

집중 질량-스프링 모델을 이용한 볼트 결합부 모델링

고강호[†] · 이장무*

(2000년 8월 28일 접수, 2001년 1월 18일 심사완료)

Dynamic Modeling of Bolt Joints Using Lumped Mass-Spring Model

Kang-Ho Ko and Jang-Moo Lee

Key Words : Component Mode Synthesis(모드 합성법), Dynamic Reduction(동적 축약), Bolt Joints(볼트 결합부), Substructure(부분 구조), Constrained Mode(구속 모드)

Abstract

In this paper, a new technique which models the joints characteristics through reduction of DOFs of structures with joints using component mode synthesis (CMS) method is proposed. Bolt joints are modeled by mass-spring systems. Also generalized mass and stiffness matrices for this models are introduced. Because bolt joints have influence on eigenvalues of structures, exact eigenvalues from modal test are used. The results show that the behaviors of structures with bolt joints depend to a large extent on the translational DOFs and not on rotational DOFs of mass and stiffness matrices of bolts. Furthermore it is confirmed that lumped mass-spring systems as models of bolt joints are effective models considering the facts that joint characteristics converged to constant values in some iterations and eigenvalues from proposed method are in good agreement with ones from modal test.

1. 서론

정밀을 요하거나 고속으로 운동하는 구조물을 설계함에 있어서 그 전체 특성을 예측하는 것은 매우 중요하다. 또한 이러한 복합 구조물의 정적/동적 특성을 정확히 해석하고 제어하여 원하는 기능이 발휘될 수 있도록 하는 것도 매우 중요하다. 대개 이러한 복합 구조물은 여러 개의 구조물이 결합부에 의하여 연결되기 때문에, 결합부의 감쇠(damping)나 강성(local stiffness)과 같은 결합부 특성은 결합부를 포함하고 있는 전체 구조물의 거동에 중요한 영향을 미치게 된다.

결합부 특성에 관한 연구는 대체적으로 1960년대부터 수행되어 왔으나, 이 시기의 연구는 간단하고 기초적인 분야에 국한되었다.⁽¹⁾ 그러나, 1970년대에 들어서면서 정밀 가공에 있어서 공작 기계(machine tool)의 중요성이 부각되면서 공작 기계의

결합부에 대한 기초적인 연구가 활발히 진행되었다.^(2,3) 그리고 1980년대 이후의 연구에서는 여러 가지 결합부에 대하여 해석적 방법과 실험적 방법 그리고 이 두 가지 방법을 병행한 해석 방법 등 여러 가지 결합부에 대한 다양한 해석 방법이 제시되고 있다. Villaggio⁽⁴⁾는 결합면을 코사인(cosine) 곡면으로 가정하여 외력이 작용할 때 접촉면의 변형은 전체 계의 변형 에너지와 접촉 에너지가 최소가 되도록 접촉면의 변형량이 결정된다는 가정 하에서 접촉 결합부를 이론적으로 해석하였다. 그리고 이재운, 고강호⁽⁵⁻⁷⁾ 등은 볼트 결합부와 접촉 결합부 등을 유연성 영향계수를 이용하여 등가의 요소를 구하여 전체 구조물의 동적 거동을 해석 모델만으로 해석하였다.

한편 실험과 관련된 결합부 파라미터의 동정(identification)에 있어서 실험의 편이성으로 인하여 주파수 응답 함수를 사용하는 경향이 커지고 있다. Zhao 와 Touratier 와 Coffinal⁽⁸⁾은 최소 자승법(least square method)을 이용하여 실험에서 측정된 주파수 응답 함수와 수학적 모델에서 구한 주파수 응답 함수를 서로 일치시킴으로써 결합부 특성 파라미터를 동정하였다. 또한 Kim 과 Wu 와 Eman⁽⁹⁾은 유한 요소 모델과 실험적 모드 해석 기법을 적용

