

구조화된 불확실성의 비선형요소를 갖는 선형 시스템의 강인영역 개선

조장현*

Improvement of the Robustness Bounds of the Linear Systems with Structured Uncertainties

Jang Hyen Jo*

ABSTRACT

The purpose of this paper is the derivation and development of the new definitions and methods for the new estimation of robustness for the systems having structured uncertainties. This proposition adopts the theoretical analysis of the Lyapunov direct methods, that is, the sign properties of the Lyapunov function derivative integrated along finite intervals of time, in place of the original method of the sign properties of the time derivative of the Lyapunov function itself. This is the new sufficient criteria to relax the stability condition and is used to generate techniques for the robust design of control systems with structured perturbations. The systems considered are assumed to be nominally linear, with time-variant, nonlinear bounded perturbations. This new techniques demonstrate the improvement of robustness bounds from the numerical results.

Key Words : Robustness bound(강인 한계), Structured uncertainties(구조화된 불확실성), Asymptotic stability (점근적 안정성), Lyapunov direct method(리아프노프 직접방법)

기호설명

V : Lyapunov function

\dot{V} : time derivative of Lyapunov function

$\|x\|$: norm of state vector

R^n : n-dimensional space.

B_r : some ball of state space

1. 서론

동적 시스템의 안정성과 그 영역 연구는 매우 광범위하게 수행되어져 왔다. 안정성연구의 방법과 이론은 많은 연구에서 나타나 있는데 특히 리아프노프의 안정이론은 비선형 시변 시스템(nonlinear time varying system)의 경우에도 폭넓게 적용가능한

도구로써 자율비선형시스템(autonomous nonlinear system)의 경우 Vannelli와 Vidyasagar⁽¹⁾가 연구하였고 Patel과 Toda⁽²⁾는 수치해석적인 방법에 의하여 점근적 안정(asymptotically stable)시스템의 경우 강인성(robustness)을 양적으로 측정할 수 있는 연구와 이들과 함께 Sridhar, R.⁽³⁾은 선형 다항식 귀환제어를 이용한 강인성에 대한 연구를 수행하였다. Yeadavalli와 Liang⁽⁴⁾은 리아프노프의 안정성이론을 이용하여 상태공간(state-space)에서 강인한계의 개선을 연구하였다. 특히 Yeadavalli^(5,6)는 선형 상태공간모델내에서의 불확실성의 강인한계개선에 대하여 연구하였고 Brayton과 Tong⁽⁷⁾은 구조화된 섭동(structured perturbation)이 있는 시스템의 강인제어 영역의 개선을 주파수 해석방법과 리아프노프의 이론을 병합하여 연구하였다. Biernacki, Hwang,

* 한라대학교 기계공학부

Bhattacharyya⁽⁸⁾는 구조화된 매개변수 섭동을 지닌 시스템의 강인영역과 시스템안정성에 대한 연구를, 또한 Desoer와 Chan⁽⁹⁾은 선형시변시스템의 강인영역과 안정성 연구를 수행하였다. 이에 본 논문에서는 불확실성이 일정한 영역 안에서 상태변수와 연계된 매개변수로 구성되어있는 경우 상태귀환제어 (state feedback control) 방식에 의하여 시스템의 점근적 안정성(asymptotic stability)을 점검하고자 한다. 이를 위해 리아프노프의 직접방법에 근거하여 새로운 안정성 판정 기준을 도입하여 강인 영역의 개선을 시도하고자 한다. 새로운 안정판정기준은 리아프노프 함수의 시간에 대한 도함수자체로 안정성을 판정하던 전통적인 방법에서 일정시간 동안에서의 미분함수의 적분값을 모든 상태에서 점검하여 그 결과로 안정성을 판단한다. 이러한 기술적 방법은 크게 두 분야로 적용 가능한데 첫 번째는 강인성이 부여된 시스템의 안정성 판단문제와 두 번째는 불확실성을 포함한 시스템의 안정화문제이다. 본 논문에서는 첫 번째 분야인 안정성 영역을 검토하며 적용 시스템은 비선형요소가 구조화된 불확실성 요소로써 일정한 한계 영역의 섭동을 지닌 선형 시스템을 대상으로 한다. 한편 시스템내의 강인성에 영향을 주는 원인을 살펴보면 물리적 매개변수나 비선형성, 모델링 불확실성, 비정상적인 제어기의 요소, 센서 또는 구동장치 에러 등이며, 이 요소들은 일정 영역 내에서 시스템 안정성을 결정한다.

