

비선형 연속축의 1/2차 분수조화진동 및 내부공진

남궁재관*, 이성우**

Subharmonic Resonances of order 1/2 of Continuous Rotor with Nonlinearity and Internal Resonances

Chai-Kwan Namkoong*, Seong-Woo Lee**

Abstract

Subharmonic resonances of order 1/2 of a continuous rotating shaft with distributed mass are discussed. The restoring force of the shaft exhibits geometric stiffening nonlinearity due to the extension of the shaft center line. It is assumed that a distributed lateral force, such as the gravity, acts on the rotor. The possibility of the occurrence of subharmonic resonances, the shapes of resonance curves, and internal resonance phenomena are investigated.

Key Words : Vibration of Rotating(회전축의 진동), Vibration of Continuous System(연속계의 진동), Nonlinear Vibration(비선형 진동), Subharmonic Resonance(분수조화공진), Internal Resonance(내부공진)

1. 서론

균일한 분포질량을 갖는 연속회전축에 있어서 베어링 중심선 방향의 이동을 구속하면 축의 복원력은 기하학적 비선형성을 갖는다.

Bolotin⁽¹⁾ 및 Shaw⁽²⁻⁴⁾와 Ishida⁽⁵⁾는 이와 같은 계의 주위 힘속도 부근의 공진 곡선을 비대칭형축 또는 계의 안정성과 카오스 진동에 대해서 연구했다.

만일 어떤 이유로 축에 직각한 힘이 작용하여 정적인

균형 위치가 베어링 중심선에서 벗어나면 그 탄성복원력이 방향에 따라 스프링 특성이 다른 비대칭 비선형성분도 나타난다. 수평축에 있어서 중력이 작용하는 경우가 그 대표적인 예지만 연직축에서도 조립불량 등에 의해 축에 횡방향의 힘, 또는 모멘트가 작용하여 정지평형위치가 베어링 중심선에서 벗어나는 경우도 같다.

이와 같은 경우, 대칭비선형성분만을 갖는 연직축에서는 나타나지 않았던 종류의 비선형진동이 발생할 가능성이 있다. 본 논문에서는 특히 1/2차 분수조화진동[$2p_{fn}$],

* 서울산업대학교 기계설계학과 교수
** 서울산업대학교 정밀기계연구소 선임연구원
(ylswoo@kornet.net)

후향 1/2차 분수조화진동 $[-p_{bn}]$ 과 합차조화진동 $[p_{fn} - p_{bn}]$ 에 대해서 조사한다. 또한, 기호 $[2p_{fn}]$ 는 회전속도 $\omega = 2p_{fn}$ 부근에서 발생하는 진동을 나타낸다. 이들 진동은 자이로모멘트 작용의 작은 회전속에서는 어느쪽도 주위협속도의 2배의 회전속도 부근에서 발생한다.

일반적으로 다자유도계에서 고유진동수가 간단한 정수비가 되는 경우, 내부진동이 있는 계라고 한다. 회전체가 없는 연속회전축에서는 축길이에 비해 직경이 가는 경우, 전향과 후향의 고유진동수의 크기가 거의 일치하기 때문에 이 내부공진현상이 문제가 된다. 여기서는, 이 내부공진의 영향에 대해서도 명확하게 밝힌다.

2. 운동방정식

길이 l , 직경 d 의 원형단면을 갖는 회전축(밀도 ρ , 종탄성계수 E) 을 생각한다. Fig. 1 은 축에 직각한 힘으로 중력이 작용하는 수평연속회전축의 좌표계를 나타낸다. 축단에 원점 O 을 일치시키고 중력방향을 y 축, 베어링 중심 방향에 z 축을 잡은 정지 직교좌표계 $O-xyz$ 와, 회전축의 각속도 ω 로 회전하는 회전좌표계 $O-\xi\eta\varsigma$ 를 생각한다. 불균형의 $O\xi$, $O\eta$ 방향의 성분을 $e_\xi(s)$, $e_\eta(s)$, 단위 길이 당의 외부점성감쇄를 c 로 한다. 전단변형은 무시한다. 시간 t 에 있어서 축의 Ox , Oy 방향의 힘을 $u(s, t)$, $v(s, t)$ 로 하고 다음과 같은 무차원량을 도입하면

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u}{e_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{e_0}, \quad \bar{s} = \frac{s}{l}, \quad \bar{e}_\xi = \frac{e_\xi}{e_0}, \\ \bar{e}_\eta &= \frac{e_\eta}{e_0}, \quad \alpha = \frac{Ae_0^2}{2I}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{r}, \quad x = \frac{\pi^2 d^2}{16l^2}, \\ \bar{i} &= \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t (\equiv \tau t), \quad \bar{c} = \frac{cl^4 r}{\pi^4 EI} \\ \bar{g} &= \frac{g}{e_0 r^2} \end{aligned} \tag{1}$$

