

지지구조물의 동특성을 고려한 회전축 모델의 진동해석

최복록* · 박진무*

(1999년 10월 20일 접수, 2001년 1월 17일 심사완료)

Vibrational Analysis of Rotor Model considering the Dynamic Characteristics of the Support Structure

Bok-Lok Choi and Jin-Moo Park

Key Words: Critical Speed(임계속도), FRF(주파수 응답함수), Impedance Coupling Method(임피던스 커플링법), Support Structure(지지구조물)

Abstract

Support dynamics are often important in rotordynamic analyses. It may well happen in real situation of machines such as centrifugal pumps or turbines operating on flexible structure. This paper presents the applications of the impedance coupling method and the improved rotor model for including the support effects on the interaction with the rotor. The impedance coupling techniques are based on the FRFs of each substructure. Its dynamic stiffness matrix can be assembled to generate the system matrix, which satisfy the constraint conditions in the connection coordinates. And, the improved rotor uses the simplified spring-mass models as support properties. The equivalent support models are directly incorporated into the finite element rotor model. To verify the suggested analytical procedures, the results are compared to those of the pump system.

1. 서론

기계 구조물의 진동특성을 예측하기 위해서는 실험뿐만 아니라 여러 해석적인 방법이 널리 사용되고 있다. 특히, 회전축에서 중요한 임계속도와 안정성, 강제진동 해석 등은 전달행렬법(TMM)이나 유한요소법(FEM)을 통해서 그동안 많은 연구가 진행되어 왔으며,^(1~3) 이론적으로도 비교적 잘 정립되어 있다.^(4,5) 그러나, 회전축의 진동특성은 지지부의 동특성과 밀접하게 상호연성되어 있으므로, 축-임펠러-베어링으로 구성되는 단순축계 모델의 계산결과는 예상치 않은 큰 오

차를 포함할 수가 있다. 따라서, 지지구조물의 동특성이 축계의 진동응답에 많은 영향을 미칠 경우 이것을 축진동 해석에서 효율적으로 고려할 수 있는 새로운 해석적 방법이 필요하다.⁽⁶⁾

일반적인 구조물의 진동해석 과정에서 전체계의 영향을 효과적으로 고려하기 위해 부분구조합성법⁽⁷⁾을 많이 적용하고 있다. 이것은 각 부분구조물의 동특성을 컴플라이언스 FRF 행렬(compliance FRF matrix)형태로 얻은 후, 어셈블 과정을 통해서 전체계의 동강성 행렬을 얻는 방법이다. Hong 등⁽⁸⁾은 회전체 베어링계의 정상상태 해석을 위해서 지지부를 제외한 상태에서의 기존 모드 해석방법과 베어링과 커플링이 결합될 때의 응답 계산식을 유도하였으며, 행렬 압축기법을 적용하여 불평형 응답을 해석할 수 있는 개선된 부분구조 합성법을 제시하였다. Taiping⁽⁹⁾은 회전축의 고유치를 계산하기 위해서 전달행렬법

* 책임저자, 회원, 현대·기아 연구개발본부 차량개발팀

E-mail : topmount@shinbico.com

TEL : (031)369-5471 FAX : (031)369-5818

* 고려대학교 기계공학과

에 의한 커플링 방법을 제시하였으며, Yang⁽¹⁰⁾은 자이로스코프 효과를 포함하는 계와 부분구조물에 대해서 전달함수에 의해 전체 구조물의 운동 방정식을 유도하였다. 그리고, Suarez 등⁽¹¹⁾은 부분구조물로 나누어지는 동적계의 고유치 해석을 위해서 모드 합성법을 적용하였다.

