

# 최소 변형에너지 밀도 기준의 모호성과 최대 극소 변형에너지 밀도 기준

구재민\*

(2001년 1월 31일 접수, 2001년 4월 26일 심사완료)

## Ambiguity of Minimum Strain Energy Density Criterion and Maximum Minimum Strain Energy Density Criterion

Jae Mean Koo

**Key Words :** Minimum Strain Energy Density Criterion(최소 변형에너지 밀도 기준), Crack Propagation Angle (균열진전각), Crack Angle (균열각), Mixed Mode Load (혼합모드하중)

### Abstract

Sih's minimum strain energy density criterion (SED) often used in the mixed mode problem has the ambiguity of the choice of minimum values. In this paper, as the method to solve the problem of SED, maximum minimum strain energy density criterion is proposed that the crack propagates in the direction of having the maximum among the minimum values of modified strain energy density factor(MS), i.e.,  $\text{sign}(\sigma_\theta) \cdot S_{\min}$ .

### 기호설명

- S : 변형에너지 밀도계수, N/m
- MS : 수정변형에너지 밀도계수, N/m
- $K_{I,2}$  : 응력확대계수,  $N/m^{3/2}$
- $\sigma, \tau$  : 응력,  $N/m^2$
- $\beta$  : 균열각, 도
- $\theta_0$  : 균열진전각, 도

### 1. 서론

공업제품이나, 자동차, 항공기 등과 각종 기계 구조물이나 부품들은 대부분이 인장이나 압축하중 외에 비틀림 등에 의한 전단하중이 작용하여 혼합 모드 하중이 작용하는 경우가 많으며, 인장이나 압축하중이 작용하더라도, 결합 자체가 작용하중

에 대하여 경사지거나, 하중이 작용하는 동안에 결합 등에 의해서 균열이 경사지게 성장하여 혼합 모드로 되는 경우가 빈번하다. 따라서 혼합모드 하중이 작용하는 균열문제는 구조물의 안정성 평가나 수명을 예측하는데 실질적이면서도 아주 중요한 문제이기 때문에 국내에서도 이에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있는 형편이다.<sup>(1-3)</sup>

이와 같은 혼합모드문제에 널리 사용되고 있는 파괴기준 중의 하나가 최소 변형에너지 밀도 기준<sup>(4,5)</sup>( Minimum Strain Energy Density Criterion : SED)이다. 그 동안 이 파괴기준에 대한 연구가 많이 이루어져 왔는데, 그 이유 중의 하나가 적용하기 쉬운 장점을 가지고 있기 때문이다. 그러나, 다른 파괴기준 들이 각각 나름대로의 문제점을 가지고 있듯이 이 파괴기준도 몇 가지 문제점을 가지고 있다. 그 중의 하나가 균열진전 방향과 하중을 결정하기 위한 변형에너지 밀도 계수의 극소값 선택의 문제로서 이에 대하여서는 Swedlow<sup>(6)</sup>와 Chang<sup>(7)</sup>에 의하여 보고된 바 있다.

최소 변형에너지 밀도 기준은 변형에너지 밀도

\* 회원, 대림대학 기계과  
E-mail : kjm9000@hanmail.net  
TEL : (031)467-4800 FAX : (031)467-4800

계수값이 최소값을 갖는 방향으로 균열이 진전한다는 파괴기준인데, Swedlow<sup>(6)</sup>는 인장이나 압축하중이 작용하는 경우 극소값이 여러 개 있어 균열 진전방향을 결정할 수 없는 경우가 있다고 하였다. 이를 해결하는 방안으로 변형에너지 밀도 계수의 극소값중, 균열첨단 부근의 미소 요소의 접선 응력,  $\sigma_\theta > 0$ 의 범위에 존재하는, 즉 균열 열림이 되는 방향의 극소값을 선택하여야 한다고 하였다. 그러나, Chang<sup>(7)</sup>은 일축압축하중이 작용하고,  $\beta = 89$ 도인 경우, 변형에너지 밀도 계수의 극소값이 3개 존재하는데, 그 중에 2개가  $\sigma_\theta > 0$ 의 조건과 관련되어 있어서 Swedlow의 가설로는 결정할 수 없다고 하였다.

본 논문에서는 이와 같은 극소값 선택의 문제점을 해결하는 방안으로 Swedlow의 가설에 극소값중 최대값을 갖는 방향으로 균열이 진전한다는 가정을 덧붙여 새로이 최대 극소 변형에너지 밀도 기준을 제안하고자 한다.