이 되며, 여기서 e_0 는 적당한 크기의 대표크기, A 는 축의 단면적, I 는 축의 단면2차 모멘트이다. 무차원량에 달린 바를 생략하고 또 복소수 $z = u + iv$ 를 도입하면, 다음의 무차원 운동방정식을 얻는다.

$$\frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 z}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$$

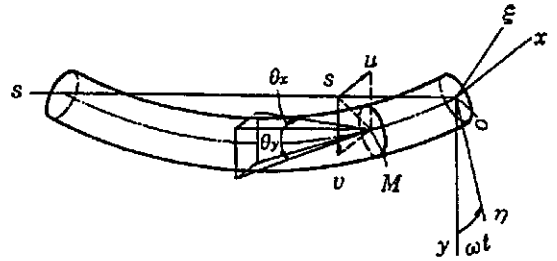


Fig. 1 Rotor and coordinates

$$\begin{aligned} & - \frac{x}{\pi^2} \left[\frac{\partial^4 z}{\partial s^2 \partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial^3 z}{\partial s^2 \partial t} \right] \\ & + c \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\alpha}{\pi^4} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \int_0^l \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \right) ds \\ & = \omega^2 [e_\xi(s) + ie_\eta(s)] e^{i\omega t} + ig \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ 이다

경계조건은 양단단순지기로 한다. 또한 윗 식에서 x, c, α 는 미소량이라 가정한다. 이 미소량을 대표하는 파라메타로 ϵ 를 사용한다. 또 ϵ 과 같은 정도의 크기인 것을 $O(\epsilon)$ 로 나타낸다.

먼저, 선형, 무감쇄계의 자유진동의 진동수 p 를 구한다. 자이로스코프 작용이 작은 ($x=0$) 경우의 모달 형상은 $\varphi_n(s) = \sin \nu_n \pi s$ ($\nu_n = n, n = 1, 2, \dots$) 로 근사 할 수 있으며, 그 자유진동해는

$$z(s, t) = Z \sin \nu_n \pi s \cdot e^{ip t} \tag{3}$$

라고 놓는다. 진동수 p 는 특성방정식

$$G_n(p) \equiv \nu_n^4 + 2x\nu_n^2 \alpha p - (1 + x\nu_n^2) - (1 + x\nu_n^2) p^2 = 0 \tag{4}$$

의 근으로 주어진다. 그 근은 각 차연수 n 에 대해서 각각 2근 p_{fn}, p_{bn} 을 갖는다. 근 $p_{fn} (> 0)$ 은 전향선회운동에 대응하며 근 $p_{bn} (< 0)$ 은 후향선회운동에 대응한다. 식 (4)에서 구한 고유진동수의 한 예를 Fig. 2에 나타낸다. 고유진동수 p_{fn} 과 직선 $p = \omega$ 와의 교점이 각 모달의 주위협속도 ω_n 이 된다.

다음으로 강제진동해를 고유함수 $\varphi_n(s)$ 으로 다음과 같이 전개한다.

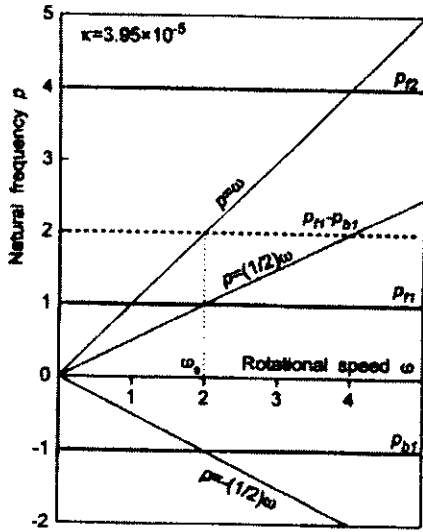


Fig. 2 Relation between the natural frequency p_{R}, p_{Bn} and the rotational speed

$$\begin{aligned}
 u(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(s) \\
 v(s, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \varphi_n(s)
 \end{aligned} \tag{5}$$

같은 방법으로 불균형과 중력에 대해서도 다음과 같이 전개한다.

$$\begin{aligned}
 e_{\xi}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(s) \\
 e_{\eta}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(s) \\
 g(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(s)
 \end{aligned} \tag{6}$$