[†] 책임저자, 국민대학교 자동차공학 전문대학원

E-mail : kokangho@kookmin.ac.kr

TEL : (02)910-4686 FAX : (02)910-4718

* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

하여 결합부의 강성과 감쇠 특성을 구하는 방법을 제시하였다

본 연구에서는 볼트 결합부에 대한 수학적 모델을 제시하였으며, 모드 합성법(component mode synthesis, CMS) 이론을 이용하여 볼트 결합부 모델에 대한 일반화된 질량과 강성 행렬을 유도하였다. 또한 CMS 방법을 이용하여 부분구조에 대한 유한 요소 모델의 자유도를 축약함으로써, 대폭적으로 감소된 자유도를 갖는 결합부 구조물에 대하여 고유치 해석을 수행하였으며, 실험 모델의 고유치와 비교함으로써 결합부 특성을 동정하였다.

2. 모드 합성법 이론

부분 구조 합성법은 각 부분 구조의 진동 특성을 표현하는 방법에 따라서 크게 전달 함수 합성법(transfer function synthesis)과 모드 합성법⁽¹⁰⁾으로 분류된다. 전달 함수 합성법은 부분 구조의 진동 특성이 결합 영역의 전달 함수로 표현되고, 또한 전체 계의 운동 방정식이 전달 함수로 주어진다. 반면에 모드 합성법은 진동 특성이 부분 구조의 고유 모드로 표현되고, 부분 구조의 고유 모드를 관심 있는 주파수 범위에서 특정 개수만큼 사용함으로써 전체 계의 자유도가 현저하게 줄어드는 이점이 있다.

이러한 모드 합성법은 고유 모드의 추출 방법에 따라 구속 모드(constrained mode)법과 불구속 모드(unconstrained mode)법 및 이들을 혼합한 방법으로 분류할 수 있다. 구속 모드법은 각 부분 구조물의 결합 영역을 고정하여 구한 구속 모드를 이용하므로 해석적인 방법에 유리한 반면에, 불구속 모드법은 각 부분 구조물의 결합 영역이 자유로운 상태에서 구한 모드를 이용하므로 실험적 방법에 유리한 특징이 있다.

2.1 좌표계 변환

감쇠를 무시할 경우 하나의 부분구조에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{u} + Ku = f \tag{1}$$

- M : mass matrix of a substructure
- K : stiffness matrix of a substructure
- u : displacement vector of a substructure
- f : vector of external forces

Fig. 1 에서 정의된 경계 자유도 c 와 내부 자유도 o 를 사용하여 식 (1)로부터 정적 평형식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oc} \\ K_{co} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_c \end{Bmatrix} \tag{2}$$

- u_o : displacement vector of omitted DOFs
- u_c : displacement vector of retained DOFs
- f_c : vector of internal forces

식 (2)의 상단 식으로부터 다음과 같이 경계 자유도와 내부 자유도 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$u_o = -K_{oo}^{-1}K_{oc}u_c \equiv T_{oc}u_c \tag{3}$$

여기서 정의된 행렬 T_{oc} 는 내부 자유도와 경계 자유도 사이의 변환 행렬로써, 경계 자유도의 변위에 의하여 발생하는 내부 자유도의 탄성 변형량의 관계를 나타내는 행렬이다.

식 (1)의 운동방정식을 경계 자유도와 내부 자유도를 사용하여 고유치 문제 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oc} \\ K_{co} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_c \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oc} \\ M_{co} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

경계 자유도가 고정되었을 때 다음과 같이 내부 자유도만으로 고유치 문제를 나타낼 수 있다.

$$(K_{oo} - \omega^2 M_{oo})u_o = 0 \tag{5}$$

이 식으로부터 구한 모드 행렬 Φ_{oo} 는 경계 자유도를 고정시켰을 때의 경계 구속 모드(fixed boundary mode)가 된다. 이 때 내부 자유도 o 의 변위는 전개이론(expansion theorem)에 의하여 다음과 같이 경계 구속 모드의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.