2. 이론적 분석 및 수치해석 절차수립

2.1 안정조건의 분석

1892년 리아프노프는 그의 첫 번째와 두 번째 안정성이론(Lyapunov's first and second methods of stability)을 소개하였다. 이는 상미분 방정식의 형태인 동적 시스템의 안정성을 판단하는 것으로 첫 번째 방법은 미분 방정식의 해를 이용하여 평형상태 (equilibrium state)의 안정성을 분석하는 기초이론으로 사용되었다. 그러나 이는 관심대상의 국한된 지역적인 안정성(local stability)에 적용하며 두 번째 방법(Lyapunov's second method)은 상미분방정식의 해를 구하지 않고 안정성을 분석하는 방법으로 특히 비선형 시스템 해석에 편리하다. 리아프노프 직접방법(Lyapunov's direct method)이라 불리는 이 방법은 시스템의 보유에너지 개념을 이용한다. 예를

들어 진동시스템이 보유한 전체에너지는 항상 양이며 이 전체에너지가 시간에 따라 감소하는 함수일 때, 즉 시간에 대한 에너지함수의 미분값이 음일 경우 시스템은 평형상태에 이르고 이를 점근적 안정이라 한다. 리아프노프 직접방법에서 시스템의 보유에너지 함수를 규명하는 것이 핵심이나 이를 구하는 일반적인 방법은 없다. 이러한 전체에너지를 의미하는 함수를 리아프노프 함수(Lyapunov function)라 하고 표현은 $V(x, t)$ 로, 시간미분형태는 $\dot{V}(x, t)$ 로 나타내며 이에 대한 대표적인 두 가지 안정성이론을 소개하면 아래와 같다.

(정리 1) 일반적으로 비선형시스템은

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0 \quad (1)$$

로 표현되고 이 시스템이 연속(continuous)이고 해가 존재하며 아래의 조건 즉,

- 1) $V(x, t)$ 가 양의 한계(positive-definite)이며
- 2) $\dot{V}(x, t) \leq 0, t \geq t_0, x \in B_r$, 을 만족하는 리아프노프함수가 존재한다면 평형점은 안정하다고 할 수 있다. 또 초기조건인 t_0 에서의 평형점은 균일한 점근적 안정성(uniformly asymptotically stable)을 갖게된다.

(정리 2) 선형 시스템이

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

이며 상태변수가 x (n 차원 vector)이며 상태 행렬 A 가 $n \times n$ 상수인 비특이 행렬(nonsingular matrix)이며 아래 조건이 만족할 경우 즉,

- 1) 스칼라 함수

$$V(x) = x^T P x \quad (3)$$

이며 행렬 P 가 양의 한계이며

- 2) 시간의 미분

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x = -x^T Q x \quad (4)$$

가 음의 한계(negative-definite)이면 평형점에서 점근적 안정성의 필요충분조건이 된다. 위의 안정성 조건을 만족시키는 리아프노프 함수의 계산에서

$$A^T P + PA = -Q \quad (5)$$

를 $Q=I$ 로 선정하면 행렬 P 의 각 요소를 계산하기에 편리하게 된다.

2.2 안정성 기준의 수립과 강인성 분석

본 절에서는 전통적인 리아프노프 직접방법으로부터 수정 제안된 새로운 안정조건을 도출하도록 한다. 이 제안의 핵심내용은 시스템의 안정성을 판정하는 기존의 리아프노프함수의 시간미분값 자체의 활용과는 달리 이 함수에 대한 일정시간동안의 적분값을 이용한 방법을 도입하고자 한다. 먼저 일반적인 비선형 시스템의 경우 정리1에서 나타난 리아프노프함수가 존재하고 중심이 O 인 유한한 공간, 중심으로부터 거리가 일정한 B_r 내에서 양의 한계이며 시간에 대한 미분이 존재하고 시간 범위내에서 $x(t, t_0, x_0)$ 를 가정한다. 여기에서 아래와 같은 적분 표현을 소개하면

$$\int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \quad (6)$$

$\dot{V}(t, x)$ 의 연속성과 $\dot{V}(t, 0)=0$ 의 조건으로부터 아래와 같은 결론을 얻게된다.