### 2. 혼합모드하중하에서의 응력장

Swedlow<sup>(6)</sup>는 무한 경계에  $\sigma$ 의 응력이 작용하는 판재의 중앙에 길이  $2a$ 의 균열이 응력방향에 대하여  $\beta$ 만큼 경사진 균열첨단 부근의 미소요소에 대한 응력장을 Williams<sup>(8)</sup>의 응력해로부터 다음과 같이 정의하였다(Fig.1).

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 1/2(2r)^{-1/2} [k_1(3 - \cos\theta)\cos(\theta/2) \\ &\quad + k_2(3\cos\theta - 1)\sin(\theta/2) + T\cos^2\theta] \\ \sigma_\theta &= 1/2(2r)^{-1/2} [k_1(1 + \cos\theta)\cos(\theta/2) \\ &\quad - k_2(3\sin\theta)\cos(\theta/2) + T\sin^2\theta] \\ \tau_{r\theta} &= 1/2^{-1/2} [\kappa\sin\theta\cos(\theta/2) + k_2(3\cos\theta - 1)\cos(\theta/2) \\ &\quad - T\sin\theta\cos\theta] \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma\sqrt{a}\sin^2\beta \\ k_2 &= \sigma\sqrt{a}\sin\beta\cos\beta \\ T &= \sigma(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \end{aligned} \tag{2}$$

이다. Williams<sup>(8)</sup>에 의하여 극좌표에서의 고유

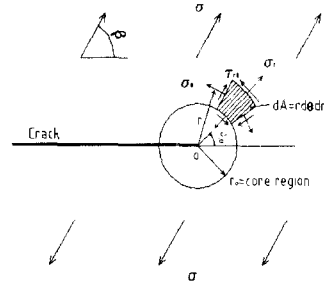


Fig. 1 Stress field

응력함수를 이용하여 구한 응력해에서 비특이항을 무시한 경우가  $T=0$ 이며, Williams와 Ewing<sup>(9)</sup>에 의하여 Williams<sup>(9)</sup>의 해로부터 멱급수를 두번째항까지 전개한 결과가,  $T = \sigma\cos^2\beta$ 이다.

본 논문에서는 최소 변형에너지 밀도 기준의 극소값을 결정하는데, 세 개의 응력장을 모두 사용하여, 최대 극소 변형에너지 밀도 기준을 사례별로 적용하고자 한다.

### 3. 최소 변형에너지 밀도 기준

최소 변형에너지 밀도 기준 (Minimum Strain Energy Density Criterion; SED)은 Sih<sup>(4,5)</sup>에 의하여 제안된 파괴기준으로, 미소 요소  $dA$  (Fig. 1)에 축적된 변형에너지,

$$dW = 1/2(\sigma_r\epsilon_r + \sigma_\theta\epsilon_\theta + \tau_{r\theta}\gamma_{r\theta})dA \tag{3}$$

로부터, 변형에너지 밀도 계수  $S$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$S = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 \tag{4}$$

여기에서 계수  $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 는

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/(16\mu)\{(1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta)\} \\ a_{12} &= 1/(16\mu)\sin\theta\{2\cos\theta - (\kappa - 1)\} \\ a_{22} &= 1/(16\mu)\{(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)\} \end{aligned} \tag{5}$$

이다. 여기에서  $\mu$ 는 탄성계수이고,  $\kappa$ 는 평면응력 상태와 평면변형률 상태일 때, 각각  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ 와  $(3 - 4\nu)$ 이다.

이  $S$ 는 변형에너지와 다음과 같은 관계가 있다.

$$S = r_0(dW/dA) \tag{6}$$

여기에서  $r_0$ 는 임계거리로서 선형 탄성적인 해석이 가능한 영역이며, 재료의 물성치이다. 이 파괴 기준은 다음과 같은 두 개의 가정에 기초하고 있다.