$$u_o = \Phi_{oo}u_g \equiv T_{og}u_g \tag{6}$$

- u_g : displacement vector of normal coordinates

여기서 행렬 T_{og} 는 일반 좌표계의 모드 자유도와

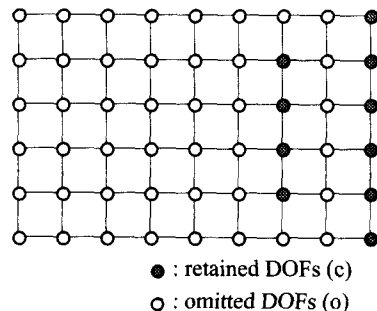


Fig. 1 Definition of DOFs in a substructure

내부 자유도의 변환 행렬이 된다.

그러므로 부분 구조에서 내부 자유도의 전체 변위는 경계 자유도가 고정되었을 때의 변형량과 경계 자유도의 변위에 의하여 발생된 탄성 변형량의 합으로 표시할 수 있다.

$$u_o = \begin{bmatrix} T_{og} & T_{oc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이 관계를 이용하여 부분 구조의 전체 변위를 경계 자유도와 모드 자유도로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_o \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{og} & T_{oc} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} \equiv T \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기에서 행렬 T 는 물리 좌표계(physical coord.)와 일반화된 좌표계(generalized coord.) 사이의 변환 행렬이 된다.

2.2 하부구조의 자유도 축약

식 (8)을 사용하여 식 (4)를 일반화된 좌표계로 변환하여 나타내면 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oc} \\ K_{co} & K_{cc} \end{bmatrix} T \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oc} \\ M_{co} & M_{cc} \end{bmatrix} T \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에 변환 행렬의 전치 행렬 T^T 를 곱하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$K_G \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} - \omega^2 M_G \begin{Bmatrix} u_g \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$K_G = \begin{bmatrix} T_{og}^T & \mathbf{0} \\ T_{oc}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oc} \\ K_{co} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{og} & T_{oc} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$M_G = \begin{bmatrix} T_{og}^T & \mathbf{0} \\ T_{oc}^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oc} \\ M_{co} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{og} & T_{oc} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기에서 행렬 K_G 와 M_G 는 각각 일반화된 강성과 질량 행렬이다. 이 행렬은 경계 자유도와 경계 구속 모드(fixed boundary mode)의 자유도로 표현되므로 물리 좌표계로부터 축약된 일반화된 좌표계의 크기는 경계 자유도 크기와 고려하고자 하는 모드의 수의 합으로 결정된다.

식 (11)의 K_G 를 식 (3)을 이용하여 정리하면

$$K_G = \begin{bmatrix} K_\phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_S \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$K_\phi = T_{og}^T K_{oo} T_{og} \\ K_S = T_{oc}^T K_{oc} + K_{cc}$$

와 같이 간단히 표현된다. 마찬가지로 M_G 를 전개하여 정리하면 다음과 같다.

$$M_G = \begin{bmatrix} M_\phi & M_{\phi S} \\ M_{\phi S}^T & M_S \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$M_\phi = T_{og}^T M_{oo} T_{og}$$

$$M_{\phi S} = T_{og}^T (M_{oo} T_{oc} + M_{oc})$$

$$M_S = (T_{oc}^T M_{oo} + M_{co}) T_{oc} + T_{oc}^T M_{oc} + M_{cc}$$

특히 식 (13)과 식 (14)에서 모드 좌표계에 대한 강성 행렬과 질량 행렬은 모드 벡터의 직교성(orthogonality)을 이용하면

$$K_\phi = \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & \omega_r^2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \ddots & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix} \quad (16)$$

이 되어 각각 고유치로 구성된 대각행렬과 단위행렬로 표현된다. 또한 물리 좌표계에 대한 강성 행렬 K_S 와 질량 행렬 M_S 는 부분 구조의 내부 자유도를 경계 자유도로 정축약(static reduction)⁽¹¹⁾을 했을 때의 강성·질량 행렬과 같음을 알 수 있다.