식 (5)와 (6)을 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 모달진폭 u_n, v_n 에 관한 상미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 (1 + x\nu_n^2)\ddot{u}_n + c\dot{u}_n + 2x\omega\nu_n^2\dot{v}_n \\
 + \nu_n^4 u_n + \alpha\nu_n^2 u_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu_j^4}{2} (u_j^2 + v_j^2) \\
 = \omega^2 (a_n \cos \omega t - b_n \sin \omega t)
 \end{aligned}$$

$$(1 + x\nu_n^2)\ddot{v}_n + c\dot{v}_n + 2x\omega\nu_n^2\dot{u}_n$$

$$\begin{aligned}
 + \nu_n^4 v_n + \alpha\nu_n^2 v_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu_j^4}{2} (u_j^2 + v_j^2) \\
 = \omega^2 (a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t) + g_n
 \end{aligned} \tag{7}$$

$(n = 1, 2, L)$

3. 내부공진의 영향이 없는 경우

Fig. 2와 달리 자이로스코프 작용으로 각 진동의 공진점이 일치하지 않는 경우에 대해 해석한다. 이것은 내부공진의 영향이 없으며 분수조화진동 또는 합차조화진동이 단독으로 발생한다고 가정한다.

3.1 전향 1/2차 분수조화진동 $[2p_{fn}]$

위험속도 $\omega = 2p_{fn}$ 부근의 1/2차 분수조화진동 $[2p_{fn}]$ 의 해를 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned}
 u_n &= R \cos(\omega_{fn} t + \delta) + P \cos(\omega t + \beta) + Q_x \\
 v_n &= R \sin(\omega_{fn} t + \delta) + P \sin(\omega t + \beta) + Q_y
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $\omega_{fn} = (1/2)\omega$ 이다. 식 (8)을 상미분방정식 (7)에 대입하여 분수조화진동에 대해서는 $O(\epsilon)$ 정밀도로 하며 정수항에 대해서는 $O(\epsilon^0)$ 의 정밀도로 계수비교를 하면 식 (9), (10)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 A_{fn} R \dot{\delta} &= G_n(\omega_{fn}) R \\
 &+ \alpha_{nn} R \{R^2 + 2P_0^2 + 2Q_y^2 \\
 &+ 2P_0 Q_y \sin(2\delta - \beta_0)\} \\
 A_{fn} \dot{R} &= -c\omega_{fn} R - 2\alpha_{nn} P_0 R Q_y \cos(2\delta - \beta_0)
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= 0 \\
 Q_y &= g_n / \nu_n^4
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 A_{fn} &= 2\{(1 + x\nu_n^2)\omega_{fn} - x\nu_n^2 \omega\} \\
 \alpha_{nn} &= (1/2)\alpha\nu_n^2
 \end{aligned} \tag{11}$$

이며, 또 $G_n(\omega_{fn})$ 는 식 (4)에 ω_{fn} 을 대입한 값이다. 또 조화진동해 $P = P_0, \beta = \beta_0$ 를 이용한다.

정상해 $R = R_0, \delta = \delta_0$ 는 식 (9)에 $\dot{R} = \dot{\delta} = 0$ 라고 했을 때 얻어지는 비선형 대수방정식을 풀면 구할 수 있다.

진폭 R 에 관해서 다음의 2종류의 정상해의 존재를 알 수 있다.

(i) $R_0 = 0$ 의 해

진폭이 영인 해가 존재한다. 일반적으로 안정판별은 정상해에서의 미소한 오차를 가정하여 그 변동량에 관한 미분방정식을 유도하지만, 이 경우는 정상해의 위상각 δ_0 가 정해지지 않기 때문에 변수 R , δ 를 이용한 식 (9)의 표현으로는 안정판별을 할 수 없다. 그러나 변수를 변환식

$$u = R \cos \delta, \quad v = R \sin \delta \quad (12)$$

에 의해 u, v 로 변환하면 정상해 $u_0 = v_0 = 0$ 에서의 미소 오차를 가정하므로서 안정판별을 할 수 있다.

(ii) $R_0 \neq 0$ 의 해

축이 굵은 경우에 대해 계산해 보면 $R_0 \neq 0$ 의 해가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다. 한편 축이 가는 경우에는 $R_0 \neq 0$ 의 해가 존재하지만, 그 경우는 내부공진이 있는 계가 되기 때문에 그것을 고려한 제4장과 같은 해석을 할 필요가 있다.

