한국정밀공학회지 제18권 제6호 (2001년 6월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering Vol. 18, No. 6, June 2001.

최적 치차비 구현을 통한 치차열의 각도 위치 오차 설계 및 해석

윤재윤*

Design and Analysis of Gear Train with Composition of Optimum Gear Ratio

Jae Youn Youn*

ABSTRACT

This paper addresses an analytical approach to the mechanical error analysis of gear train and tolerance design and manufacture of gear train in restricted space considering motor driving torque, driving system inertia, motor acceleration, motor rotor inertia and friction torque. The gear train is designed to have optimum gear ratio in restricted space and each gear is manufactured to have the lowest weight and each gear tooth is heat-treated to have robustness. Based on the small difference between the mechanical error analysis and measurement, gear train design with optimum gear ratio and restricted space and robustness is proposed.

Key Words : gear(치차), gear ratio(치차비), gear angular transmission error(치차의 각도 전달 오차), gear stiffness(치차 강성), gear error measurement(치차 오차 측정)

1. 서론

치차는 기계의 성능에 직접적으로 영향을 주는 요소로 많이 사용되므로 정밀하게 설계되고, 제작되어야 하며 정밀한 측정 절차를 통하여 조립되어야 기계 시스템의 구동 성능 구현에 미치는 오차량을 최소로 할 수 있다. 이러한 치차의 성능 특성은 설계, 제작, 조립 과정에서 발생하는 여러 가지 오차 요인으로 인하여, 요구되어지는 성능 목표치를 일관성있게 유지하지 못하고 예상하지 못한 성능의 저하를 유발시키기도 하며, 오차의 허용량인 공차에 따라 전체적인 기계 시스템의 성능이 달라진다.[1] 치차의 설계, 제작, 조립의 공차를 줄이면 성능 특성의 변동이 줄어들어 시스템의 성능이 향상되지만 가공 단가가 상승하게 되고 공차를 크게 하면 가공 비용은 절감되지만 품질이 나빠지게 되므로 공차의 엄격한 설정을 필요로 하다.[2]

또한 기계 시스템의 소형화, 경량화의 추세에 비추어 볼 때, 제한된 공간내에서 치차가 가장 최적하게 치차비를 가지도록 설계할 필요성이 있으며, 동력 전달시 발생하는 백래쉬를 고려한 설계가 이루어져야 하고, 강도적인 측면에서 충분히 강하

☞ 2000년 8월 25일 접수
* 국방과학연구소

도록 설계되어야 한다.[3)-5)]

본 연구에서는 최적한 치차비 선정 및 제한된 공간 조건을 고려한 치차의 설계 및 분석에 대한 연구가 필요하여 일반적으로 감속기 설계에서 고려해야 하는 치차의 잇수, 치폭, 모듈, 입력축 직경, 출력축 직경, 축길이 등의 설계 사양들을 고려하고, 기계 시스템 사양에 따른 최적 치차비의 선정과 제한된 공간내의 치차 배치를 통해 생성되는 치차열의 각도 위치 오차에 대한 해석을 수행하고, 동시에 치차열의 실제 제작 및 측정된 각도 위치 오차의 결과들을 비교함으로써 본 연구에 의한 치차의 설계, 제작, 조립의 정확성 및 치차의 각도 위치 전달에 대한 해석의 정확성을 검증하고자 한다.

2. 치차열의 운동방정식 및 최적치차비

치차열은 기계 시스템에서 사용하는 모터의 속도와 구동력을 치차비에 따라 구동시스템이 요구하는 속도와 구동력으로 변환하기 위하여 사용한다. 그러므로 구동 시스템이 요구하는 최적 치차비를 선정하여 기계시스템에 최대 각가속도를 줄 수 있는 일정 모터를 선정하도록 하였다.