3. 볼트 결합부 모델링

구조물의 결합부는 대개 볼트 결합, 용접 결합, 리벳 결합, 그리고 접착 결합 등으로 이루어져 있다. 본 논문에서는 구조물의 결합부 가운데 가장 대표적인 형태인 볼트 결합부에 대한 수학적 모델을 제시하였는데, 볼트 결합부의 볼트 부분을 Fig. 2와 같이 집중 질량, 스프링 그리고 댐핑으로 모델링 하였다. 여기에서 스프링과 댐핑은 각각 병진 자유도 3개와 회전 자유도 3개씩을 가지는 일반적인 3차원 요소이다. 댐핑항을 생략하여 운동방정식을 나타내면 다음 식과 같다.

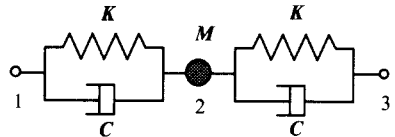


Fig. 2 The mathematical model of bolt joints

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & 2K & -K \\ 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$x^T = \{u_x \quad u_y \quad u_z \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z\} \quad (18)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_x & & & & & \\ & m_y & & & & \\ & & m_z & & & \\ & & & m_u & & \\ & 0 & & & m_v & \\ & & & & & m_w \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_x & & & & & \\ & k_y & & & & \\ & & k_z & & & \\ & & & k_u & & \\ & 0 & & & k_v & \\ & & & & & k_w \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서 u 는 병진 자유도를 나타내고 θ 는 회전 자유도를 나타낸다. 절점 1과 3은 경계 자유도, 2는 내부 자유도로 정의할 때 내부 자유도에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{x}_2 + 2Kx_2 = 0 \quad (21)$$

이 운동 방정식은 질량 행렬과 강성 행렬이 비연성 되어 있으므로 식 (6)에서 정의된 변환행렬 T_{og} 은 다음과 같다.

$$T_{og} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

또 내부 자유도와 경계 자유도 사이의 변환행렬 T_{oc} 은 다음과 같다.

$$T_{oc} = \frac{1}{2} [I \quad I] \quad (23)$$

식 (22)와 식 (23)을 이용하여 일반화된 강성 행렬을 구하면

$$K_\phi = 2K \quad (24)$$

$$K_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \quad (25)$$

이 됨을 알 수 있다. 또 일반화된 질량 행렬은

$$M_\phi = M \quad (26)$$

$$M_s = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} M & M \\ M & M \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$M_{os} = \frac{1}{2} [M \quad M] \quad (28)$$

$$M_{s\phi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M \\ M \end{bmatrix} \quad (29)$$

와 같이 구할 수 있다. 그러므로 Fig. 2에 나타나 있는 볼트 결합부 모델에 대한 일반화된 질량 행렬과 일반화된 강성 행렬을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$M_G = \begin{bmatrix} M & \frac{1}{2} [M \quad M] \\ \frac{1}{2} [M] & \frac{1}{4} \begin{bmatrix} M & M \\ M & M \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$K_G = \begin{bmatrix} 2K & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (31)$$

4. 결합부 특성 동정

결합부가 있는 구조물을 Fig. 3과 같이 단순화하여 나타낼 수 있다. 이 모델에 대하여 식 (13), 식 (14), 식 (30), 식 (31)에 나타나 있는 일반화된 질량과 강성 행렬을 이용하여 운동 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{G1} & & & & & \\ & M_{GJ} & & & & \\ & & M_{G2} & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{\theta 1} \\ \ddot{u}_{c1} \\ \ddot{u}_{\theta J} \\ \ddot{u}_{c2} \\ \ddot{u}_{\theta 2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{G1} & & & & & \\ & K_{GJ} & & & & \\ & & K_{G2} & & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\theta 1} \\ u_{c1} \\ u_{\theta J} \\ u_{c2} \\ u_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