3.2 후향 1/2차 분수조화진동 $[-2p_{bn}]$

위험속도 $\omega = -2p_{bn}$ 부근의 1/2차 분수조화진동 $[-2p_{bn}]$ 의 해를 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned} u_n &= R \cos(\omega_{bn} t + \delta) + P \cos(\omega t + \beta) + Q_x \\ v_n &= R \sin(\omega_{bn} t + \delta) + P \sin(\omega t + \beta) + Q_y \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $\omega_{bn} = -(1/2)\omega$ 이다. 3.1절과 같이 해석하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} A_{bn} R \dot{\delta} &= G_n(\omega_{bn}) R \\ &\quad + \alpha_{nn} R (R^2 + 2P_0^2 + 2Q_y^2) \\ A_{bn} \dot{R} &= -c \omega_{bn} R \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$A_{bn} = 2\{(1 + x\nu_n^2)\omega_{bn} - x\nu_n^2\omega\} \quad (15)$$

이다. 정상해는 위식에서 $\dot{R} = \dot{\delta} = 0$ 라고 놓으면 구할 수 있지만, 그 결과, 해 $R_0 = 0$ 만이 얻어진다. 즉, 후향 1/2차 분수조화진동 $[-2p_{bn}]$ 은 발생하지 않는다는 것을 알 수 있다.

3.3 합차조화진동 $[p_{fn} - p_{bn}]$

관계 $p_{fm} - p_{bn} = \omega(m, n = 1, 2, L)$ 가 성립하는 회전속도 ω_0 부근에서는 진동수 ω 의 조화진동과 함께 고유진동수 p_{fn} 과 p_{bn} 에 가까운 진동수를 갖는 성분이 크게 발생할 가능성이 있다. 이 진동에서는 m 과 n 이 다른 경우와 같은 경우가 있지만, 여기서는 두 개의 성분의 모달차수가 같은 $m = n$ 의 특별한 경우에 대해서 해석한다. $O(\epsilon)$ 의 정밀도의 해는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_n &= R_{fn} \cos \theta_{fn} + R_{bn} \cos \theta_{bn} \\ &\quad + P_n \cos(\omega t + \beta_n) + Q_x \\ v_n &= R_{fn} \sin \theta_{fn} + R_{bn} \sin \theta_{bn} \\ &\quad + P_n \sin(\omega t + \beta_n) + Q_y \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 θ_{fn}, θ_{bn} 은 각각 p_{fn}, p_{bn} 에 가까운 진동수를 갖는 성분의 전위상이다. 합차조화진동의 진동수는 $O(\epsilon^0)$ 의 정밀도에서는 각각

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{fn} &= (p_{fn0} / \omega_0) \omega (= \omega_{fn}) \\ \dot{\theta}_{bn} &= (p_{bn0} / \omega_0) \omega (= \omega_{bn}) \end{aligned} \quad (17)$$

으로 근사할 수 있다. 여기서 p_{fn0}, p_{bn0} 는 ω_0 에서 p_{fn}, p_{bn} 의 값이며 식 (17)의 진동수는 기지가 된다. 이들 값을 ω_{fn}, ω_{bn} 으로 나타내며 전위상을

$$\begin{aligned} \theta_{fn} &= \omega_{fn} t + \delta_{fn} \\ \theta_{bn} &= \omega_{bn} t + \delta_{bn} \end{aligned} \quad (18)$$

로 나타낸다. 회전속도 ω 와 합차조화진동의 진동수에 대해서 $O(\epsilon)$ 의 정밀도로 다음과 같은 관계가 있다.

$$\omega = \dot{\theta}_{fn} - \dot{\theta}_{bn} \quad (19)$$

식 (16)을 식 (7)에 대입하고 진동수 ω_{fn} 와 ω_{bn} 및 정수항에 대해서 계수비교를 한다. 기호 $\psi = \delta_{fn} - \delta_{bn}$ 를 이용하면 식 (20) 및 식 (10)을 얻는다.

$$\begin{aligned} A_{fn} R_{fn} \dot{\delta}_{fn} &= G_n(\omega_{fn}) R_{fn} \\ &\quad + \alpha_{nn} \{(R_{fn}^2 + 2R_{bn}^2 + 2P_{n0}^2 + 2Q_y^2) R_{fn} \\ &\quad - 2P_{n0} R_{bn} Q_y \sin(\psi - \beta_{n0})\} \\ A_{fn} \dot{R}_{fn} &= -c \omega_{fn} R_{fn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\alpha_{nn} P_{n0} R_{bn} Q_y \cos(\varphi - \beta_{n0}) \\
 A_{bn} R_{bn} \dot{\delta}_{bn} & = G_n (\omega_{bn}) R_{bn} \\
 & + \alpha_{nn} \{ (2R_{fn}^2 + R_{bn}^2 + 2P_{n0}^2 + 2Q_y^2) R_{bn} \\
 & - 2P_{n0} R_{fn} Q_y \sin(\varphi - \beta_{n0}) \} \\
 A_{bn} \dot{R}_{bn} & = -c\omega_{bn} R_{bn} \\
 & - 2\alpha_{nn} P_{n0} R_{fn} Q_y \cos(\varphi - \beta_{n0}) \quad (20)
 \end{aligned}$$

위 식에서 진폭 R_{fn} , R_{bn} 에 관하여 다음의 2종류의 정상해 R_{fn0} , R_{bn0} 가 구해진다.