본 연구에서는 지지구조물의 동특성이 축계의 진동응답에 미치는 영향을 고려하기 위해서 다음 두가지 해석적 방법을 제시하였다. 하나는 임피던스 커플링법에 의한 회전축의 진동해석 방법으로서 펌프계를 축계와 지지부로 구분한 후, 각 부분구조물에서 얻은 구조물의 동특성과 경계에서의 구속조건을 이용해서 전체계의 주파수 응답 특성을 계산하는 방법이다. 그리고, 다른 하나는 지지부의 동특성을 단순화된 등가모델로 나타내는 개선된 축계모델을 구성하는 방법이다. 이같은 등가지지형의 축계모델을 구성하기 위해서 먼저 축과의 연결점인 베어링 위치에서 지지구조물의 주파수 응답함수들을 계산하였으며, 다음으로 주파수 응답함수의 성질을 이용해서 이와 동일한 특성을 가지는 등가의 스프링-질량 모델들을 유도하였다.

이상과 같은 축진동 해석방법들의 타당성을 검증하기 위해서 회전효과를 무시한 상태에서 상세 모델로 구성한 펌프계의 결과와 비교하였으며, 또한 축진동 해석에 적용하였다.

2. 주파수 응답함수

주파수 응답함수(frequency response function)는 주파수 영역에서 구조물의 임의 점에서의 가진력에 대한 응답의 비로 정의되며, 시간영역에서의 함수를 푸리에 변환하거나 정상상태에서의 주파수 응답해석을 통해서 얻어질 수 있다.

일반적인 구조물의 운동방정식을 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

여기서, $[M]$, $[C]$, $[K]$ 는 질량, 감쇠, 그리고 강성행렬을 나타낸다.

조화 가진력 $\{f(t)\} = \{F(\omega)\}e^{j\omega t}$ 에 대한 응답은 $\{x(t)\} = \{X(\omega)\}e^{j\omega t}$ 로 가정할 수 있으며, 여기서

$\{X(\omega)\}$ 는 복소 변위벡터를 의미한다. 가정된 해를 이용해서 속도와 가속도를 구한 후, 식 (1)에 대입해서 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\{X(\omega)\} = ([K] - \omega^2[M] + j\omega[C])^{-1}\{F(\omega)\} \quad (2)$$

따라서, 임의의 좌표 j 와 k 에 대해서 식 (2)는 다음과 같다.

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_k(\omega)}, F_m = 0 \text{ and } m \neq k \quad (3)$$

식 (3)은 k 좌표를 제외한 모든 점에서의 힘 성분이 0인 가진력에 대한 j 좌표에서의 응답을 의미하는 주파수 응답함수이다.

한편, 식 (2)에서 양변에 고유벡터를 곱한 후, 고유벡터의 직교성을 이용해서 정리하면 아래 식과 같은 각 모드에 대한 합의 형태로도 표현할 수가 있다.⁽¹²⁾

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=0}^n \frac{r\phi_j r\phi_k}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r\omega_r\omega} \quad (4)$$

여기서, $[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_r^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 2\xi_r\omega_r & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \text{이다.}$$

식 (4)의 분자는 모드상수(modal constant)라 불리는 rA_{jk} 로 나타낼 수 있으며 다음과 같다.

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=0}^n \frac{rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r\omega_r\omega} \quad (5)$$

따라서, 비감쇠 또는 감쇠가 매우 적은 구조물 (lightly damped structure)일 경우 감쇠항을 무시하면, 식 (5)는 n 개의 모드에 대해서 아래와 같은 다항식의 비로서 표현이 가능하다.

$$H_{jk}(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_{n-1}\omega^{2n-2}}{a_0 + a_1\omega^2 + \dots + a_{n-1}\omega^{2n-2} + a_n\omega^{2n}} \quad (6)$$

위 식에서 분모의 근은 $[[K]-\omega^2[M]]=0$ 에 의해 결정되는 고유진동수 ω_c^2 과 일치하며, 분자의 근은 주파수 응답곡선의 최소점 주파수들에 대응하므로 다음과 같이 나타낼 수 있을 것이다.

$$H_{jk}(\omega) = B \frac{(\Omega_1^2 - \omega^2) \cdots (\Omega_{n-1}^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2) \cdots (\omega_{n-1}^2 - \omega^2)(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (7)$$