여기서 u_{R1}, u_{R2} 는 각각 부분 구조 1 과 2 의 모드 자유도이고 u_{Rj} 는 결합부의 모드 자유도이다. 그리고 u_{c1} 은 부분 구조 1 과 결합부 사이의 경계 자유도이며 u_{c2} 는 부분 구조 2 와 결합부 사이의 경계 자유도이다. 식 (32)의 질량 행렬과 강성 행렬은 결합부의 집중 질량과 스프링 상수에 대하여 행렬을 다음과 같이 분리하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{G1} & & 0 \\ & M_{Gj} & \\ 0 & & M_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{G1} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & M_{G2} \end{bmatrix} + m_x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_x & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + m_w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_w & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} K_{G1} & & 0 \\ & K_{Gj} & \\ 0 & & K_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{G1} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & K_{G2} \end{bmatrix} + k_x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_x & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + k_w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_w & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

따라서 식 (32)는 분리된 행렬을 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다

$$(M_{G_{1,2}} + m_x M_x + \dots + m_w M_w) \ddot{u} + (K_{G_{1,2}} + k_x K_x + \dots + k_w K_w) u = 0 \quad (35)$$

여기서 결합부의 특성인 m_x, m_y, \dots, k_w 는 미지수이므로 초기치를 가정하여 고유치 해석을 수행하면 다음 식을 만족하는 고유치와 고유 벡터를 얻을 수 있다.

$$-\omega_i^2 \Phi_i^T (M_{G_{1,2}} + m_x M_x + \dots + m_w M_w) \Phi_i + \Phi_i^T (K_{G_{1,2}} + k_x K_x + \dots + k_w K_w) \Phi_i = 0 \quad i=1,2,\dots,m \quad (36)$$

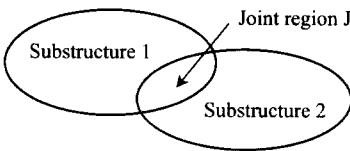


Fig. 3 Substructures with a joint region

그러나 여기에서 구한 고유치 ω_i^2 는 실험적으로 구한 고유치와 일치하지 않게 되는데, 이때 실험적으로 구한 고유치 λ_i^2 와 식 (36)에서 구한 고유 벡터 Φ_i 를 이용하여 다음 식을 만족하는 m 개의 연립 방정식을 구할 수 있다.

$$-m_x \lambda_i^2 \Phi_i^T M_x \Phi_i + \dots + k_w \Phi_i^T K_w \Phi_i = \lambda_i^2 \Phi_i^T M_{G_{1,2}} \Phi_i - \Phi_i^T K_{G_{1,2}} \Phi_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (37)$$

이 연립 방정식을 통하여 새로 구한 m_x, m_y, \dots, k_w 는 초기치에 비하여 개선된 결합부 특성을 가지게 되며, 식 (35)에 대입하여 새로운 운동 방정식을 구성한 후 고유치 해석을 수행함으로써 개선된 고유치 ω_i^2 와 고유 벡터 Φ_i 를 구할 수 있다. 새로 구한 고유치 ω_i^2 와 λ_i^2 가 일치하지 않을 경우, 이 과정을 반복하여 고유치가 일치되게 하는 m_x, m_y, \dots, k_w 를 얻을 수 있는데, 이때의 값이 구하고자 하는 결합부의 특성이 된다.

5. 모델링 기법 검증

앞에서 제시된 방법을 적용하여 Fig. 4 에 나타나 있는 구조물의 볼트 결합부 특성을 동정하였다. 구조물은 크기가 다른 2 개의 평판이 4 개의 볼트에 의하여 결합되어 있는데, 2 개의 평판중 300 mm × 200 mm 의 크기를 갖는 평판을 부분구조 1 로 지정하였고, 200 mm × 200 mm 의 크기를 갖는 평판을 부분구조 2 로 지정하였다.