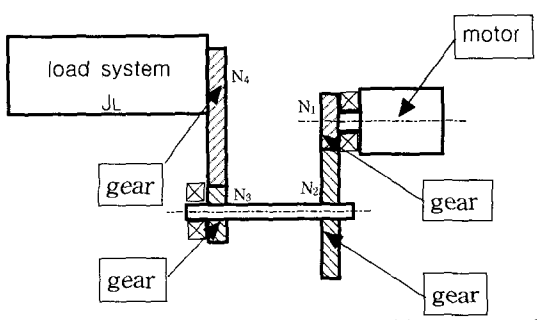

Fig. 1 Example of load system with motor and gear

Fig 1의 모터 및 치차를 이용한 구동 시스템에서 요구되는 모터의 구동력 산출을 위하여 각 토크항들에 치차비를 적용하여 모터축에 대한 토크력으로 구한 식은 다음과 같다.

$$T_M = (\frac{J_L}{N^2} + J_M)\ddot{\theta}_M + \frac{F_L}{N} + F_M \qquad (1)$$

(여기서, T_m : 모터 토크력

J_L : 부하장치관성(Load System Inertia)

N : $N_a \times N_b$

N_a : N_2 / N_1

N_b : N_4 / N_3

$\ddot{\theta}_M$: 모터의 각가속도

J_L : 모터의 회전관성력

F_M : 김발의 회전관성력

F_L : 모터의 회전마찰력)

식 (1)을 $\ddot{\theta}_M$ 에 대한 식으로 표현하면

$$\ddot{\theta}_M = \frac{N^2(T_M - \frac{F_L}{N} - F_M)}{J_L + N^2 J_M} \qquad (2)$$

이며, $\ddot{\theta}_M = N\ddot{\theta}_L$ 이므로, 부하장치(Load system)을 기준으로 한 각가속도 수식 $\ddot{\theta}_L$ 에 대한 식으로 나타내면

$$\ddot{\theta}_L = \frac{N(T_M - \frac{F_L}{N} - F_M)}{J_L + N^2 J_M} \qquad (3)$$

이다. 회전마찰 토크력이 시간 및 속도에 따라 변하지 않는다고 가정하고, 모터의 회전 마찰 토크력 또한 작다고 가정한 후, 최적 치차비의 선정을 위해 $\frac{d(\ddot{\theta}_L)}{dN} = 0$ 으로 하여 최적치차비 N_{opt} 를 구하자.

$$\ddot{\theta}_L = \frac{NT_M}{J_L + N^2 J_M} \qquad (4)$$

$$\frac{d(\ddot{\theta}_L)}{dN} = \frac{J_L - N^2 J_M}{(J_L + N^2 J_M)^2} = 0 \qquad (5)$$

이다. 식 (5)에서

$$N_{opt} = \sqrt{\frac{J_L}{J_M}} \qquad (6)$$

이다. 식 (6)에서 보여주듯이 최적치차비 N_{opt}는 모터부 관성과 모터와 연결된 구동시스템의 관성에 관련이 있다. 본 연구에서 사용한 구동시스템의 관성 측정값은 J_L = 1.98*10^{-2} Nms^{2}이고, J_M = 8.6 *10^{-6} Nms^2 이다. 그러므로 최적치차비는 다음과 같

다.

$$N_{opt} = 48 \quad (7)$$

식 (7)을 토대로 하여 실제 설계에 사용한 치차비는 1 : 48 이다. 본 기계시스템에서 사용하는 치차를 구동시스템의 소형화, 경량화에 의해 제한되어져야 하는 공간(가로 80mm, 세로 80mm, 높이 130mm)내에 효율적으로 배치하기 위하여 부득이하게 몇 단의 치차를 사용하여 치차열을 구성하였다. 그림 2는 최적 치차비를 만족할 수 있도록 제한된 공간 조건내에 치차를 배치한 그림이다. 설계된 각 치차의 사양은 표 1에서 보여준다.