(i) $R_{fn0} = R_{bn0} = 0$ 의 해

식 (20)에서 진폭이 영인 해가 존재하는 것은 자명하다. 그 안정성은 앞에서와 같이 다음의 변환식

$$\begin{aligned}
 u_{fn} & = R_{fn} \cos \delta_{fn}, \quad v_{fn} = R_{fn} \sin \delta_{fn} \\
 u_{bn} & = R_{bn} \cos \delta_{bn}, \quad v_{bn} = R_{bn} \sin \delta_{bn} \quad (21)
 \end{aligned}$$

을 이용해서 풀 수 있다.

(ii) $R_{fn0} \neq 0$, $R_{bn0} \neq 0$ 의 해

이 경우에는 정상해라도 $\dot{\delta}_{fn}$, $\dot{\delta}_{bn}$ 이 영이 되지 않는다. 그러나 식 (19)에 식 (17), (18)의 관계를 이용하면 $\dot{\delta}_{fn} - \dot{\delta}_{bn} = 0$ 가 되는 관계가 얻어진다. 정상해는 식 (20)에서 \dot{R}_{fn} , \dot{R}_{bn} 및 $\dot{\psi}$ 를 영으로 놓은 식을 풀면 얻어지지만, 그 결과 전향 1/2차 분수조화진동과 같은 결과를 얻는다. 즉 축이 굵은 경우는 $R_{fn0} = R_{bn0} = 0$ 의 해 밖에 존재하지 않는다. 축이 가는 경우는 진폭 R_{fn0} , R_{bn0} 가 영 아닌 해가 존재하지만, 그 해에 대해서는 내부공진을 고려할 필요가 있다는 것이 확실하게 된다.

4. 내부공진현상 [$2p_{fn}$]- $[-2p_{bn}]$

축이 가늘어지면 자이로스코프 작용이 작아지기 때문에 같은 모달의 전향과 후향의 고유진동수의 크기가 거의 일치하여 1:1의 내부공진의 관계가 있는 계가 된다. 여기서 는 축 길이에 비해서 직경이 작은 경우를 고려하여 주공진의 2배 부근의 내부공진현상을 조사한다. 그 경우, p_{fn} ; $-p_{bn}$ 이 되며, 3장에서 조사한 전향 1/2차 분수조화진동 [$2p_{fn}$], 후향 1/2차 분수조화진동 [$-2p_{bn}$], 합차 조화진동 [$p_{fn} - p_{bn}$]의 공진점은 일치한다. 이 공진점 부근에서 전향과 후향의 1/2차 분수조화진동이 동시에 발생한다고 가정하고 $O(\epsilon^0)$ 의 정밀도로 해를 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned}
 u_n & = A \cos(1/2)\omega t + B \sin(1/2)\omega t \\
 & + P_n \cos(\omega t + \beta_n) + Q_x \\
 v_n & = C \cos(1/2)\omega t + D \sin(1/2)\omega t \\
 & + P_n \sin(\omega t + \beta_n) + Q_y \quad (22)
 \end{aligned}$$

식 (22)를 식 (7)에 대입하고 진동수 $(1/2)\omega$ 와 정수항의 계수비교를 하면 다음의 식 (23) 및 식 (10)을 얻는다.

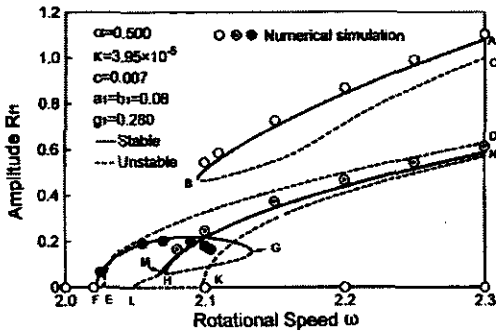
$$\begin{aligned}
 \omega \dot{A} & = -E_n B - c_n A - x_n C + 2\alpha_n (AB + CD) A \\
 & + \alpha_n (A^2 + 3B^2 + C^2 + 3D^2 + 8P_{n0}^2 + 4Q_y^2) B \\
 & + 4\alpha_n \{ (A - D) \cos \beta_{n0} \omega \\
 & - (C + B) \sin \beta_{n0} \} P_{n0} Q_y \\
 \omega \dot{B} & = E_n A - c_n B - x_n D + 2\alpha_n (AB + CD) B \\
 & - \alpha_n (3A^2 + B^2 + 3C^2 + D^2 + 8P_{n0}^2 + 4Q_y^2) A \\
 & - 4\alpha_n \{ (C + B) \cos \beta_{n0} \\
 & + (A - D) \sin \beta_{n0} \} P_{n0} Q_y \\
 \omega \dot{C} & = -E_n D - c_n C + x_n A + 2\alpha_n (AB + CD) C \\
 & + \alpha_n (A^2 + 3B^2 + C^2 + 3D^2 + 8P_{n0}^2 + 12Q_y^2) D \\
 & + 4\alpha_n \{ (3C - B) \cos \beta_{n0} \\
 & - (A + 3D) \sin \beta_{n0} \} P_{n0} Q_y \\
 \omega \dot{D} & = E_n C - c_n D + x_n B - 2\alpha_n (AB + CD) D \\
 & - \alpha_n (3A^2 + B^2 + 3C^2 + D^2 + 8P_{n0}^2 + 12Q_y^2) C \\
 & - 4\alpha_n \{ (A + 3D) \cos \beta_{n0} \\
 & + (3C - B) \sin \beta_{n0} \} P_{n0} Q_y \quad (23)
 \end{aligned}$$