각 부분구조의 유한요소 모델에서 사용된 요소는 각 노드의 자유도가 u_z, θ_x, θ_y 인 평판 요소 (plate element)가 사용되었다. 그러므로 각 부분구조에서 경계 자유도는 볼트 결합부가 위치하고 있는 4 점에 대한 12 자유도로 선정하였다. 그리고 각 부분구조의 경계 구속 모드는 경계 자유도를 구속하고 구한 저차 9 개의 모드를 각각 사용하였다. 이때 식 (13)과 식 (14)에 나타나 있는 부분구조 1 과 부분구조 2 의 일반화된 질량 행렬과 강성 행렬은 21×21 행렬이 된다.

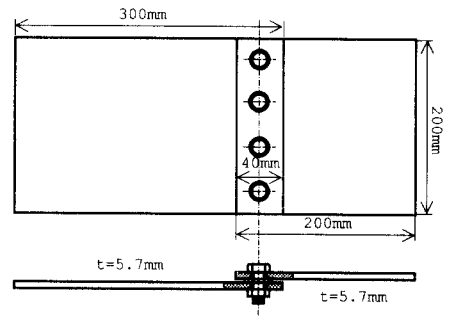


Fig. 4 Configuration of structure with bolt joints

Table 1 Comparison of measured and calculated natural frequencies (Hz)

Mode	Measured	Calculated
1	132.0	132.6
2	210.8	210.9
3	374.2	373.9
4	421.9	421.6
5	707.4	706.3
6	748.5	740.0

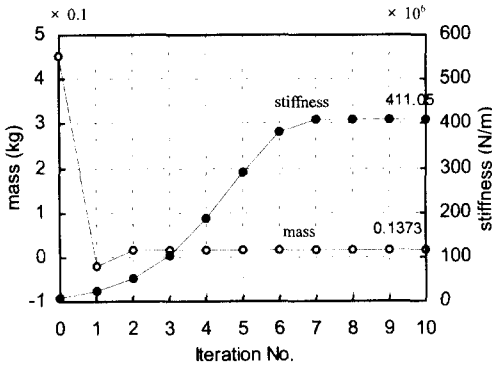


Fig. 5 The change of mass and stiffness values

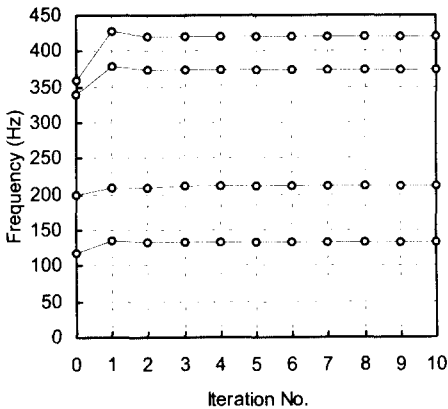


Fig. 6 The change of natural frequencies

볼트 결합부는 u_z, θ_x, θ_y 와 관련된 강성 k_z, k_u, k_v 와 질량 m_z 를 고려하였으며, 회전자유도와 관련된 질량 관성 모멘트 m_u, m_v 는 무시하였다. 그러므로 볼트 결합부의 일반화된 강성은 미지수 3 개를 포함하고 있으며, 일반화된 질량 행렬은 미지수 1 개를 포함하게 된다. 따라서 결합부의 강성 행렬과 질량 행렬은 각각 6 개의 경계 자유도와 1 개의 모드 자유도를 포함한 7×7 행렬이 된다.