3. 임피던스 커플링 방법

임피던스 커플링법의 하나인 주파수 응답함수의 연성(FRF coupling method)에 의한 방법⁽¹³⁾을 펌프의 축진동 해석에 적용하였다. 이것은 실험 또는 해석적 방법에 의해 유도한 각 부분구조물의 주파수 응답함수들을 직접 이용할 수 있다는 장점이 있으나, 비감쇠 또는 감쇠가 매우 적은 구조물일 경우 주파수 응답행렬들의 역행렬 계산 과정에서 수치적인 문제가 발생할 수 있다는 단점이 있다.

일반적인 임피던스 커플링법을 나타내기 위해 각 모델의 동특성들을 $[H(\omega)]$ 로 표현하였다. 구조물들 사이의 연결부에 포함되어 있는 좌표를 아래첨자 c , 그리고 각 부분구조물 내부에서의 좌표를 r 이라 하면, 각각의 가진력에 대한 응답의 관계식은 다음과 같이 표현되어진다.

부분구조물 (1)의 경우,

$$\begin{pmatrix} \{X_c^{(1)}\} \\ \{X_r^{(1)}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{cc}^{(1)}] & [H_{cr}^{(1)}] \\ [H_{rc}^{(1)}] & [H_{rr}^{(1)}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{F_c^{(1)}\} \\ \{F_r^{(1)}\} \end{pmatrix} \quad (8a)$$

또는,

$$\{X^{(1)}\} = [H^{(1)}(\omega)] \{F^{(1)}\} \quad (8b)$$

부분구조물 (2)의 경우,

$$\begin{pmatrix} \{X_c^{(2)}\} \\ \{X_r^{(2)}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{cc}^{(2)}] & [H_{cr}^{(2)}] \\ [H_{rc}^{(2)}] & [H_{rr}^{(2)}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{F_c^{(2)}\} \\ \{F_r^{(2)}\} \end{pmatrix} \quad (9a)$$

또는,

$$\{X^{(2)}\} = [H^{(2)}(\omega)] \{F^{(2)}\} \quad (9b)$$

여기서, 부분구조물 (1)과 (2)의 자유도가 각각 n_1, n_2 이면, 어셈블된 모델은 $n_A = n_1 + n_2 - n_c$ 의 자유도를 가질 것이다.

각 구조물들의 경계에서의 구속조건인 변위의 적합조건(compatibility condition)과 힘의 평형조건(equilibrium of forces)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{X_c^{(1)}\} &= \{X_c^{(2)}\} = \{X_\beta^{(A)}\} \\ \{F_c^{(1)}\} + \{F_c^{(2)}\} &= \{F_\beta^{(A)}\} \end{aligned} \quad (10)$$

따라서, 두 부분구조물들로 구성되는 합성된 구조물의 주파수 영역에서의 힘과 변위의 관계식은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\{X^{(A)}\} = [H^{(A)}(\omega)] \{F^{(A)}\} \quad (11)$$

여기서,

$$[H^{(A)}(\omega)] = \begin{bmatrix} [H_{aa}] & [H_{a\beta}] & [H_{ar}] \\ [H_{\beta a}] & [H_{\beta\beta}] & [H_{\beta r}] \\ [H_{ra}] & [H_{r\beta}] & [H_{rr}] \end{bmatrix}$$

부분구조물들의 주파수 응답행렬인 식 (8)과 식 (9), 그리고 경계에서의 구속조건을 나타내는 식 (10)으로부터 전체 구조물의 힘과 변위와의 관계를 나타내는 식 (11)을 얻는 것이 임피던스 커플링법의 목적이다.