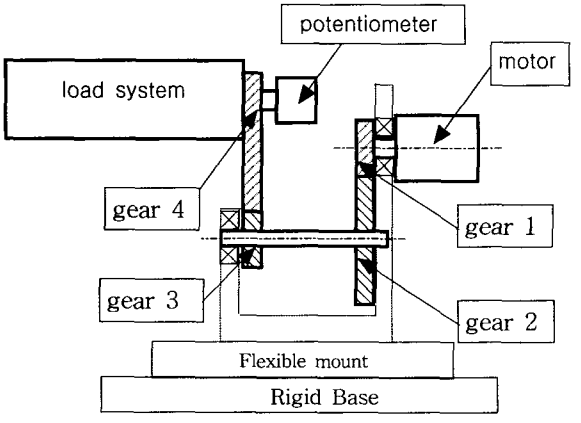

Fig. 2 Layout of gear train

Table 1 gear specification

	material	weight(g)	surface hardness	precision grade
gear 1	STS420	15	Hv≥900	AGMA Q11D
gear 2		11	Hv≥600	AGMA 13
gear 3		1.5		
gear 4		17.5		

2.1 치차 연결부위의 강성

한 쌍의 치차 연결부는 운동에너지의 저장 요소인 두 회전체와 치접촉부의 탄성을 고려한 두 회전체에 연결된 한 개의 스프링 요소로 모델링할 수 있다. 계의 고유치는 저감쇠의 경우와 무감쇠의 경우가 큰 차이가 없으므로 감쇠를 무시하기로 한다. 치차와 피니언의 치접촉부의 강성은 치차 접촉 위치에 따라 50% 정도의 변화가 있으나[6] 본 논문에서는 평균 강성 값으로 단순화하였다.

2.2 회전축 부의 강성

회전축의 축방향 및 축방향 등가 스프링상수는 축 직경과 축 길이 그리고 치차 회전체 설치 위치로부터 산출된다.

2.3 베어링부의 정밀도

베어링은 3축간의 상호 정밀도와 베어링 유격을 없애기 위해 정밀하게 두께가 조정된 심(shim)을 삽입하여 사용하므로 베어링의 축방향으로 예압을 인가하여 적정한 탄성 변형을 사전에 줌으로써 베어링의 유격을 없애고, 발사 및 비행중의 외적 하중 작용시 변형이 적도록 하여 각 축간의 상호 정밀도를 유지하도록 한다. 베어링에 인가된 하중이 증가함에 따라 단위 하중당의 변형은 감소한다. 따라서, 변형율을 적게 하기 위해서는 적절한 탄성을 초기에 주는 예압 작업을 수행한다. 베어링의 조립 공차는 사용하고자 하는 베어링의 그룹핑(Grouping) 데이터의 그룹(Group)에 따라 측정된 베어링을 분류하여 가공후 측정된 하우징 및 축의 데이터와 비교하여 0 ~ 0.003mm의 조립 공차를 유지하도록 부품을 선정하여 조립한다. 이 때 조립 공차 규격은 베어링과 축의 동심도가 0.01mm, 베어링과 축의 직각도가 0.02mm, 베어링과 하우징의 끼워맞춤 공차가 2 ~ 5μ m, 베어링과 축의 끼워맞춤 공차가 0 ~ 3μ m로 한다.

2.4 하우징부와 마운팅부의 강성

치차열의 하우징은 강성이 매우 크므로 본 연구에서는 강체 모드만을 고려하기로 하며, 마운팅부는 고무마운팅을 할 경우도 있고, 강체 바닥에 볼트 고정하여 사용할 경우도 있다.

3. 치차열의 회전 각도 오차 해석

설계 및 제작 조건을 만족하도록 가공된 치차를 이용하여 구한 에러양은 총치차 각도 위치 에러(Total Angular Position Error) Ea와 각도측정센서의 위치정밀도에 의한 에러 그리고 치차의 강성에 의한 탄성 변형 각도 오차의 합에 의해 발생하는 에러양으로 기계시스템의 각도 위치 정밀도에 영향을 미친다. 그러므로 각도 위치 정밀도를 발생시키는

각각의 항목들에 대해 그 오차 계산량을 살펴본다.