(1) 초기 균열 진전은 변형에너지 밀도 계수  $S$ 가 극소값을 갖는 방향으로 일어난다. 즉,

$$\partial S / \partial \theta = 0, \quad \partial^2 S / \partial \theta^2 > 0, \quad \theta = \theta_0 \tag{7}$$

(2) 초기 균열 진전은 변형 에너지 밀도 계수  $S$ 가 임계치에 도달할 때 발생한다.

$$S_{cr} = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2, \quad \theta = \theta_0 \tag{8}$$

여기에서  $\theta_0$ 는 균열진전각이다. 또한, 임계응력과 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{cr(90^\circ)} / \sigma_{cr(\beta)} &= \sqrt{S_{cr(90^\circ)} / S_{cr(\beta)}} \\ &= \sqrt{S_{\min(\beta)} / S_{\min(90^\circ)}} \end{aligned} \tag{9}$$

이 파괴 기준은 일축인장인 경우에는 실험치와 잘 일치하고 있다. 이 기준은 혼합모드 문제에의 적용에 대한 연구가 많이 이루어졌으며, 특히 혼합 모드 피로 문제에 대한 연구가 다른 기준에 비하여, 많이 이루어졌을 뿐만 아니라, 적용하기 쉽다는 장점이 있다.

#### 4. 변형에너지 밀도 계수의 극소값 선택의 모호성과 최대 극소 변형에너지 밀도 기준

Swedlow<sup>(6)</sup>는  $r=0.002$ ,  $\beta=70$ 도인 경우에 식 (1)과 (2)를 적용하여 변형에너지 밀도를 검토한 결과, 균열 축에서 반시계 방향을 양으로 하였을 때, 인장이나 압축응력의 경우에 관계없이 143도와 -27도에서 극소값이 존재하는데, 143도에서 가장 작은 극소값이 발생한다고 하였다. 극소값을 갖는 방향을 따라 균열이 진전한다는 가설에 따라 가장 작은 극소값 143도를 인장이나 압축 모두 균열진전방향으로 결정하여야 하는데도 불구하고, Sih는 아무 기준 없이 인장인 경우에는 -27도, 압축

응력인 경우에는 143도를 선택하고 있다고 하였다. 이를 해결하는 방안으로 Swedlow는  $\sigma_\theta > 0$ 인 범위에 존재하는 극소값을 선택하여야 한다고 하였다.

이와는 달리 Chang<sup>(7)</sup>은 Muskhelishvili<sup>(10)</sup>의 복소함수로부터 구한 타원 좌표계에 대한 응력해에 균열각  $\beta=89$ 도,  $\sigma=-1$ ,  $r_0/a=0.01$ , Poisson의 비  $\nu=0.25$ 인 경우를 적용한 결과, 변형에너지 밀도 계수의 극소값이 3개 존재하는데, 그 중에 2개가  $\sigma_\theta > 0$ 의 조건에 관련되어 있어서 Swedlow<sup>(6)</sup>의 가설로는 결정할 수 없다고 하였다.

본 연구에서는 최소 변형에너지 밀도 계수( $S_{\min}$ ) 선택의 모호성을 해결하는 방안을 다음과 같이 제안하고자 한다.

Sih<sup>(1,2)</sup>는 임계 변형에너지 밀도계수( $S_{cr}$ )가 재료 상수로써 균열각  $\beta$ 에 관계없이 근본적으로 일정한 값을 갖는다고 하였으므로, 임계거리  $r_0$ 에서 최소 변형에너지 밀도 계수( $S_{\min}$ )가 최초로 임계값에 도달하는 방향으로 균열이 진전한다고 하면, 가장 큰 최소 변형에너지 밀도 계수 ( $S_{\min}$ )가 가장 먼저 임계치( $S_{cr}$ )에 도달하게 된다. 따라서 가장 큰 최소 변형에너지 밀도계수를 갖는 방향으로 균열진전이 발생한다고 할 수 있다.

또한, 변형에너지는 인장이나 압축응력의 경우에 관계없이 응력과 변형률의 곱이므로, 항상 양의 값을 갖기 때문에, 인장과 압축응력을 구분할 수 없으나, 균열성장의 문제에서는 균열열림과 균열단합의 경우를 구분하여야 한다. Swedlow<sup>(6)</sup>는  $\sigma_\theta > 0$ 일 때는 균열이 열려 균열진전이 가능하나,  $\sigma_\theta < 0$ 일 때에는 균열이 닫혀 균열의 성장이 불가능하다고 하였다. 본 연구에서는  $\sigma_\theta$ 의 부호를 고려한, 다음과 같은 최대 극소 변형에너지 밀도 기준(Maximum  $S_{\min}$  Criterion; MSSED)을 제안코자 한다.