이와같은 임피던스 커플링법을 펌프계의 축진동 해석에 적용하기 위해서, 펌프를 회전부인 축계와 고정부인 케이싱과 지지대로 각각 분리해서 고려하였다. 따라서, 독립된 축계모델은 아무런 구속이 없는 상태(free condition)가 될 것이며, 지지구조물은 펌프의 구조에 대응하는 방식으로 베이스플레이트(baseplate)에 고정되는 구속조건을 가질 것이다. 그리고, 축계모델에 대해서는 축을 지지하는 좌우 베어링점의 좌표를 a 와 b , 그리고 임펠러 중심점과 모터축과의 연결점 등 내부에서의 좌표를 r 로 나타내었으며, 지지구조물에 대해서도 경계점인 베어링 위치에서의 좌표를 축계와 마찬가지로 a 와 b , 그리고 나머지 내부좌표를 r 로 표현하였다.

각 부분구조물의 주과수 응답행렬로부터 회전축 모델의 운동방정식을 얻기 위해서는 주과수 응답행렬의 역행렬인 임피던스 행렬 또는 동강성 행렬로 표현하는 것이 편리하다. 따라서, Fig. 1의 축계모델 (1)에 대해서 응답과 가진력 사이의 관계를 동강성 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Z_{aa}^{(1)} & Z_{ab}^{(1)} & Z_{ar}^{(1)} \\ Z_{ba}^{(1)} & Z_{bb}^{(1)} & Z_{br}^{(1)} \\ Z_{ra}^{(1)} & Z_{rb}^{(1)} & Z_{rr}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a^{(1)} \\ X_b^{(1)} \\ X_r^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a^{(1)} \\ F_b^{(1)} \\ F_r^{(1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

케이싱과 지지부로 구성되는 부분구조물 (2)에 대해서도 마찬가지로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} Z_{aa}^{(2)} & Z_{ab}^{(2)} & Z_{ar}^{(2)} \\ Z_{ba}^{(2)} & Z_{bb}^{(2)} & Z_{br}^{(2)} \\ Z_{ra}^{(2)} & Z_{rb}^{(2)} & Z_{rr}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a^{(2)} \\ X_b^{(2)} \\ X_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a^{(2)} \\ F_b^{(2)} \\ F_r^{(2)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (12)와 식 (13)을 이용해서 합성된 구조물의 주과수 응답행렬을 얻기 위해서는 경계에서의 구속조건인 베어링 지지점에서 변위에 대한 적합조건과 힘의 평형조건을 만족해야 할 것이다. 연결점인 베어링 위치에서 각각을 표현하면 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X_a^{(A)} &= X_a^{(1)} = X_a^{(2)}, & X_b^{(A)} &= X_b^{(1)} = X_b^{(2)} \\ F_a^{(A)} &= F_a^{(1)} + F_a^{(2)}, & F_b^{(A)} &= F_b^{(1)} + F_b^{(2)} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, 위첨자 (A)는 합성된 구조물을, 그리고, 아래첨자 a, b는 축과 지지구조물 사이의 연

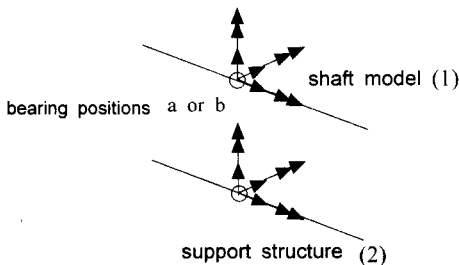


Fig. 1 Coupling coordinate between shaft and support structure

결점인 내, 외측 베어링 위치를 의미한다.