[결론 1] 어떤 상수값 $\epsilon_3 > 0$ 과 유한한 시간 $[t_0, t_0 + T]$ 하에서 $\delta_3 > 0$ 와 이에 대하여 초기조건의 상태 변수가 $\|x_0\| < \delta_3$ 의 조건이라면 $u \in [t_0, t_0 + T]$ 의 사이에서는 즉, $[t_0, t]$ 에서는

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+u} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \right| < \epsilon_3 \quad (7)$$

를 만족하게 된다. 초기의 상태변수 x_0 가 $[t_0, t]$ 안에서 B_r 내에 존재한다고 가정하고 시간 $[t_0, t]$ 의 일련과정을

$$\{\tau_i\}, \tau_0 = t, \tau_m = t_0,$$

$$[\tau_{i+1}, \tau_i], \tau_{i+1} < \tau_i, i=0, 1, \dots, m-1 \quad (8)$$

의 소구간으로 분할하고 위의 식(6)을 합의 형태로 표시하면

$$\int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_i} \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \quad (9)$$

$$x(\tau, t_0, x_0) = x(\tau, \tau_i, x_i) \quad (10)$$

$$\int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_i} \dot{V}(\tau, x(\tau, \tau_i, x_i))d\tau \quad (11)$$

이 되며 아래와 같은 개념을 구성할 수 있다.

(정리 3) 시스템 (1)에서

- 1) 연속이며 미분 가능한 $V(t, x)$ 가 양의 한계이고
- 2) 또한

$$V^*(x) = \int_{t-\tau(t,x)}^t \dot{V}(\tau, x(\tau, t_0, x_0))d\tau \quad (12)$$

의 적분이

$$V^*(t, x) \leq 0, (t, x) \in [0, \infty) \times B_r \quad (13)$$

의 조건을 만족할 때 시스템(1)은 안정하다고 할 수 있다. 이에 대한 증명은 아래와 같다.

[증명] 잘 알려진 바와 같이 일단 초기조건의 순간을 $t_0=0$ 로 선정하고 아래와 같이 정의한다.

$$V(t, x) \geq W(x) > 0, x \neq 0, x \in B_r,$$

$$V(t, 0) = W(0) = 0 \quad (14)$$

여기에서

$$S_\epsilon = \{ \|x\| = \epsilon \}, S \in B_r \quad (15)$$

인 영역을 선택하고 S_ϵ 상의 $W(x)$ 의 최소 한계는 S_ϵ 의 임의상태에서

$$\inf W(x) = \alpha > 0 \quad (16)$$

이고 $V(0, x)$ 과 $V(0, 0)=0$ 연속성의 정의로부터

$$\|x\| < \delta_2 < \epsilon, \|x_0\| < \delta_2 \quad (17)$$

이고 이로부터

$$0 \leq V(0, x_0) < \frac{\alpha}{2} \quad (18)$$

을 만족한다. 이에 [결론 1]에 따라 δ_3 의 값을 $\|x_0\| < \delta_3$ 의 조건으로

$$\left| \int_0^u \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau \right| < \frac{\alpha}{2}, \quad u \in [0, T] \quad (19)$$

임을 알 수 있다. 이 내용을 정리하면 $\delta_4 = \min(\delta_2, \delta_3)$ 인 경우에서 $\|x_0\| < \delta_4$ 이면

$$0 \leq V(0, x_0) < \frac{\alpha}{2}, \quad u \in [0, T] \quad (20)$$

이고

$$\left| \int_0^u \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau \right| < \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

이다. 고로 $\|x_0\| < \delta_4$ 인 초기조건하에서 상태변수가 한계영역 S_ϵ 안에 존재한다는 표현은

$$\|x(t, 0, x_0)\| < \epsilon, \quad t \in [0, \infty) \quad (22)$$

된다. 한편 임의의 시점 $t = t^*$ 에 상태변수가 한계영역 S_ϵ 의 경계선을 처음으로 이르는 상황을 표시하면

$$\|x(t, 0, x_0)\| = \epsilon, \quad t \in [0, t^*) \quad (23)$$

이 되며 이 시점에서의 $V(t, x)$ 는 시간미분의 일정한 시간 $t = t^*$ 까지의 적분으로 계산되며 수식으로 표현하면

$$V(t^*, x(t^*, 0, x_0)) = V(0, x_0) + \int_0^{t^*} \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau \quad (24)$$

이 된다. 다시 $x(t^*, 0, x_0) = x^*$ 와 $t^* = \tau_0$ 로 나타내고 시간의 간격을 $\{\tau_i\}$ 와 $\tau_{i+1} < \tau_i$ 등으로 표시하여 상태변수의 시간에 대한 관계를

$$\tau_1 = \tau_0 - T(\tau_0, x^*), \quad x_1 = x(\tau_1, 0, x_0)$$

$$\tau_{i+1} = \tau_i - T(\tau_i, x_i), \quad x_{i+1} = x(\tau_{i+1}, 0, x_0) \quad (25)$$

로 변환하여 식(24)의 우변중 적분항을 식(9)과 (10)를 이용하여 작성하면

$$\int_0^{t^*} \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_i} \dot{V}(\tau, x(\tau, \tau_i, x_i)) d\tau \quad (26)$$