각 부분구조의 질량 행렬과 강성 행렬을 사용하여 식 (32)에 나타나 있는 전체계에 대한 질량 행렬과 강성 행렬을 구성하였다. 전체적으로 사용된

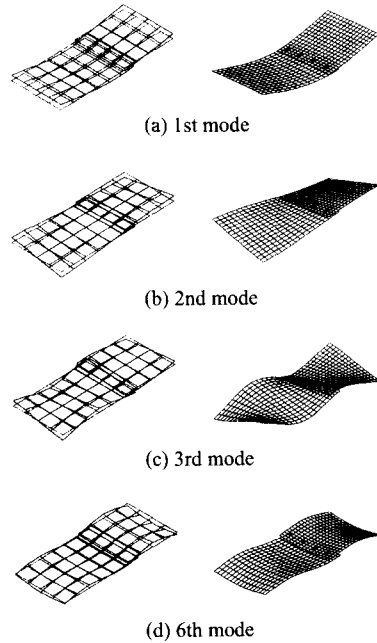


Fig. 7 Comparison of measured (LHS) and calculated (RHS) mode shapes

경계 자유도는 24 개이고 모드 자유도는 22 개(부분구조 1 의 9 개, 부분구조 2 의 9 개, 결합부 4 개) 이므로 강성 행렬과 질량 행렬은 46×46 의 크기를 갖는 행렬이 된다. 이 행렬중 질량 행렬은 미지수 m_z 가 포함된 46×46 행렬과 미지수가 포함되지 않은 46×46 행렬로 분리될 수 있는데, 미지수 m_z 가 포함된 46×46 행렬은 7×7 의 크기를 갖는 결합부 질량 행렬을 자유도에 맞게 재배치한 행렬이다. 마찬가지로 강성행렬은 미지수 k_z, k_u, k_v 가 각각 포함된 3 개의 46×46 행렬과 미지수가 포함되지 않은 1 개의 46×46 행렬로 분리하였다. 분리된 행렬을 이용하여 식 (35)에 나타나 있는 운동방정식을 구성하였다. 구하고자 하는 결합부 특성은 미지수 m_z, k_z, k_u, k_v 의 4 개이므로 4 개의 고유 진동수를 실험적으로 측정하였으며, 그 값은 Table 1 에 나타나 있다.

미지수 m_z, k_z, k_u, k_v 의 초기치는 하부구조 1 을 경계 자유도로 축약한 질량 및 강성 행렬의 1 행 1 열의 값인 $0.45366 \text{ kg}, 8.0284 \times 10^6 \text{ N/m}$ 을 임의적으로 사용하였다. 저차 4 개의 고유치로 4 개의 연립방정식을 구성하여 개선된 m_z, k_z, k_u, k_v 를 구할 때 역행렬에서 k_u, k_v 에 대하여 특이치(singularity)가 발생되는데, 이것은 k_u, k_v 가 유일해(unique solution)를 가지지 않는 것을 의미한다. 실제로 k_u, k_v 의 값이 $1 \times 10^5 \sim 1 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 사이의 모든 값에 대하여 전체 구조물의 고유치에 영향을 주지 않기 때문에 본 연구에서는 $1 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 의 값을

임의적으로 취하였다. 이러한 현상은 각 모드 형상에서 부분구조 1과 부분구조 2의 경계 자유도에서 회전 자유도에 대한 상대 변위가 발생되지 않기 때문에 나타나게 된다. 따라서 저차 4개의 고유치를 사용하여 미지수인 m_z, k_z 를 구하였으며, 미지수의 수보다 방정식의 수가 많으므로 최소 자승법을 사용하였다.

Fig. 5는 반복계산에 따른 볼트 결합부의 질량 m_z 와 강성 k_z 의 값의 변화를 나타내고 있는데, 10회 미만의 반복계산에 의하여 일정한 값에 수렴되는 것을 볼 수 있다. 질량은 초기치에 비해 약 1/30 정도의 작은 값에 수렴하였고, 강성은 초기치에 비해 약 50 배 정도의 큰 값에 수렴하여 변화의 폭이 매우 심함을 알 수 있다.

결합부의 질량과 강성의 값이 반복계산에 의해 변화함에 따라 각 계산 단계에서 전체계의 고유치도 변하게 된다. Fig. 6에 나타나 있는 것과 같이 1, 3, 4 번째 고유 진동수는 4 번의 반복계산에 의하여 일정한 값에 수렴하고 있으며, 2 번째 고유 진동수는 7 번의 반복계산에 의하여 일정한 값에 수렴하고 있다. Fig. 6의 질량과 강성 변화 곡선을 고려하여 보면, 2 번째 고유 진동수는 결합부의 강성의 영향을 많이 받고, 1, 3, 4 번째 고유진동수는 질량의 영향을 많이 받는다는 것을 알 수 있다.