부분구조물들의 힘과 변위와의 관계식인 식 (12)와 식 (13), 그리고 연결점에서의 적합조건과 평형조건을 나타내는 식 (14)로부터 전체 구조물의 동강성 행렬은 대응하는 좌표에서 단순히 더함으로써 얻어질 수 있다. 베어링 점에서의 힘은 서로 상쇄되며 임펠러에서의 힘만 존재한다고 가정하면 아래 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} Z_{aa}^{(1)} + Z_{aa}^{(2)} & Z_{ab}^{(1)} + Z_{ab}^{(2)} & Z_{ar}^{(1)} & Z_{ar}^{(2)} \\ Z_{ba}^{(1)} + Z_{ba}^{(2)} & Z_{bb}^{(1)} + Z_{bb}^{(2)} & Z_{br}^{(1)} & Z_{br}^{(2)} \\ Z_{ra}^{(1)} & Z_{rb}^{(1)} & Z_{rr}^{(1)} & 0 \\ Z_{ra}^{(2)} & Z_{rb}^{(2)} & 0 & Z_{rr}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a^{(1)} \\ X_b^{(1)} \\ X_r^{(1)} \\ X_r^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_r^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)에서 축과 베어링 위치에서의 자유도만 남겨두고서 지지구조물의 $X_r^{(2)}$ 항을 소거하면 축소된 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} Z_{aa}^{(1)} + K_{aa}^{(2)} & Z_{ab}^{(1)} + K_{ab}^{(2)} & Z_{ar}^{(1)} \\ Z_{ba}^{(1)} + K_{ba}^{(2)} & Z_{bb}^{(1)} + K_{bb}^{(2)} & Z_{br}^{(1)} \\ Z_{ra}^{(1)} & Z_{rb}^{(1)} & Z_{rr}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a^{(1)} \\ X_b^{(1)} \\ X_r^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_r^{(1)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{aa}^{(2)} &= Z_{aa}^{(2)} - [Z_{ar}^{(2)} Z_{rr}^{(2)-1} Z_{ra}^{(2)}] \\ K_{ab}^{(2)} &= Z_{ab}^{(2)} - [Z_{ar}^{(2)} Z_{rr}^{(2)-1} Z_{rb}^{(2)}] \\ K_{ba}^{(2)} &= Z_{ba}^{(2)} - [Z_{br}^{(2)} Z_{rr}^{(2)-1} Z_{ra}^{(2)}] \\ K_{bb}^{(2)} &= Z_{bb}^{(2)} - [Z_{br}^{(2)} Z_{rr}^{(2)-1} Z_{rb}^{(2)}] \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16)은 축 내부의 좌표와 연결점에서의 좌표만 포함하고 있으며 지지구조물을 나타내는 변위 좌표는 변환관계인 식 (17)에 의해 소거되었다. 따라서, 축계의 진동해석 과정에서 지지부의 동특성을 포함하기 위해 각 부분구조물의 동강성 행렬을 이용하는 경우 전체 구조물을 대상으로 하는 해석모델과 비교해서 모델의 크기뿐만 아니라 계산시간도 크게 감소할 것이다.

또한, 식 (17)에서 $K_{ij}^{(2)}(\omega)$ 는 지지구조물의 동강성 행렬을 나타내고 있으므로, 대응하는 리셉턴스 행렬 $H_{ij}^{(2)}(\omega)$ 와의 사이에 다음과 같은 역행렬 관계가 성립할 것이다.

$$K_{ij}^{(2)}(\omega) = H_{ij}^{(2)}(\omega)^{-1} \quad (18)$$

이와같은 동강성 행렬을 이용하는 임피던스 커플링법의 해석과정을 요약하면 아래와 같다.

$$[H^{(A)}] = \left[\begin{array}{c} [H^{(1)}]^{-1} \oplus [H^{(2)}]^{-1} \oplus \dots \\ (n_A \times n_A) \end{array} \right]^{-1} \quad (19)$$

여기서, 오퍼레이터(operator) \oplus 는 대응하는 좌표에서의 각 부분구조물에서 계산한 임피던스 행렬의 합을 의미한다. 그러나, 식 (19)에서 보는 바와 같이 전체계의 주파수 응답행렬은 각 부분구조물에서 계산한 행렬의 역행렬을 수치적으로 더하였으며, 또한 어셈블된 전체 행렬의 역행렬 과정이 추가적으로 필요하다는 것을 알 수 있다.

