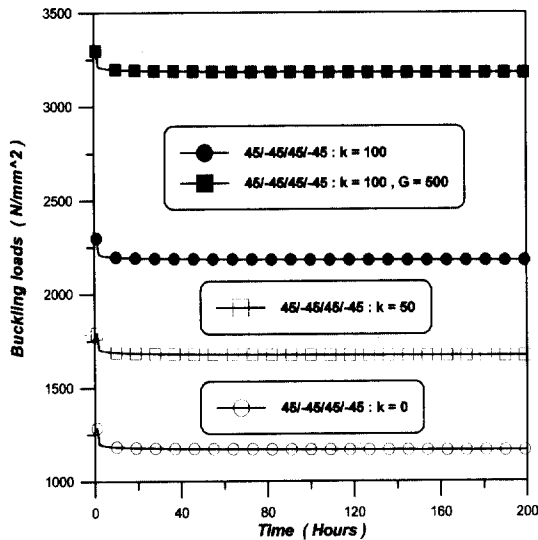


그림 14. 역대칭 앵글플라이 적층판의 지반계수 변화에 따른 점탄성적 좌굴 해석

가 좌굴중에 미치는 영향을 그림 15에 나타내었다. 등시곡선으로부터 좌굴모우드가 $m=1$ 인 경우 적층순서에 따른 좌굴하중은 같으나 N_2/N_1 가 작아짐에 따라 발생하는 좌굴모우드의 변화로 인해서 적층순서의 영향이 좌굴하중에 큰 영향을 끼침을 알 수 있었다. 또한 시간이 경과할수록



그림 15. 대칭 직교이방성 적층판의 배열순서와 이축하중비에 따른 점탄성적 좌굴 해석

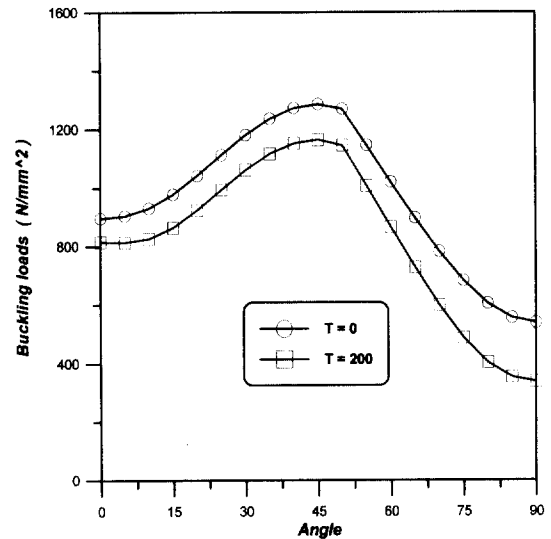


그림 16. 역대칭 앵글플라이 적층판의 각도변화에 따른 점탄성적 좌굴 해석

좌굴모우드의 변환점이 N_2/N_1 가 큰 값쪽으로 이동함을 보여준다.

$\theta / -\theta / \theta / -\theta$ 로 적층된 경우 각도변화의 영향을 그림 16에 보이고 있다. θ 가 45° 이상인 경우에 좌굴모우드의 변화로 인해 좌굴하중이 비대칭변화를 보인다.

5. 결론

건설용 복합재료로 사용되는 고분자 재질은 점탄성적 거동을 보이므로 이 재질들의 물성치는 시간에 따라 변화할 수 있으며, 예기치 못한 성능저하 등을 정확히 평가할 필요가 있다. 추정 가능한 사용조건하에서 복합재료로 구성된 구조물의 성능저하를 체계적으로 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 수지의 점탄성을 고려한 복합재료 적층판의 처짐, 진동수와 좌굴거동은 화이버의 배열 방향, 적층순서, 적층판의 적층 수와 탄성지반의 지반계수 그리고 이축하중비에 따라 변함을 보여준다.
- (2) 점탄성적으로 휨, 진동 및 좌굴해석을 수행하면 처짐, 진동수와 좌굴하중은 시간에 따라 변화하며 일정시간이 지나면 변화율은 거의 일정하게 되므로 복합재료 적층판의 정확한 성능저하를 예측하려면 반드시 점탄성적 해석이 수행되어야 할 것이다.
- (3) 45°로 역대칭 적층된 동일한 두께의 적층판의 경우 적층수의 증가로 인한 처짐과 진동수의 변화는 4층이상일 때 변화량이 작아지며 커플링효과를 고려한 설계가 필요함을 알 수 있다.
- (4) 이축 면내하중을 받는 적층판의 경우 시간의 변화에 따른 좌굴모우드의 변환점은 이축 면내하중비(N_2/N_1)가 큰 값 쪽으로 이동함을 알 수 있다.
- (5) $\theta / -\theta / \theta / -\theta$ 로 적층된 경우 θ 의 변화에 따른 적층판의 좌굴하중은 좌굴모우드의 변화에 따라 비대칭의 좌굴하중을 갖는다. 이 경우 90°로 배치된 경우가 시간경과로 인한 복합재료의 성능저하가 가장 커짐을 알 수 있다.