여기서

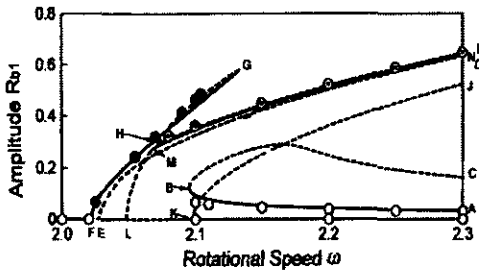
$$\begin{aligned}
 E_n & = (1/4)(1 + x_{\frac{2}{3}}^2)\omega^2 - \frac{4}{3}c_n, \quad c_n = (1/2)c\omega, \\
 x_n & = x_{\frac{2}{3}}\omega^2, \quad \alpha_n = (1/8)\alpha_{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

이다. 조화진동성분 P_{n0} 와 β_{n0} 로는 대응하는 무감쇄선형계의 값을 이용하고 있다.

식 (23)에서 얻어진 공진곡선을 Fig. 3 중의 파라메타의 값으로는 실험장치에 가까운 값, $d = 4\text{mm}$, $l = 500\text{mm}$, $E = 206\text{GPa}$, $\rho = 7.2 \times 103\text{kg/m}^3$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $e_0 = 1\text{mm}$ 일 때의 식 (1)에서 주어진 무차원량의 값을 이용했다. Fig. 3(a)는 전향 1/2차 분수조화진동성분, (b)는 후향 1/2차 분수조화진동성분의 공진곡선을 나타낸다. 실선은 안정해, 파선은 불안정해를 표시한다. 또, 근사해의 정밀도를



(a) Resonance curves of forward whirling motion



(b) Resonance curves of backward whirling motion

Fig. 3 Resonance curves of the case with internal resonance

확인하기 위해 식 (7)을 Fortran에서 Runge-Kutta-Varner 법을 이용한 수치적분으로 시뮬레이션을 했다. 그 결과를 ○, ⊙, ●로 표시한다. 또한 수치적분에서 허용상대오차를 1스텝당 10^{-12} 으로 하고 축 1회전에 대해 128스텝 계산했다. 모두 정확하게 (1/2) ω 를 갖는 진동만이 발생했다. 이 경우, 4종류의 진동상태가 내부공진에 의해 발생된다. 이들의 안정해가 공존하는 회전속도에서 실제로 어떤 상태가 발생할까는 초기값에 의존한다.

먼저, 분지 ABC는 진폭 R_{f1} 이 크고 R_{b1} 은 작은 경우로 내부공진이 없는 계에서 전향 1/2차 분수조화진동만이 발생하는 경우에 대응한다. 단, 저속측에서는 내부공진 때문에 분지가 소멸하고 있다. 다음으로 분지 LMN과 KJ는 R_{f1} 과 R_{b1} 가 같은 정도의 크기로 발생하고 있는 경우로 내부공진이 없는 계의 합차조화진동에 대응한다.

이상은 내부공진이 없는 경우에 대응하는 해가 존재하는 상태이지만 내부공진의 결과, 다음과 같은 새로운 해가 나타난다. 분지 FGH는 전향 성분의 진폭 R_{f1} 이 작고 후향 성분의 진폭 R_{b1} 이 비교적 큰 경우이며 내부공진이 없

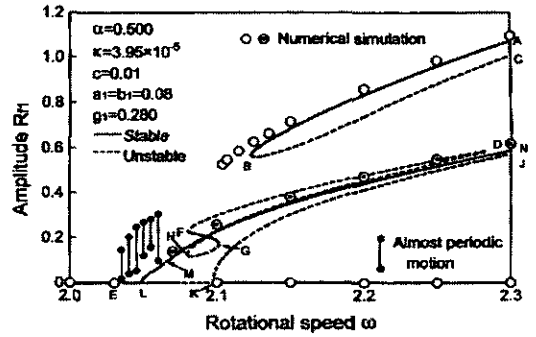


Fig. 4 Resonance curves of the case with internal resonance (Influence of damping c)