- 총 각도 위치 오차 Ea : 0.091°
- 각도 측정 센서의 위치정밀도 : 0.0004° 의 백래쉬
- 치차의 강성에 의한 탄성 변형 각도 오차 : 0.0037°

3.1 총 각도 위치 오차 Ea

Ea는 치차열의 백래쉬(Backlash)와 누적피치허용공차(Cumulative pitch tolerance)의 합으로 정의되며, 치차의 정밀도에 영향을 미치는 중요한 요소이다. 그러므로 Ea양에 대해 미리 계산하여 기계시스템의 오차양이 요구하는 수준이내에 속하는지 살펴본다.

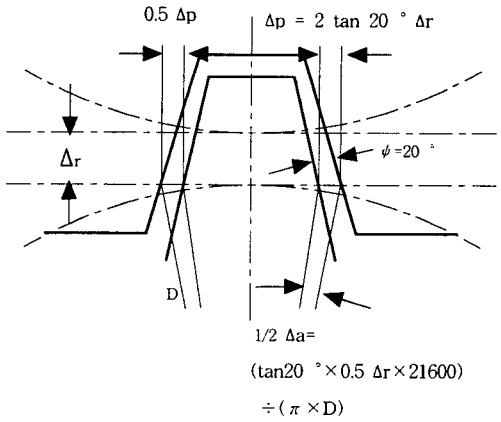

Fig. 3 Geometrical relation of gear backlash (pressure angle α=20 °)

치차 전달 공차(gear transmission error) ΔT는 각도백래쉬(angular backlash) Δ_a와 피치에러공차 (pitch error tolerance) Δ_p의 합이며, 다음과 같다.[4]

$$\Delta_T = \Delta_a + \Delta_p \tag{8}$$

각도백래쉬 Δ_a는 다음과 같다.

$$\Delta_a = \frac{2\times\tan 20^\circ\times\Delta_r\times 21,600}{\pi\times D} \tag{9}$$

(D : 피치원 직경
21,600/2π : 단위환산값(=360/2π × 60)으로 각도의 원주변환값 및 각도의 분변환값
Δ_r : 최대 반지름방향 변위)

최대 반지름방향 변위 (Maximum Radial Displacement) Δ_r는 아래와 같이 여러 공차에 의해 구현된다.

Δ_r = 피니언의 최소계측 데이터
+ 휠의 최소 계측 데이터
+ 중심거리공차
+ 피니언축에 장착된 베어링의 전체 반경방향 클리어런스의 2분의 1
+ 휠축에 장착된 베어링의 전체 반경방향클리어런스의 2분의 1
+ 피니언베어링의 런아웃의 2분의 1
+ 휠베어링의 런아웃의 2분의 1

Δ_p 는 다음과 같다.

$$\Delta_p = \frac{\delta_p\times 21,600}{\pi\times D} \tag{10}$$

(δ_p : 피치에러)

그러므로, 본 치차열 Ea의 최대값은 다음과 같다.

Table 2 gear train tolerance(unit : mm)

gear number	gear 1 & 2	gear 3 & 4
Minimum indicator-reading for the pinion	0.0180	0.0200
Minimum indicator-reading for the wheel	0.0240	0.0270
Center distance tolerance	0.0042	0.0054
Half the total of radial clerance in the pinion-shaft bearings	0.0000	0.0025
Half the total of radial clerance in the wheel-shaft bearings 1	0.0025	0.0030
Half the run-out of pinion bearings	0.0000	0.0030
Half the run-out of wheel bearings	0.0025	0.0040

최대 반지름방향 변위 Δ_r 는 $\Delta_{r(\text{치차1과2})}$ = 0.0512° , $\Delta_{r(\text{치차3과4})}$ = 0.0649° 이다. 각도백래쉬(Angular backlash) Δ_a는 $\Delta_{a(\text{치차1과2})}$ = 0.086° , $\Delta_{a(\text{치차3과4})}$ = 0.044° 이다. 출력축의 치차 4에서 백래쉬 $\Delta_{a(\text{치차4})}$는 0.053° 이다. 피치 에러 공차 δ_p는