수정 변형에너지 밀도 계수(Modified Strain Energy Density Factor)를

$$MS = \text{sign}(\sigma_\theta) \cdot S \tag{10}$$

와 같이 정의할 때, 최소 변형에너지 밀도기준은 다음과 같이 수정되어 정의할 수 있다.

즉,

(1) 초기 균열 진전은 수정 변형에너지 밀도 계수  $MS$ 가 극소값중 최대값을 갖는 방향으로 일

어난다.

(2) 초기 균열 진전은 수정 변형에너지 밀도 계수 MS가 양의 임계치에 도달할 때 발생한다.

또한, 임계응력과 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{cr(90^\circ)} / \sigma_{cr(b)} &= \sqrt{MS_{cr(90^\circ)} / MS_{cr(\beta)}} \\ &= \sqrt{MS_{\min(\beta)} / MS_{\min(90^\circ)}} \end{aligned} \quad (11)$$

이 최대 극소 변형에너지 밀도 기준은  $\sigma_\theta$ 의 부호가 고려되어 있으므로, Swedlow<sup>(6)</sup>의 가설을 적용하기 위하여 S의 극소값을 구하고,  $\sigma_\theta$ 를 구해서 비교해야 하는 번거로움이 없이, 하나의 계수를 사용하여 균열진전방향을 결정할 수 있다는 장점이 있을 뿐만 아니라, 다음 장에서 검토하는 바와 같이 극소값 선택의 문제점을 해결할 수 있는 파괴기준이다.

### 5. 고찰

#### 5.1 최대 극소 변형에너지 밀도 기준의 적용

균열각  $\beta = 10$  도, 작용응력  $\sigma = \pm 1$ MPa, Poisson의 비  $\nu = 0.25$  일 때, 식 (1)에서 비특이항을 고려하지 않은 경우, 즉,  $T=0$  인 응력장에 적용한 결과는 Fig. 2와 같다. Fig. 2(a)는 기존의 SED를 적용한 결과로서 인장이나 압축하중에 관계없이 동일한 도표를 보이고 있으며, 극소값이 -75.5 도와 89.4 도에 존재하고 있다. Fig. 2(b)는 일축인장하중이 작용하는 경우에 MSED을 적용한 결과로써 유일한 극소값이 -75.5 도에 존재하고 있으며, 균열진전방향으로 합당함을 알 수 있다. Fig. 2(c)는 일축 압축하중이 작용하는 경우의 도표로써 MSED를 적용한 결과인데, 균열진전방향이 유일한 극소값인 89.4 도임을 알 수 있다. 이 역시 합리적인 결과로서 타당하다.

같은 조건일 때, 식 (1)에서 비특이항을 고려한 경우중, Williams와 Ewing<sup>(9)</sup>에 의한  $T = \sigma \cos^2 \beta$  인 응력장에 적용한 결과는 Fig. 3과 같다. Fig. 3(a)는 기존의 SED를 적용한 결과로서 인장이나 압축하중에 관계없이 동일한 도표를 보이고 있다. 극소값이 -79.4 도와 84.6 도에 있음을 알 수 있다.