이 된다. 한편 이론의 전제조건 (13)으로부터 위의 시간 구간 내에서의 적분 값은 0과 같거나 작은 값을 가지므로 아래의 계산 결과를 얻을 수 있다.

$$V(t^*, x(t^*, 0, x_0)) \leq V(0, x_0) + \left| \int_0^{t^*} \dot{V}(\tau, x(\tau, 0, x_0)) d\tau \right| \quad (27)$$

이 평가 값은 식(20)과 (21)로부터

$$V(t^*, x(t^*, 0, x_0)) < \alpha \quad (28)$$

이 되어야 하나 실제로는 $V(t, x)$ 의 전제조건인 식(14)와 (16)에 의하여

$$V(t^*, x(t^*, 0, x_0)) \geq \alpha \quad (29)$$

가 되며 이는 일련의 과정 속에서 $x(t^*, 0, x_0)$ 가 항상 일정한 한계영역 S_ϵ 안에 존재함을 의미한다. 결과적으로 상기와 같은 조건에서는 상태변수가 한계영역 S_ϵ 의 경계에 도달할 수 없음을 암시하며 이러한 모순적 논리를 이용하여 위의 개념이 증명되었다.

(정리 4) 식(1)의 시스템에서

- 1) 연속이며 미분가능한 $V(t, x)$ 가 양의 한계이고
- 2) $t \in [0, \infty], x \in B_r$ 에서 연속적이고 양의 한계인 $W(x)$ 사이에서 식(12)이

$$-V^*(t, x) \geq W(x) > 0, \quad -V^*(t, 0) = W(0) \quad (30)$$

일 경우 시스템(1)은 점근적 안정성으로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, 0, x_0)\| = 0 \quad (31)$$

을 의미한다.

(정리 5) 시스템이

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in R^n \quad (32)$$

인 경우

- 1) 연속이며 미분가능한 $V(t, x)$ 가 양의 한계이고
- 2) 양의 한계를 갖는 $T(x)$ 가 존재하고
- 3) 연속이고 양의 한계인 $W(x)$ 가 존재하면 이때

$$V^*(x) = \int_{-\tau(x)}^0 \dot{V}(x(\tau, 0, x_0)) d\tau \quad (33)$$

$$-V^*(x) \geq W(x), \quad V^*(0) = W(0) \quad (34)$$

일 경우 시스템은 전반적인 점근적 안정성(globally asymptotically stable)을 갖게 된다. 위의 정리에서 살펴보면 기존의 리아프노프의 직접방법과 수학적 근본 개념은 동일하나 시스템의 안정성을 전반적으로 시간의 도함수 전체의 부호로 판정하는 것과는 달리 모든 상태변수에 대한 일정시간내의 적분 값을 계산하는 방법적인 차이를 발견할 수 있으며 이러한 수치해석 및 계산절차의 수립이 구체적인 목표인 것이다.

2.3 수치해석 방법 및 절차

이제 구조화된 불확실성의 비선형요소를 갖는 시스템에 위의 정리에서 소개된 방법을 수행할 프로그램을 수립한다. 그 과정을 단계별로 살펴보면 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 다항식 형태의 리아프노프함수를 선택한다.

$$V = x^T P x \quad (35)$$

2) 위의 리아프노프함수의 시간에 대한 미분함수를 통한 전통적인 리아프노프 직접방법으로 강인 안정영역을 계산한다.

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x \quad (36)$$

3) 위의 강인 안정영역보다 개선된 넓은 영역한계를 선택한다.

4) 새로운 강인 안정영역에 대하여 기존의 리아프노프 직접방법을 만족하지 않는 상태변수에 대하여 단위공간(unit sphere)에서 정리 3,4,5의 검토해야할 식(12)와 (33)의 값을 계산한다.

5) 수행과정중 새로운 강인 안정한계를 입력하여 새로운 안정판정기준값인 식(12) 또는 (33)의 값을 만족하지 않는 경우 이보다 작은 영역의 한계값으로 변경하여 세 번째 단계로부터 반복 수행한다. 이러한 과정은 안정조건을 만족하지 않는 상태변수에 대하여 새로운 안정한계를 적용하여 시스템의 안정성을 하나하나 검토해야하는 복잡한 과정이다. 이에 대한 세부적인 수치해석 계산 절차는

Fig. 1과 같이 표현된다.