반복 계산에 의하여 일정한 값으로 수렴된 고유진동수의 값은 Table 1에 나타나 있는 것과 같이 실험적으로 구한 고유 진동수와 잘 일치하고 있다. 저차 4개의 고유 진동수뿐만 아니라 고차의 고유진동수도 잘 일치하고 있으며, 6 차 모드의 경우 9 Hz 미만의 차이를 보이고 있다.

한편 구조물의 고유 모드는 반복계산에 의하여 결합부의 질량과 강성값이 변하더라도 그 형상은 거의 변하지 않았으며, Fig. 7에 나타나 있는 것과 같이 실험적으로 구한 모드 형상과 잘 일치하였다.

6. 결론

본 연구에서는 볼트 결합부를 집중질량-스프링 계로 모델링 하였고, 이 모델에 대한 일반화된 질량과 강성 행렬을 유도하였다. 그리고 모드 합성법을 이용하여 결합부를 포함하고 있는 하부 구조물의 자유도를 축약함으로써, 실험에서 측정된 고유치를 사용하여 볼트 결합부의 특성을 동정하는 기법을 제시하였다. 볼트 결합부에 있어서 회전 자유도에 대한 결합부 강성은 전체 구조물의 거동

에 크게 영향을 주지 않는 반면에, 볼트가 체결되는 방향에 대한 결합부 강성 및 질량은 전체 구조물의 진동 특성을 결정하는 중요한 결합부 특성임을 확인하였다. 그리고 적은 횟수의 반복 계산에 의하여 결합부의 특성치가 일정한 값에 수렴하였고, 전체 구조물의 고유치도 실험으로 구한 고유치와 잘 일치한 점으로 미루어 볼 때, 볼트 결합부 모델로 제시한 집중 질량-스프링계 모델이 효과적임을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Deckoninck, C., 1969, "Experimental Investigation of the Normal Dynamic Stiffness of Metal Joints," *Int. J. of Mech. Tool Des. Res.*, Vol. 9, pp. 279-285.
- (2) Thomas, T. R., and Sayles, R. S., 1977, "Stiffness of Machine Tool Joints : a Random-Process Approach," *Journal of Engineering for Industry*.
- (3) Inamura, T., and Sata, T., 1979, "Stiffness and Damping Identification of the Elements of a Machine-Tool Structure," *Annals of the CIRP*, Vol. 28/1.
- (4) Villaggio, P., 1989, "How to Model a Bonded Joint," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 590-594.
- (5) 이재운, 고강호, 이수일, 이장무, 1994, "결합부가 있는 복합 구조물의 동적 해석," 한국소음진동공학회 '94 추계학술대회논문집, pp. 238-243.
- (6) 이재운, 고강호, 이수일, 이장무, 1995, "유연성 영향계수를 이용한 구조물의 결합부해석," 한국정밀공학회 '95 추계학술대회논문집, pp. 831-836.
- (7) Lee, J. W., Ko, K. H., Lee, S. I., Kim, S. G., and Lee, J. M., 1995, "A Dynamic Analysis of Complex Structures with Joints," *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference*, pp. 331-337.
- (8) Zhao, C. H., Touratier, M., and Coffinal, G., 1986, "Identification of Dynamic Characteristics of Joints," *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference*, pp. 316-328.
- (9) Kim, T. R., Ehman, K. F., and Wu, S. M., 1991, "Identification of Joint Structural Parameters between Substructures," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 113, pp. 419-424.
- (10) Hurty, W. C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural System Using Component Modes," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 678-684.
- (11) Guyan, R. J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 380-388.