Table 3 pitch error tolerance(unit : mm)

gear Number	gear 1 & 2	gear 3 & 4
Cumulative pitch tolerance δ_p	0.0290	0.0330

이다. Δ_p는 $\Delta_{p(\text{치차1과2})} = 0.066^\circ$, $\Delta_{p(\text{치차3과4})} = 0.031^\circ$ 이다. 출력축 치차 4에서 구현된 피치 에러 공차 $\Delta_{p(\text{치차4})}$는 0.038° 이다. 출력축 치차 4에서의 최대 Ea $\Delta_{T(\text{치차4})}$는 0.091° 이다.

3.2 치차의 강성에 의한 탄성변형 각도오차

모터의 구동력은 각 치차의 이(tooth)를 통하여 기계 시스템 구동체에 전달되며 하중은 각 치차가 상호접촉한 접촉선에 작용하게 된다. 작용 하중은 각 치차의 강성에 따라 탄성한도내의 변형을 하게 되는데 치차열은 구성하는 치차수가 많고 작용하중에 비해 치차의 강성이 작을 경우 정밀한 위치제어를 위해서는 치차열의 누적된 변형에 의한 회전각도 오차를 검토해야 한다.

치차열의 전체강성(Total stiffness) K_{TS} 공식은 다음과 같다.

$$K_{TS} = \frac{1}{\frac{1}{K_{p0}} + \frac{1}{N_1^2 K_{p1}} + \frac{1}{N_2^2 K_{p2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{N_n^2 K_{pn}}} \quad (11)$$

(여기서, N_n : load system으로부터 가장 가까운 기어의 기어비

$K_{pn} = k_{sn} K_{sn} / (k_{sn} + K_{sn})$)

위의 전체 강성을 구하는 공식으로부터 맞물린 한 쌍의 스퍼치차의 강성 K_{sn} 식을 유도하면 다음과 같으며[5],

$$K_{sn} = \frac{T_n}{\theta_n} = 4 D_n^2 F \times \frac{E_n Z_n E_{n+1} Z_{n+1}}{E_n Z_n + E_{n+1} Z_{n+1}} \quad (12)$$

(여기서, T_n : n번째 기어의 회전토크

θ_n : n번째 기어의 회전 변형각도

D_n : n번째 기어의 피치반경

$Z_n = \frac{y_n}{0.242 + 7.25 y_n}$

Z_n : n번째 기어의 탄성변형계수

E_n : n번째 기어의 영탄성계수

y_n : n번째 기어의 Lewis form factor)

이다. 또한 치차축의 강성 계산공식[5]으로부터

$$k_{sn} = \frac{\pi G_s D^4}{2L} \quad (13)$$

(여기서, k_{sn} : n번째 기어축의 강성

G_s : n번째 축의 전단탄성계수

D_n : n번째 축직경

L_n : n번째 축의 길이)

유도되어진다. 계산에 필요한 데이터는 표 4, 5를 참조한다.

Table 4 gear specification (unit : mm)

	teeth num	pitch circle diameter	center distance	gear ratio	total gear ratio
gear 1	16	8	28	1 : 6	1 : 48
gear 2	96	48			
gear 3	26	13	58.5	1 : 8	
gear 4	208	104			

Table 5 gear material data

	young's modulus (g/cm^2)	Face Width	Shaft Dia	Shaft Length	shear modulus (g/cm^2)
gear 1	197×10^7	6 mm	-	-	-
gear 2	197×10^7	6 mm	8 mm	50 mm	878×10^6
gear 3	197×10^7	6 mm	-	-	-
gear 4	197×10^7	6 mm	-	-	-