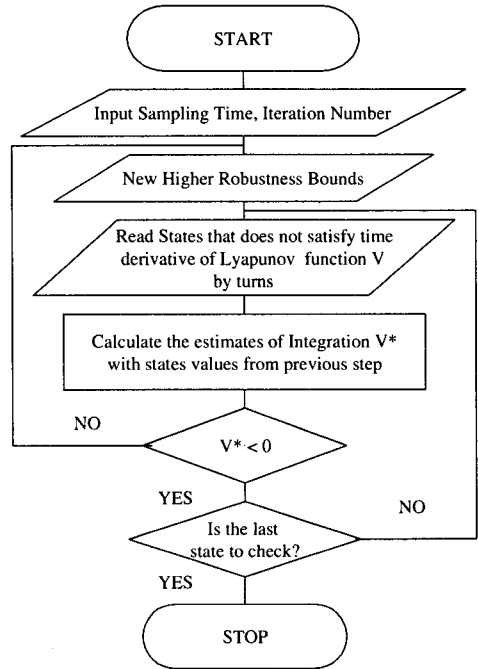


Fig. 1 Numerical procedure to calculate the new robustness bounds

3. 적용 결과 및 분석

본 절에서는 수치해석적 절차를 실제 시스템에 적용하여 실효성을 점검하도록 한다. 구조화된 섭동형태의 불확실성이 시스템내에 매개변수로 존재하는 경우, 시스템의 점근적 안정조건을 만족하는 불확실성의 영역을 위의 Fig. 1의 절차로 계산하고 결과를 통하여 강인영역의 개선 가능성을 살펴본다.

(예제 1) 시스템이

$$\dot{x} = Ax + g(t, x)Gx, \quad x \in R^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

이고 $g(t, x)$ 가 구조화된 스칼라함수이며 한계가 k 곧 이를 수식으로 표현하면 $|g(t, x)| < k$ 인 불

확실성을 보유할 때 안정성을 살펴보자. 이에 위 2.3절의 단계별 해석절차를 살펴보면 아래와 같다.
1) 리아프노프 함수를 2차 다항식으로 선택한다.

$$V = x^T P x = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

2) 시간에 대한 미분과 점근적 안정조건을 보면

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T (A^T P + P A) x \\ &= 2x_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 + 2x_2 \dot{x}_2 \\ &= -[(1-g)x_1^2 + (1-2g)x_1 x_2 + x_2^2] < 0 \end{aligned} \quad (39)$$

이 됨을 알 수 있다. 위의 식을 만족하려면 아래의 두 개의 부등식으로부터 결과를 얻을 수 있다.

a) $1-g > 0, g < 1$

b) $(1-2g)^2 - 4(1-g) < 0, |g| < \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

3) 위의 결과보다 확장된 영역한계 k 를 선정한다.

4) 2차원 단위공간(unit sphere)에서 식(33)의 계산을 아래의 상태변수와 일정시간 $T = n\lambda$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} x(T) &= x(0)e^{AT} + \int_0^T e^{A(T-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ kx_1(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\ &= e^{AT} \left[x(0) + \int_0^T e^{-A\tau} \begin{bmatrix} 0 \\ kx_1(\tau) \end{bmatrix} d\tau \right] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{An} \left[x(n-1) + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ kx_1(n-1) \end{bmatrix} \right] \\ x_1 &= \cos v, \quad x_2 = \sin v \end{aligned} \quad (41)$$

이 되며 이를 이용하여

$\bar{V}(t, x) = V(t, x) - V(t - T(t, x), x(t - T(t, x), t, x))$ 의 계산값을 모든 상태변수에 대해 계산한다.

5) 새로이 제시된 조건을 만족하지 못하면 새로운 강인한계를 입력하여 세 번째 단계로부터 반복수행한다. 일정한 시간간격에 대한 적분값을 이용한 안정성 판정 개념을 도입하여 적용한 결과 기존의 한계영역 $k = 0.866$ 에 비하여 $k = 0.96$ 로 한계영역 10.8%의 개선 결과를 얻었다.

(예제 2) 본 예제는 2개의 불확실성을 보유한 경우로 Zhou와 Khargonekar⁽¹⁰⁾와 Siljak⁽¹¹⁾의 연구 결과와 비교될 수 있다. 주어진 시스템이

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u,$$

$$u = - \begin{bmatrix} 1-k_1 & 0 \\ 0 & 1-k_2 \end{bmatrix} y, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (42)$$

인 경우 최종 폐루프 시스템은

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2+k_1 & 0 & -1+k_1 \\ 0 & -3+k_2 & 0 \\ -1+k_1 & -1+k_2 & -4+k_1 \end{bmatrix} x \quad (43)$$

이 되며 이는 두 개의 구조화된 불확실성 k_1 과 k_2 의 섭동을 갖는 2자유도 시스템이 된다. 이에 대하여 단계별로 계산과정을 살펴보자.

1) 리아프노프함수를 식(35)의 2차 다항식의 형태로 선정한다.