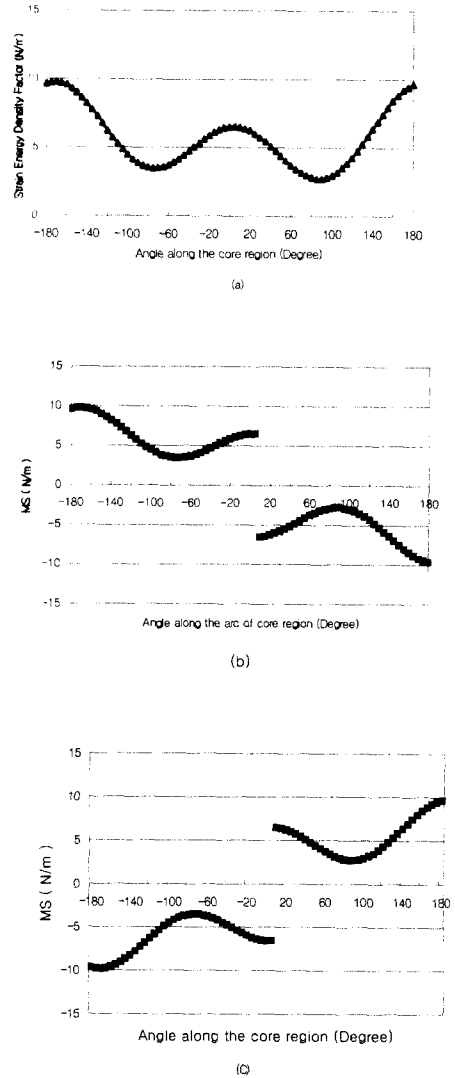
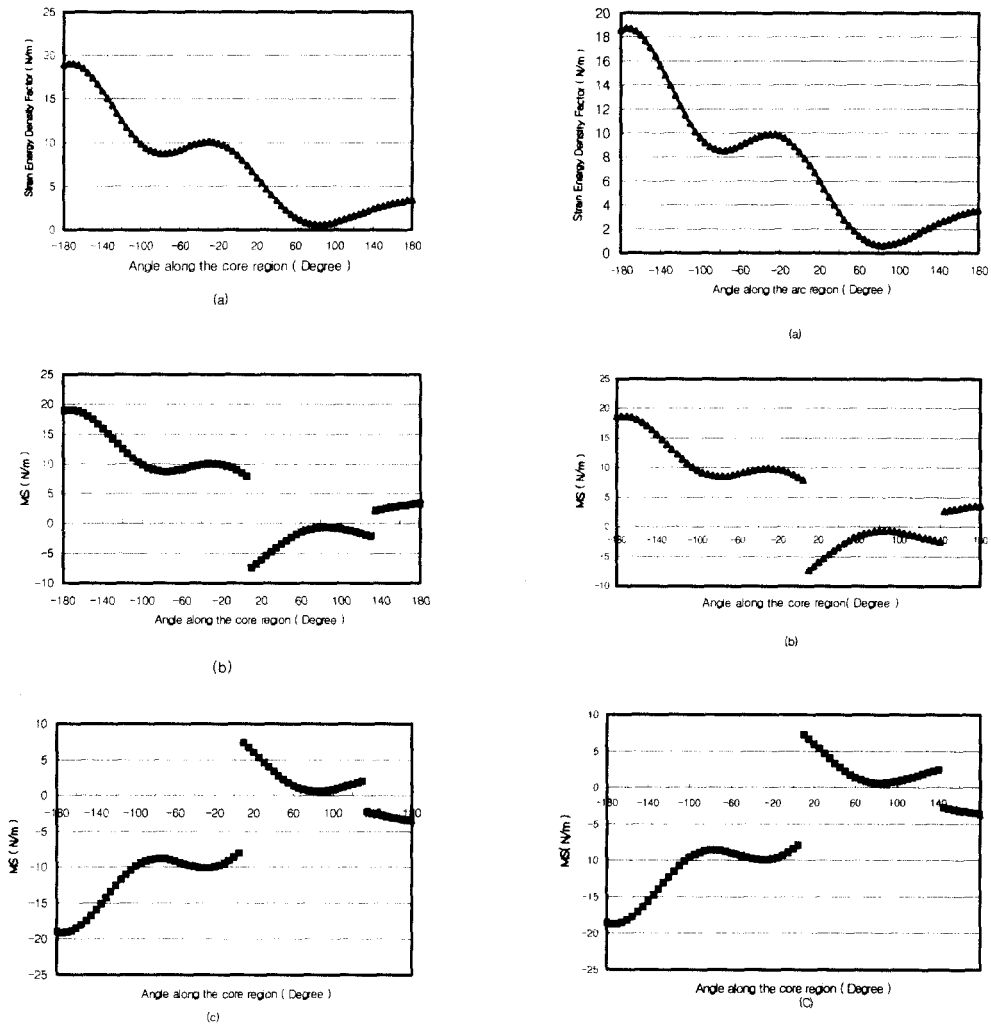


Fig. 2 (a) Analytic results for S along the arc of the core region (b) for MS along the arc of the core region under tensile loading (c) under compressive loading

Fig. 3(b)는 일축인장하중이 작용하는 경우에 MSED을 적용한 결과로써 균열진전방향이 -79.4 도임을 알 수 있다. Fig. 3(c)는 일축압축하중이 작용하는 경우의 도표로써 MSED를 적용한 결과인데, 균열진전방향이 84.6 도임을 알 수 있다. 이들은 합리적인 결과로서 타당하다고 하겠다.