참고 문헌

1. Winkler, E. (1867), Die lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague, 182.
2. Pasternak P. L. (1954), Fundamentals of a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants (in Russian), Gosuedarstvennoe Izdatelstvo Lite-raturi po Stroitelstvui Arkhitekture, Moscow.
3. Jones, R. M. (1975) "Mechanics of Composite Materials", McGRAW-HILL.
4. Schapery, R. A., (1974) "Viscoelastic Behavior and Anlalysis of Composite Materials", in Vol. 2 of Composite Materials, edited by Broutman, L. J. and Krock, R. H., Academic Press, New York, pp. 115-119.
5. Reissner, E., (1945) "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J. Applied Mechanics. 12, pp. 69-77
6. Mindlin, R. D. (1951), "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates" J. Applied Mechanics. 18, pp. 31-38
7. Whitney, J. M. (1973), "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load", J. Applied Mechanics. 40, pp. 302-304
8. Nelson, R. B. and Lorch, D. R., (1974) "A refined theory for laminated orthotropic plates", J. Applied Mechanics. 41, pp. 177-183
9. Pasternak P. L. (1954), Fundamentals of a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants (in Russian), Gosuedarstvennoe Izdatelstvo Lite-raturi po Stroitelstvui Arkhitekture, Moscow.
10. Reddy, J. N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", J. of Applied Mechanics. 45, pp. 745-752.

11. Han, S. C., Yoon, S. H. and Park, W. T. (1999), "Nonlinear analysis of laminated composite plates on elastic foundation using the finite difference method, Proceedings of the 6th International conference on Steel and Space Structures, Singapore, SSSS, pp. 193-200.
12. Kim, C. K. and Hong, C. S. (1988) "Viscoelastic Sandwich Plates with Crossply Faces", J. of Structural Engineering, ASCE, Vol. 114, No. 1, pp. 150-164.
13. Kim, D. H. (1995), Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, E&FN SPON, Chapman & Hall.
14. 이병구 (1994), "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석", 한국강구조학회 논문집 제6권 3호, pp. 107-116.
15. Salari, M., Bert, C. W. and Striz, A. G. (1987), "Free vibrations of a solid circular plate free at its edge and attached to a winkler foundation", J. of Sound and Vibration, 118, pp. 188-191.
16. 신동구 (1994), "일축 압축력 및 균일분포 열 하중하 대칭적층된 유사등방성 및 직교이방성 직사각형 복합재 평판의 후좌굴 파괴경계선", 한국강구조학회 논문집 제6권 4호, pp. 97-108.
17. 장석운, 윤석호, 한성천 (1994), "고차전단 변형이론에 의한 비등방성 복합적층판의 해석", 한국강구조학회 논문집 제6권 1호, pp 185-196.
18. 이원홍, 윤석호, 한성천 (1997), "고차전단 변형을 고려한 복합적층판 및 셸구조의 좌굴 해석", 한국강구조학회 논문집 제9권 1호, pp 3-11.
19. 한성천, 장석운 (2001), "Two-parameter 탄성지반위에 놓인 고차전단변형 적층판의 해석", 한국강구조학회 논문집 제13권 1호, pp 101-113.
20. LUSAS Ver 13.2, (1999), FEA Ltd.
21. Reddy, J. N. (1997), Mechanics of Lamintaed Composite Plates, CRC Press.

(접수일자 : 2001년 5월 10일)

부 록

(0/90/90/0)으로 적층된 경우의 강성값

MATERIAL PROPERTIES ...

Efl = 0.1660000E+06 Eft = 0.1380000E+05
 Em = 0.4600000E+04 vf = 0.3000000E+00
 vm = 0.3000000E+00 Vf = 0.6200000E+00
 Vm = 0.3800000E+00 Gf = 0.2750000E+05
 Gm = 0.1769231E+04

MATERIAL PROPERTIES ...

E10= 0.1046680E+06 E20= 0.7840909E+04
 V12= 0.3000000E+00 G12= 0.4213577E+04
 G23= 0.3792219E+04 G13= 0.4213577E+04

LAMINATE THICKNESS & ANGLE

1 Z-CORD=-0.5000
 2 Z-CORD=-0.2500 ANGLE= 0.0
 3 Z-CORD= 0.0000 ANGLE= 90.0
 4 Z-CORD= 0.2500 ANGLE= 90.0
 5 Z-CORD= 0.5000 ANGLE= 0.0

PLATE RIGIDITY...Aij...

A11 = 0.5663630E+05 A12 = 0.2368240E+04
 A16 = 0.8882256E-13 A22 = 0.5663630E+05
 A26 = 0.2895676E-11 A66 = 0.4213577E+04

PLATE RIGIDITY...Bij...

B11 = 0.4547474E-12 B12 = 0.1421085E-13
 B16 = 0.0000000E+00 B22 = 0.8526513E-13
 B26 = 0.0000000E+00 B66 = 0.0000000E+00

PLATE RIGIDITY...Dij...

D11 = 0.7766077E+04 D12 = 0.1973533E+03
 D16 = 0.1850470E-14 D22 = 0.1673306E+04
 D26 = 0.6032658E-13 D66 = 0.3511314E+03

PLATE RIGIDITY...Eij...

E11 = -0.9947598E-13 E12 = -0.3108624E-14
 E16 = 0.0000000E+00 E22 = -0.8881784E-15
 E26 = 0.0000000E+00 E66 = 0.1776357E-14

PLATE RIGIDITY...Fij...

F11 = 0.1279151E+04 F12 = 0.2960300E+02
 F16 = 0.6939263E-16 F22 = 0.1367565E+03

F26= 0.2262247E-14 F66= 0.5266971E+02
PLATE RIGIDITY...Hij...
H11= 0.2335198E+03 H12= 0.5286249E+01
H16= 0.3097885E-17 H22= 0.1932082E+02
H26= 0.1009932E-15 H66= 0.9405305E+01
TRANSVERSE SHEAR RIGIDITY.....
A44= 0.4002898E+04 A45= 0.1289993E-13

A55= 0.4002898E+04
TRANSVERSE SHEAR RIGIDITY.....
D44= 0.3204074E+03 D45= 0.2687486E-15
D55= 0.3467423E+03
TRANSVERSE SHEAR RIGIDITY.....
F44= 0.4756733E+02 F45= 0.1007807E-16
F55= 0.5250512E+02