2) 리아프노프함수의 시간 미분인 식(36)에서 미분함수의 행렬을

$$A^T P + P A = -I \quad (44)$$

로 하여 계산하면 리아프노프 함수 행렬은

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{9}{476} & -\frac{1}{14} \\ \frac{9}{476} & \frac{83}{476} & -\frac{11}{476} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{11}{476} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \quad (45)$$

가 된다. 이는 물론 양의 한계이며 이로부터 시간 미분 행렬을 계산하면

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \begin{bmatrix} \frac{3k_1-7}{7} & -\frac{25k_2+2k_1}{476} & \frac{2k_1}{7} \\ -\frac{25k_2+2k_1}{476} & \frac{36k_2-119}{476} & \frac{57k_2-2k_1}{476} \\ \frac{2k_1}{7} & \frac{57k_2-2k_1}{476} & \frac{k_1-7}{7} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

로 된다. 이에 대한 음의 한계를 Routh-Hurwitz 안정기준을 적용하여 검토하면 시스템의 점근적 안정성을 만족하는 영역은 $|k_1| < 1.60$ 와 $|k_2| < 2.74$ 가 된다.

3) k_1 과 k_2 의 새로운 한계값을 선택한다.

4) 3차원의 상태변수를 (예제 1)의 2차원의 경우 식 (40) 및 (41)과 같이 상태변수를 표현하면

$$x(T) = x(0)e^{AT} + \int_0^T e^{A(T-\tau)} \begin{bmatrix} k_1x_1 + k_1x_3 \\ k_2x_2 \\ k_1x_1 + k_2x_2 + k_1x_3 \end{bmatrix} d\tau \quad (47)$$

$$x(n) = e^{A\lambda} [x(n-1) + \lambda \begin{bmatrix} k_1x_1(n-1) + k_1x_3(n-1) \\ k_2x_2(n-1) \\ k_1x_1(n-1) + k_2x_2(n-1) + k_1x_3(n-1) \end{bmatrix}],$$

$$x_1 = \cos v_1 \cos v_2, \quad x_2 = \sin v_1 \cos v_2, \quad x_3 = \sin v_2 \quad (48)$$

이 되며 이를 이용하여 식(33)의 값을 계산한다. 5) 조건을 만족하는 모든 상태변수에 대하여 강인한계를 구하기 위하여 Fig.1의 절차를 수행한다. 수행결과 단계(2)의 기존의 영역과는 달리 $|k_1| < 1.60$ 의 영역에 $|k_2| < 2.97$ 로 이는 기존의 영역보다 약 8.3%의 개선된 결과이다.

이 예제는 기존의 연구결과인

(a) Patel, Toda⁽²⁾ : $|k_i| < 0.5207$

(b) Yeadavalli, Liang⁽⁴⁾ : $|k_i| < 0.81577$

(c) Zhou, Khargonekar⁽¹⁰⁾ :

$$(1) 0.6052|k_1| + 0.3512|k_2| < 1,$$

$$(2) k_1^2 + k_2^2 < 2.72768,$$

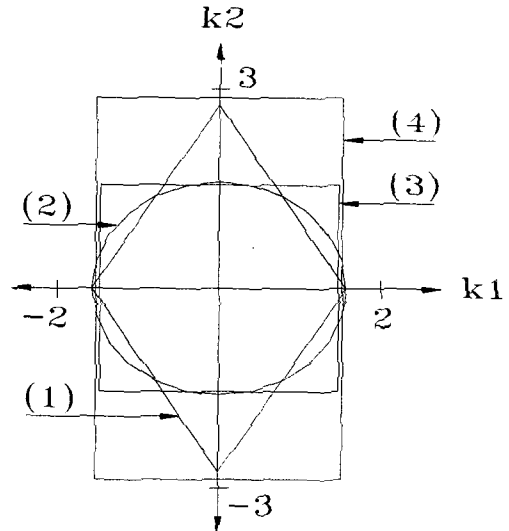
$$(3) |k_i| < 1.55328$$

등의 결과와 도출된 영역을 Fig.2와 같이 동시에 표현하였다. 즉, 기존의 연구에 비하여 k_2 영역의 개선이 확연하게 나타난다.