**Fig. 3** (a) Analytic results for S along the arc of the core region (b) for MS along the arc of the core region under tensile loading (c) under compressive loading

같은 조건일 때, 식 (1)에서 비특이항을 고려한 경우 중, Swedlow<sup>(6)</sup>에 의한  $T = \sigma(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$ 인 응력장에 적용한 결과는 Fig. 4와 같다. Fig. 4(a)는 기존의 SED를 적용한 결과로서 인장이나 압축하중에 관계없이 극소값이 -79.3도와 84.8도에 있음을 알 수 있다. Fig. 4(b)는 일축인장하중이 작용하는 경우에 MSED를 적용한 결과로써 균열진전방향이 -79.3도임을 알 수 있다. Fig. 4(c)는 일축압축하중이 작용하는 경우의 도표로써 MSED를 적용한 결과인데, 균열진전방향이

**Fig. 4** (a) Analytic results for S along the arc of the core region (b) for MS along the arc of the core region under tensile loading (c) under compressive loading

84.8도임을 알 수 있다. 이들도 역시 만족할 만한 결과를 얻었음을 알 수 있다.

균열각  $\beta = 89$ 도, 작용응력  $\sigma = \pm 1$ MPa, Poisson의 비  $\nu = 0.25$ 일 때, 식 (1)에서 비특이항을 고려하지 않은 경우, 즉,  $T=0$ 인 응력장에 적용한 결과는 Fig. 5와 같다. Fig. 5(a)는 기존의 SED를 적용한 결과로서 극소값이 -2도, 178도와 -180도 부근에 3개나 존재하고 있는데, 일축인장의 경우에 그 중 -180도와 -2도 부근의 극소값이  $\sigma_\theta > 0$ 인 범위에 존재하고 있어서, Swedlow의

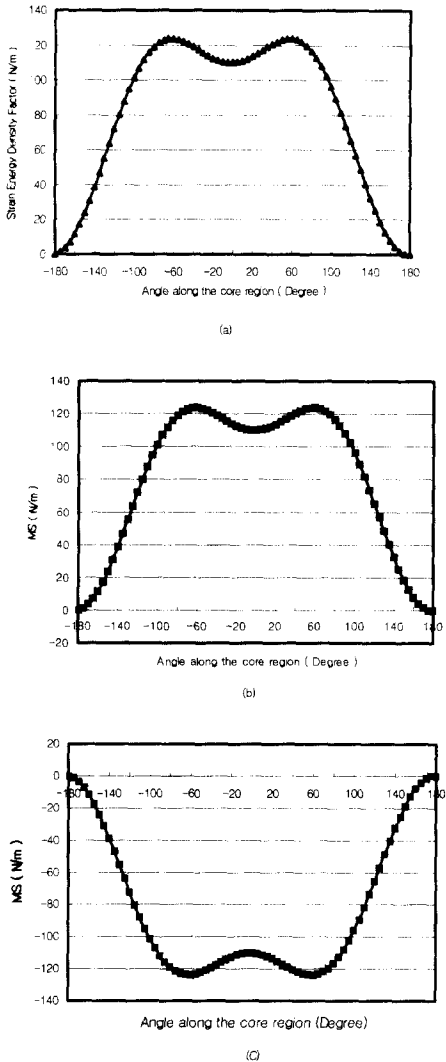


Fig. 5 (a) Analytic results for S along the arc of the core region (b) for MS under tensile loading (c) under compressive loading

방법에 의하여서는 균열진전방향을 결정하기 어렵다. 그러나, Fig. 5(b)는 일축인장하중이 작용하는 경우에 MSED 을 적용한 결과로써, -2 도 부근에서 가장 큰 극소값이 발생하고 있으며, 이를 균열진전방향으로 선택하는 것은 타당한 결과이다. 또한, Fig. 5(c)는 일축압축하중이 작용하는 경우의 도표로써 MSED 를 적용한 결과인데, 가장 큰 극소값인 178 도에서 발생하고 있다. 이 역시 합리적인 결과로서 타당하다.