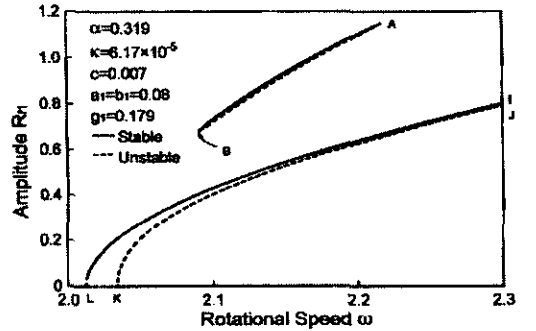


Fig. 5 Resonance curves of the case with internal resonance (Influence of diameter d)

는 계에서는 발생하지 않았던 후향 1/2차 분수조화진동이 발생 되어졌다고 볼 수 있다. 이것은 감쇄가 작아지면 분지가 고속측으로 늘어나 한층 확실해진다. 또 분지 DE, IH는 합차조화진동의 진폭과 크기는 같은 정도이지만, 모두 불안정으로 내부공진이 없는 경우에는 존재하지 않았던 것이다.

Fig. 3의 파라메타 중, 감쇄 c 를 크게 한 경우의 전향선 회운동의 공진곡선을 Fig. 4에서 볼 수 있다. Fig. 3와 비교하면 B점이 고속측으로 후퇴하고 분지 FGH의 회전속도 범위가 축소한다. 더욱이 분지 LM 및 EL의 불안정해의 회전속도 범위에서 안정한 정상해가 없어지며 개주기 운동(기호 와 선으로 표시함)이 발생한다.

Fig. 3에서 직경 d 을 크게 한 경우를 Fig. 5에 보인다. 먼저, Fig. 3에서 안정한 분지 FG와 그것과 관련한 불안정한 분지가 없어진다. 또 분지 ABC는 축소한다. 더욱이 분기점 L과 K가 저속측으로 이동함과 동시에 L과 K 사이

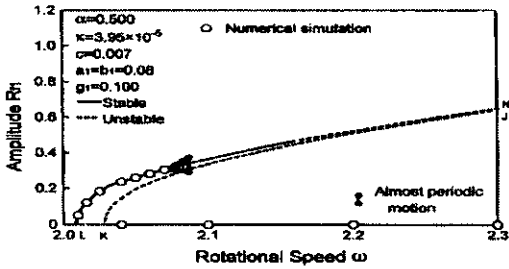


Fig. 6 Resonance curves of the case with internal resonance (Influence of lateral force)

Table 1 Summary of the theoretical analysis and numerical simulation

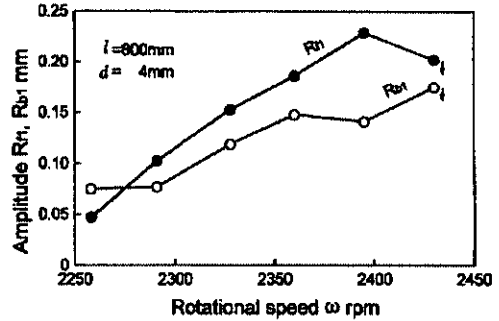
	Kind	Theoretical analysis	Numerical simulation
No internal resonance	$+(1/2)\omega^*$	×	×
	$-(1/2)\omega$	×	×
	$p_{fn} - p_{bn}^*$	×	×
Internal resonance	$+(1/2)\omega$	○	○
	$-(1/2)\omega$	○	○

Symbol ○ means that the oscillation occurs. Symbol × means that the oscillation does not occur. These oscillations occur theoretically only when the shaft is slender, however, the effect of internal resonance must be considered in this case.

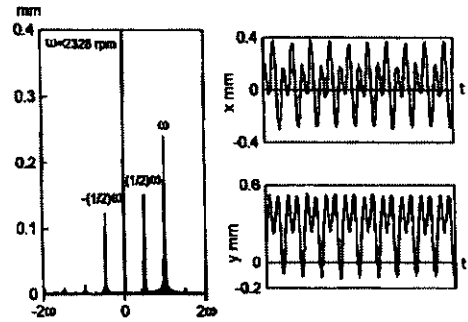
의 폭이 좁아진다. 그리고 축을 더 짧게 하면 모든 공진현상이 사라진다.