(예제 3) 본 예제는 Singh와 Cochlo⁽¹²⁾에 의해 분석된 예제로 3개의 구조화된 불확실성을 갖는 수직이착륙항공시스템의 특정 비행상태에서의 해석으로 먼저 시스템 방정식을 Sundararajan⁽¹³⁾으로 부터

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.0336 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1001 & 0.3681 & -0.707 & 1.42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Zhou and Khargonekar:

$$(1) 0.6052|k_1| + 0.3512|k_2| < 1$$

$$(2) k_1^2 + k_2^2 < 2.72768$$

$$(3) |k_i| < 1.55328$$

Proposed method: (4) $|k_1| < 1.60, |k_2| < 2.97$

Fig. 2 Results of the proposed method and those of previous research

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 3.5446 & -5.52 & 0.0 \\ 0.1761 & -7.5922 & 4.49 & 0.0 \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

로 표현하고 상태변수제어방식으로 $u = kx$ 를 적용하면 행렬 k 는

$$k = \begin{bmatrix} -0.8143 & -1.2207 & 0.266 & 0.826 \\ -0.2582 & 1.178 & 0.0623 & -0.212 \end{bmatrix} \quad (50)$$

이다. 한편 특정비행상태에서의 시스템행렬요소 a_{32} , a_{34} 와 b_{21} 이외의 요소는 상수값으로써 행렬 $\Delta A(t)$ 와 $\Delta B(t)$ 중에서 이들 요소의 변동폭인 $\Delta a_{32}(t)$, $\Delta a_{34}(t)$ 와 $\Delta b_{21}(t)$ 가 구조화된 불확실성의 매개변수로 간주된다. 이와 같은 내용을 식(49)에 적용하면

$$\dot{x} = (A + Bk)x + (\Delta A + \Delta Bk)x = \bar{A}x + \Delta \bar{A}x,$$

$$\bar{A} = A + Bk$$

$$= \begin{bmatrix} -0.4422 & -0.3052 & 0.1474 & -0.1276 \\ -0.8779 & -14.2805 & 0.4723 & 0.5166 \\ 3.4358 & 12.3956 & -1.8956 & -4.0914 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

이고 최종 시스템행렬은

$$\bar{A} = \bar{A} + \Delta\bar{A} = \begin{bmatrix} -0.4422 & -0.3052 & 0.1474 & -0.1276 \\ -0.8143\Delta b_{21} & -1.2207\Delta b_{21} & 0.266\Delta b_{21} & 0.826\Delta b_{21} \\ -0.8779 & -14.2805 & +0.4723 & +0.5166 \\ 3.4358 & \Delta a_{32} & -1.8956 & \Delta a_{34} \\ 0 & +12.3956 & -4.0914 & -4.0914 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

로 계산된다. 제안된 단계별 계산절차를 적용하면

- 1) 식(35)형태인 리아프노프함수를 선택한다.
- 2) 리아프노프함수의 시간 미분인 식(36)을

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T(\bar{A}^T P + P\bar{A})x, \\ \bar{A}^T P + P\bar{A} &= -I \end{aligned} \quad (53)$$

로 하여 대칭인 행렬 P 를 계산하면

$$P = \begin{bmatrix} 2.3651 & 0.1903 & 0.2045 & -1.2156 \\ 0.1903 & 0.3487 & 0.3661 & 0.0797 \\ 0.2045 & 0.3661 & 0.4609 & 0.1702 \\ -1.2156 & 0.0797 & 0.1702 & 2.1871 \end{bmatrix} \quad (54)$$

의 양의 한계인 행렬을 얻는다. 이로부터 시간미분 행렬을 계산하면

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} = \begin{bmatrix} -0.3099\Delta b_{21} & -0.5162\Delta b_{21} & -0.2475\Delta b_{21} & 0.0922\Delta b_{21} \\ -1.0 & +0.2075\Delta a_{32} & & +0.2075\Delta a_{34} \\ & -0.8514\Delta b_{21} & & 0.1907\Delta b_{21} \\ -0.5162\Delta b_{21} & +0.7322\Delta a_{32} & -0.3541\Delta b_{21} & +0.3661\Delta a_{34} \\ +0.2075\Delta a_{32} & -1.0 & +0.4609\Delta a_{32} & +0.1702\Delta a_{32} \\ -0.2475\Delta b_{21} & -0.3541\Delta b_{21} & 0.1948\Delta b_{21} & 0.3236\Delta b_{21} \\ & +0.4609\Delta a_{32} & -1.0 & +0.4609\Delta a_{34} \\ & 0.1907\Delta b_{21} & & 0.1317\Delta b_{21} \\ 0.0922\Delta b_{21} & +0.3661\Delta a_{34} & 0.3236\Delta b_{21} & +0.3404\Delta a_{34} \\ +0.2075\Delta a_{34} & +0.1702\Delta a_{32} & +0.4609\Delta a_{34} & -1.0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

이 된다. 이에 대한 음의 한계를 Routh-Hurwitz의 안정기준을 적용하여 점근적 안정성을 점검하면 $|\Delta a_{32}| < 0.43$, $|\Delta a_{34}| < 0.24$ 와 $|\Delta b_{21}| < 0.44$ 의 결과가 계산된다.