균열각  $\beta = 5$  도, 작용응력  $\sigma = 1$  MPa, 즉, 일축인장하중이 작용하고, Poission 의 비  $\nu = 0.25$  일

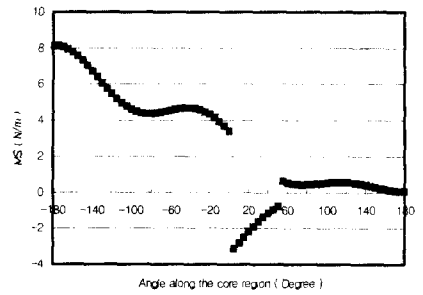


Fig. 6 Analytic results for MS along the arc of the core region under tensile loading

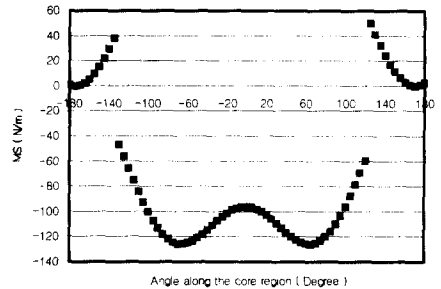


Fig. 7 Analytic results for MS along the arc of the core region under compressive loading

때, 식 (1)에서 비특이항을 고려한 경우 중, Williams와 Ewing<sup>(9)</sup>에 의한  $T = \sigma \cos^2 \beta$  인 응력장에 적용한 결과는 Fig. 6 과 같다. 이는 MSED을 적용한 결과로써 극소값이 -84.4 도와 약 70 도 부근에 존재하고 있으나, 두 개의 극소값이  $\sigma_\theta > 0$  인 범위에 존재하고 있어서, Swedlow의 방법에 의하여서는 균열진전방향을 결정하기 어렵다. 그러나, 본 논문의 최대 극소 변형에너지 밀도 기준에 따르면, 큰 극소값이 존재하는 -84.4 도를 균열진전방향으로 결정할 수 있다.

균열각  $\beta = 89$  도, 작용응력  $\sigma = -1$  MPa, 즉, 일축압축하중이 작용하고, Poission의 비  $\nu = 0.25$  일 때, 식 (1)에서 비특이항을 고려한 경우중, Swedlow<sup>(6)</sup>에 의한  $T = \sigma (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$  인 응력장에 적용한 결과는 Fig. 7 과 같다. 이는 MSED을 적용한 결과로써 극소값이 총 4 개가 존재하고 있음을 알 수 있다. -175 도와 170.4 도 부근에 존재하는 극소값들이  $\sigma_\theta > 0$  인 범위에 존재하고 있어서, Swedlow의 방법에 의하여서는 균열진전방

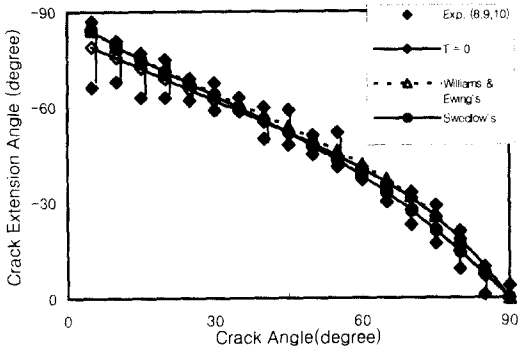


Fig. 8 Crack angle vs. crack extension angle under tensile loading

향을 결정하기 어렵다. 그러나 최대 극소 변형에너지 밀도 기준을 적용하면, 가장 큰 극소값이 존재하는 170.4 도를 균열진전방향으로 결정할 수 있으며, 이 결과는 타당하다.

5.2 일축인장과 일축압축인 경우 실험치와의 비교

본 연구에서 일축 인장인 경우 비교한 실험치는 Erdogan과 Sih,<sup>(11)</sup> Williams와 Ewing<sup>(9)</sup>과 Palaniswamy 와 Knauss<sup>(12)</sup>의 결과이며, 일축 압축인 경우에는 노치 침단의 곡률반경비가  $\rho/a = 0.031, 0.055$  인 Tirosh와 Elicatz<sup>(13)</sup>의 실험 결과와 비교하였다.

Fig. 8 은 일축인장 하중이 작용하는 경우에 최대 극소 변형에너지밀도 기준을 적용한 결과로서 하중 방향에 대한 균열각,  $\beta$  와 균열진전각,  $\theta$ , 의 관계를 각각 나타낸 그림이다. 비특이향을 무시한  $T=0$  인 경우와 비특이향을  $T = \sigma(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$  와  $\sigma \cos^2 \beta$  로 고려한 경우의 응력장 으로부터 각각 최대 극소 변형에너지 밀도 기준을 적용하였는데, 실험치와 잘 일치하고 있다.