강성계산과정은 다음과 같다. 치차 1과 치차 2의 $K_{s(\text{치차1과2})}$ 값은 1.8×10^8 g-cm/rad 이다. 치차 2와 3을 연결하는 축의 $k_{s(\text{치차2})}$값은 0.47×10^8 g-cm/rad 이다. 치차 3과 치차 4의 $K_{s(\text{치차3과4})}$ 값은 3.8×10^8 g-cm/rad 이고, 치차 1과 치차 2의 기어비는 N_a = 1/6이다. 기어비 N_a은 Fig 1의 Load system에 가장 가까운 기어로부터 얻어진 기어비이다. 전체치차강성 K_S 은 1,170,000 g-cm/rad 이다. 구동치차열에 작용하는 접선하중을 구동시스템의 무게 및 회전센터

까지의 반경을 고려하여 계산한 결과값 4.3 Kg-cm와 K_{Ts}를 고려하여 힘과 변위의 관계식으로부터 치차의 탄성 변형 각도를 개략적으로 구해보면 치차열에서 발생하는 치차 탄성 변형 각도는 0.0037° 이다. 이 값은 측정에 의해 구하기에는 미소한 값이므로 여기서는 계산치로 대체한다.

4. 측정 및 결과 토의

4.1 치차 측정

치차의 검사 방법은 단일 플랭크 시험(Single Flank Test) Fig 4와 이중 플랭크 시험(Double Flank Test) Fig 5에 의하여 단일 플랭크 테스트는 백래쉬, 피치 에러, 누적 피치 에러를 측정하고, 이중 플랭크 테스트는 최대총복합에러(Maximum total composite error)를 측정한다. 단일 플랭크 시험과 이중 플랭크 시험의 측정 장치 구조도는 Fig 6과 같은 방식을 사용한다.