- 3) Δa_{32} , Δa_{34} 와 Δb_{21} 의 새로운 한계값을 선택한다.
- 4) 상태변수를 (예제 1)과 (예제 2)와 같은 방법으로

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{A\lambda}[x(n-1) + \lambda(\Delta A + \Delta Bk)x(n-1)], \\ x_1 &= \cos v_1 \cos v_2 \cos v_3, \\ x_2 &= \sin v_1 \cos v_2 \cos v_3, \\ x_3 &= \sin v_2 \cos v_3, \quad x_4 = \sin v_3 \end{aligned} \quad (56)$$

로 선택하여(예제2)와 같은 방법으로 식(33)의 값을 점검한다.

- 5) 조건을 만족하는 강인한계영역을 찾기 위하여 Fig.1의 수치해석절차를 수행한다.

이 절차의 수행결과와 Singh와 Coehlo⁽¹²⁾의 결과 등과 비교하여 Table 1에 제시하였다. 위의 비교 결과를 보면 기존의 안정성 연구 결과와 비교하여 모든 상태변수에 대한 점검을 통한 제기된 방법에 의해 강인한계영역의 개선 결과를 알 수 있다.

Table 1 Robustness bounds of different stability conditions

구분	$ \Delta a_{32} $	$ \Delta a_{34} $	$ \Delta b_{21} $
Routh/Hurwitz	0.43	0.24	0.44
Singh/Coehlo	0.2	0.3	0.3
Proposed Method	0.47	0.26	0.48

4. 결론

리아프노프의 직접방법에 기초하여 함수자체의 시간 도함수의 부호로 안정성을 판정하는 기존의 방법에서 일정한 시간내의 적분값을 적용하여 모든 상태변수에 대하여 시스템의 안정성을 점검하는 방

법을 도입하였다. 연구대상은 선형시스템내에 구조화된 불확실성이 비선형요소로써 포함된 경우 즉, 플랜트에서 매개변수화된 모델로 표현 가능한 경우를 선정하였다. 또한 이렇게 매개변수로 포함되어 시스템의 안정성을 결정하는 불확실성의 강인영역 개선방법에 대한 수치해석절차를 수립하였다. 또한 이 절차를 구조화된 불확실성이 1, 2, 3개인 2, 3, 4차원 시스템에 적용한 결과 실질적인 강인영역의 개선가능성을 제시하였다.

참고문헌

1. Vannelli, A., and Vidyasagar, M., "Maximal Lyapunov function and domains of attraction for autonomous nonlinear systems," *Automatica*, Vol. 21, No. 1, pp. 69-80, 1985.
2. Patel, R.V., and Toda, M., "Quantitative measures of robustness for multivariable systems," in *Proceedings of Joint Automatic Control Conference*, San Francisco, CA, TP8-A., 1980
3. Patel, R.V., Toda, M., and Sridhar, R., "Robustness of linear quadratic state feedback designs in the presence of system uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp. 945-947, Dec. 1977.
4. Yeadavalli, R.K., and Liang, Z., "Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-31, No. 9, pp. 863-866, Sep. 1986.
5. Yeadavalli, R.K., "Perturbation bounds for robust stability in linear state space models," *International Journal of Control*, Vol. 42, pp. 1507-1517, Dec. 1985.
6. Yeadavalli, R.K., "Improved measures of stability robustness for linear state space models," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, Jun. 1985, pp. 577-579.
7. Brayton, R.K., and Tong, C.H., "Constructive Stability and asymptotic stability of dynamic systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 27, pp. 1121-1130, 1980.
8. Biernacki, R.M., Hwang, H., and Bhattacharyya, S.P., "Robust stability with structured parameter perturbations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, pp. 495-506, 1987.
9. Desoer, C.A., and Chan, W.S., "Robustness of stability conditions for linear time-variant feedback systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp. 586-590, Aug. 1977.
10. Zhou, K., and Khargonekar, P.P., "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, pp. 621-623, 1987.
11. Siljak, D. D., "Parameter space methods for robust control design: A guide tour," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, pp. 674-688, Jul. 1989.
12. Singh, S. N., and Coelho, Antonio A. R., "Nonlinear control of mismatched uncertain linear systems and application to control of aircraft," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 106, pp. 106-210, Sep. 1984.
13. Sundararajan, N., "Sensitivity reduction in aircraft control systems," *IEEE Transaction on Aerospace Electrical Systems*, Vol. 14, pp. 292-297, Mar. 1978.