Fig. 9 는 일축압축 하중이 작용하는 경우에 최대 극소 변형에너지밀도 기준을 적용한 결과로서 하중 방향에 대한 균열각,  $\beta$  와 균열진전각,  $\theta$ , 의 관계를 각각 나타낸 그림이다. 비특이향을 무시한  $T=0$  인 경우와 비특이향을  $T = \sigma(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$  와  $\sigma \cos^2 \beta$  로 고려한 경우의 응력장 으로부터 각각 최대 극소 변형에너지 밀도 기준을 적용하였는데, 실험치와는 차이가 있으나, 최소 변형에너지 밀도 기준(SED)에서 Sih<sup>(4,5)</sup>가 선택의

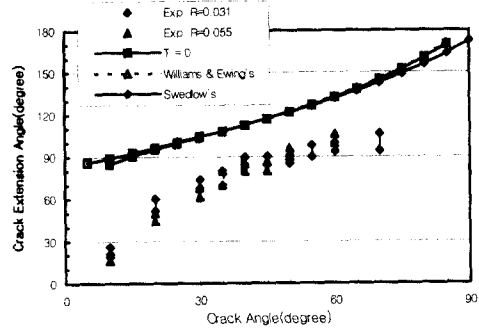


Fig. 9 Crack angle vs. crack extension angle under compressive loading

기준없이 임의로 선택하였던 균열진전방향과 같은 값으로 결정할 수 있다.

6. 결론

이상의 고찰로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

- (1) 최소 변형에너지 밀도 기준은 일축 인장과 압축하중이 작용하는 경우에 변형에너지 밀도 계수의 극소값이 동일하여 균열진전방향을 결정하기 어렵다.
- (2) 최소 변형에너지 밀도 기준은 극소값이 여러 개 존재하여 균열진전방향을 결정하기 어렵다.
- (3) 본 연구의 최대 극소 변형에너지 밀도 기준을 적용하였을 때 일축인장이나 압축의 경우에 유일한 균열진전방향을 결정할 수 있다.

참고문헌

- (1) 조명래, 최용식, 양원호, 1993, "균열의 두께가 변화하는 부재내의 혼합모드(모드 I/II) 응력확대 계수," 대한기계학회논문집, Vol. 17, No. 8, pp. 1875~1882.
- (2) 정남용, 장진모, 1997, "Al/Steel 이종재료의 접착이음에 대한 혼합모드의 파괴기준," 대한기계학회논문집 A, Vol. 21, No. 8, pp. 1322~1331.
- (3) 이익섭, 류황희, 김동준, 1998, "혼합모드하중에서의 피로균열전파 방향과 피로수명 예측," 대한기계학회논문집 A, Vol. 23, No. 9, pp. 1550~1558.
- (4) Sih, G. C., 1974, "The Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems," *Int. J. of Fracture*, vol. 10, No. 3, pp. 305~321.
- (5) Sih, G. C., 1973, "Introductory Chapter : A Special Theory of Crack Propagation," *Mech. of Fracture I* (ed. G. C. Sih ), Noordhoff Int. Publishing, Leyden, pp.

- XXI~XLV.
- (6) Swedlow, J. L. , 1976, "Criteria for Growth of the Angled Crack," *Cracks and Fracture*, ASTM STP 601, pp. 506~521.
- (7) Chang, K. J. , 1982, " A Further Examination on the Application of the Strain Energy Density Theory to the Angled Crack Problem," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 377~382.
- (8) Williams, M. L. , 1957, " On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack," *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, No. 1, pp. 109~114.
- (9) Williams, J. G. and Ewing, P. D. , 1972, " Fracture under Complex Stress - The Angled Crack Problems," *Int. J. of Fracture Mech.*, Vol. 8, No. 4, pp. 441~446.
- (10) Muskhelishvili, N. I. , 1953, " Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity," Noordhoof, Groningen.
- (11) Erdogan, F. and Sih, G.C. , 1963, "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear," *J. Basic Engng.*, Trans. ASME Vol. 85, pp. 519~527.
- (12). Palaniswamy, K and Knauss, W. G. ,1976 , "On the Problem of Crack Extension in Brittle Solids under General Loading," *Mech. Today* (ed. S. Nemat-Nasser), Pergamon Press, *New York*, Vol. 4, pp. 87~148.
- (13) Tirosh, J. and Elicatz, 1981, "Mixed-mode Fracture Angle and Fracture Locus of Materials Subjected to Compressive Loading," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 14, pp. 27~38.