다음으로 축에 직각방향 힘의 크기가 변화하는 경우의 영향을 조사하여 Fig. 6에 보인다. 그 힘이 작아지면 진동이 발생하기 어려워져서 Fig. 3에서의 FGH, ABC의 순서로 분지가 소멸함과 동시에 분지 LM이 안정해로 변화하며, 또 분지점 L과 K가 저속축으로 이동하여 진폭이 영인 불안정해의 범위가 좁아진다. 그 결과, 분지 EL은 소멸한다. 더욱이 남아있는 분지 LN과 KJ 중, 안정이던 분지 LN의 고속축이 불안정으로 변화하여 개주기운동이 발생한다. 직각방향의 힘이 어떤 값보다 작아지면 이들 분지도 모두 소멸하여 1/2차 분수조화진동은 전부 발생하지 않는다.

5. 이론해석과 수치 시뮬레이션 결과



(a) Resonance curves



(b) Spectrum

(c) Time histories

Fig. 7 Experimental results

주위임속도의 약2배의 회전속도 부근에서 발생할 가능성이 있는 분수조화진동과 합차조화진동의 이론해석과 수치 시뮬레이션의 결과를 Table 1에 보인다. 그 결과, 내부공진의 영향을 받은 전향과 후향의 분수조화진동만이 발생하는 것이 명확하게 되었다.

6. 실험

실험장치로는 연직회전축⁽¹⁾을 사용했지만 장치전체의 조립시의 오차 때문에 축단에 모멘트가 작용하여 초기의 휨이 일어난다. 축의 길이 $l=800\text{mm}$, 직경 $d=4\text{mm}$ 의 일정한 원형단면의 탄성축의 양단을 복열자동조심 볼베어링(#1200)으로 단순지지했다. 베어링은 축중심선 방향으로 이동 가능한 베어링 박스에 넣어 그 위치를 변화시킬 수 있도록 조립오차에 의해 발생할 수 있는 초기장력이 발생하지 않도록 조절했다. 실험 중에는 베어링을 고정했다. 축이 진동하면 축 중심선이 늘어나 기하학적 비선형성이 나타난다.

실험 결과, 전향과 후향의 1/2차 분수조화진동이 동시에 발생했다. 그 공진곡선 및 진동파형을 Fig. 7에 보인다. Fig. 7(a)는 전향과 후향의 1/2차 분수조화진동의 진폭변화를 나타낸다. 점경형의 공진곡선인 것을 알 수 있다. Fig. 7(b), (c)는 실험에서 얻은 주파수 성분과 진동파형이다. 조화진동 성분과 함께 전향 1/2차 분수조화진동, 후향 1/2차 분수조화진동이 발생하고 있는 것을 알 수 있다.

7. 결 론

기하학적 비선형 스프링 특성을 갖는 연속회전축의 1/2차 분수조화진동의 공진점 부근의 진동에 대해서 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 베어링의 축 중심선 방향의 이동을 구속하면 기하학적 비선형성이 나타난다.
- (2) 축에 직각한 방향의 힘을 받는 축에서는 비대칭 비선형성 스프링 특성이 나타난다.
- (3) 축이 가늘 때는 전향과 후향의 고유진동수가 일치하여 내부공진의 영향이 나타난다. 이 때,
 - (a) 전향과 후향의 1/2차 분수조화진동이 동시에 발생한다.
 - (b) 진동은 진폭의 크기에 따라 4종류로 나눌 수 있다.
 - (c) 합차조화진동 $[p_{fn} - p_{bn}]$ 은 1/2차 분수조화진동에 흡수된다.
 - (d) 개주기 운동이 발생한다.
- (4) 축이 굵어 공진점이 겹침이 없는 경우에는 상기의 진동은 발생하지 않는다.
- (5) 실험에서는 주위협속도의 2배 부근에서 전향과 후향의 1/2차 분수조화진동이 동시에 발생했다.

후 기

이 논문은 서울산업대학교 교내 학술연구비에 의하여 연구되었음

참 고 문 헌

- (1) Bolotin, V.V., The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, San Francisco, CA., 1964.
- (2) Shaw.J. and Show. S.W., "Instabilities and Bifurcation in a Rotating Shaft," Journal of Sound and Vibration., Vol. 132, pp. 227~244, 1989.
- (3) Shaw.J. and Show. S.W., "Non-Linear Resonance of an Unbalance Rotating Shaft with Internal Damping," Journal of Sound and Vibration, Vol. 147, pp. 435~451, 1991.
- (4) Shaw, S.W., "Chaotic Dynamics of a Slender Beam Rotating about Its Longitudinal Axis," Journal of Sound and Vibration, Vol. 124, pp. 329~343, 1988.
- (5) Ishida, Y., Nagasaka, I., Inoue, T. and Lee, S. W., "Forced Oscillations of a Vertical Continuous Rotor with Geometric Nonlinearity," Nonlinear Dynamics, Vol. 11, pp. 107~120, 1996.