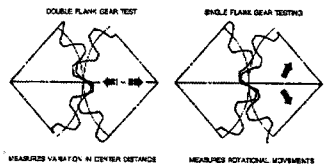

Fig. 4 Double/Single flank inspection method

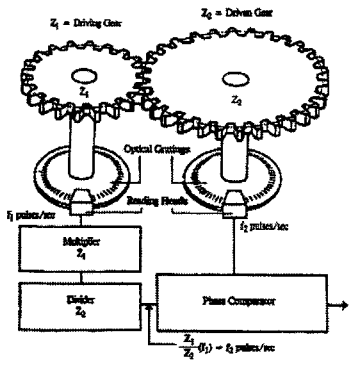

Fig. 5 Double/Single flank test schematic diagram

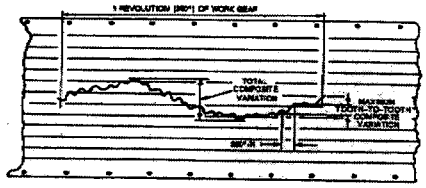

Fig. 6 Double/Single flank measuring result

4.2 백래쉬 측정

기계 시스템 조립체의 백래쉬 측정은 포텐쇼미터와 디지털 멀티미터를 이용하여 가능하며, 백래쉬의 측정방법은 먼저 조립된 포텐쇼미터의 최대회전 각도인 ± 45° 에 ± 10 V의 전압을 인가하여 0 V를 출력하는 위치를 기계 시스템 조립체의 절대적 영점(Zero)라고 가정한다. 그리고 영점 근처에서의 백래쉬, 반시계 방향 최대 회전각 -45° 에서의 백래쉬, 시계 방향 최대 회전각 45° 에서의 백래쉬를 각각 측정하며 그 방법은 다음과 같다. 영점 근처에서의 백래쉬 측정의 경우는 먼저 기계 시스템 조립체를 영점 근처까지 돌리고 전압을 측정하고, 기계 시스템을 시계 방향 또는 반시계 방향으로 치차가 돌아갈 때까지 돌려서 전압을 측정하고 영점 근처에서의 전압과의 차이를 구한다. 그리고 ± 45° 근처에서의 백래쉬 측정의 경우도 마찬가지로 먼저 기계 시스템 조립체를 ± 45° 근처까지 돌리고 전압을 측정하고, 기계 시스템을 시계 방향 또는 반시계 방향으로 치차가 돌아갈 때까지 돌려서 전압을 측정하고 ± 45° 근처에서의 전압과의 차이를 구한다. 실제 측정한 결과 치차열의 백래쉬는 8mVDC(=0.06 deg)이다. 이 측정 결과는 치차열의 각도 위치 오차 해석값 0.091° 보다 작게 나타나는데, 이것은 실제 해석시 최대 에러 양들을 고려하여 발생가능한 치차열의 각도 위치 오차 해석값을 얻었기 때문이다. 이상으로 감속기 설계에서 고려해야 하는 설계 사양들을 고려하고, 기계 시스템에 따른 최적 치차비의 선정과 제한된 공간내의 치차 배치를 통해 생성되는 치차열의 각도 위치 오차에 대한 해석을 수행하고, 동시에 치차열의 실제 제작 및 측정된 각도 위치 오차의 결과들을 비교함으로써 본 연구에 의한 치차의 설계, 제작, 조립의 정확성 및 치차의 각도 위치 전달에 대한 해석의 정확성을 검증하였다.

5. 결론

본 연구에서는 치차열이 조립될 수 있는 부위가 제한된 공간내에서 최적 치차비 구현을 통해 치차열의 설계를 수행하였으며, 설계된 치차의 백래쉬 양을 해석을 통하여 구하였고, 해석에 의해 구한 최대 백래쉬양을 실제로 검증하기 위하여 치차열을 실제 제작하고, 정밀하게 조립하여 치차열의 백래쉬양을 실험을 통해 구해본 결과 해석한 결과와 유사함을 알 수 있었다. 이를 통하여 본 연구에서 수행한 해석의 유효성을 검증할 수 있었고, 또한 이러한 설계 과정과 해석 과정을 근거로 하여 제한된 공간내에서 기계구조물이 치차열을 가질 경우 최적한 치차비의 구성 및 백래쉬의 해석 과정을 기계구조물에 그대로 적용하여 발생가능한 백래쉬양을 미리 예측하여 설계에 반영해도 무방함을 알 수 있었다.

참고문헌

1. "Gear Design, Manufacturing and Inspection Manual," Society of Automotive Engineers Inc, 1990.
2. 최진호, "공차로 인한 평면 기구의 기계적 오차 해석," 대한 기계학회 논문집, pp. 663- 672, 1997.
3. M.S. Tavakoli, D.R. Houser, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gear," Trans. of ASME, Vol. 108, Mar, pp. 86 - 95, 1986.
4. Y. Atiga, S. Nagata, "Load Capacity of a New W-N Gear with Basic Rack of Combined circular and Involute Profile," Trans of ASME, J. of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 107, Dec, pp. 565 - 572, 1985.
5. Z.Ou, A.Seireg, "Analysis and Synthesis of Circular Arc Gears by Interactive Graphics," Trans of ASME, J. of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 108, Mar, pp. 65 - 71, 1988.
6. George W. Michalec, "Precision Gearing : Theory and Practice," 1966.
7. C. J. Richards, "Mechanical Engineering in Radar and Communications," 1967.
8. Humphrey. W. M, "Introduction to servomechanism system design," 1973.
9. 김석, 박희재, 안우정, 김구영, "삼차원 측정기를 이용한 기어 형상 정밀도 측정 및 평가 기술 개발," 대한기계학회 추계학술대회, 1997.
10. 유명섭, "타원형 엽형 기어의 설계 및 동특성에 관한 연구," 한국정밀공학회지, pp. 7-14, 1998.
11. 최상훈, "인벌류우트-트로코이드 치형을 갖는 타원계 엽형기어의 최소 잇수에 관한 연구," 한국정밀공학회지, pp. 85-92, 1998.