식 (19)를 각 부분구조물에 대응하는 동강성 행렬로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$[H^{(A)}] = \left[\begin{array}{cccc} \{Z_{rr}^{(1)}\} & \{Z_{rc}^{(1)}\} & \{0\} & \dots \\ [Z_{cr}^{(1)}] & [Z_{cc}^{(1)}] + [Z_{cc}^{(2)}] & [Z_{cr}^{(2)}] & \dots \\ \{0\} & [Z_{rc}^{(2)}] & [Z_{rr}^{(2)}] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right]^{-1} \quad (20)$$

4. 개선된 축계모델

4.1 등가질량과 강성행렬

주파수 응답함수는 구조물의 질량과 강성행렬에 의해 구성되며 공진점에서의 최대 진폭크기는 대응하는 모드의 감쇠계수로 나타낼 수가 있다. 따라서, 이같은 성질을 이용해서 지지구조물의 베어링 위치에서 계산한 주파수 응답함수와 등가의 특성을 가지는 질량과 강성요소들을 추출할 수가 있을 것이다.

등가모델을 유도하기 위해서 n 자유도를 가지는 직렬 연결된 스프링-질량 모델의 질량과 강성행렬을 나타내면 아래와 같다. 여기서, 질점 1은 지지부와 축계의 연결부인 베어링 위치에 대응하는 점으로 가정한다.

$$[M]_{eq} = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[K]_{eq} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & k_{n-1} + k_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

이것을 주파수 영역에서의 동강성 행렬로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & & 0 \\ D_{21} & D_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서, $D_{ip} = k_{ip} - m_{ip}\omega^2$ 이다.

식 (23)을 $H_{jk}(\omega) = \frac{X_j(\omega)}{F_k(\omega)}$ 형태로 변환한 후, 지지구조물의 베어링 위치에 대응하는 점인 1에서의 구동주파수 응답함수 $H_{11}(\omega)$ 을 표현하면 아래 식과 같이 나타날 것이다.

$$H_{11}(\omega) = \frac{\beta_0 + \beta_1\omega^2 + \dots + \beta_{n-1}\omega^{2n-2}}{\alpha_0 + \alpha_1\omega^2 + \dots + \alpha_{n-1}\omega^{2n-2} + \alpha_n\omega^{2n}} \quad (24)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= k_1 k_2 \dots k_{n-1} + \dots + k_2 k_3 \dots k_n \\ \beta_1 &= m_2 k_2 \dots k_{n-1} + \dots + k_2 k_2 \dots m_n \\ \beta_{n-1} &= m_2 m_3 \dots m_n \\ \alpha_0 &= k_1 k_2 \dots k_n \\ \alpha_1 &= m_1 k_1 \dots k_{n-1} + \dots + k_1 k_2 \dots m_n \\ \alpha_{n-1} &= k_1 m_2 \dots m_n + \dots + m_1 m_2 \dots k_n \\ \alpha_n &= m_1 m_2 \dots m_n \text{이며,} \end{aligned}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H_{11}(\omega) = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \text{이다.} \quad (25)$$

따라서, 실험 또는 유한요소 해석을 통해서 얻을 수 있는 지지구조물의 주파수 응답특성인 식 (6)과 등가모델로서 표현되는 식 (24)와의 계수 비교에 의해 지지구조물의 등가특성을 나타내는 스프링-질량 모델의 m_i 와 k_i 를 결정할 수가 있다. 한편, 이와같은 과정을 통해서 추출한 지지구조물의 등가모델을 대응하는 축계의 유한요소 모델에 포함함으로써 지지부 특성을 고려한 개선된

축계모형을 구성할 수가 있을 것이다.

Fig. 2는 본 연구에서 대상으로 한 양흡입 원심 펌프의 지지부 유한요소 모델을 나타낸 것이며, Fig. 3은 이같은 모델의 외측 베어링 점에서 계산한 주파수 응답특성을 앞에서 유도한 등가모델의 결과와 서로 비교한 것이다.

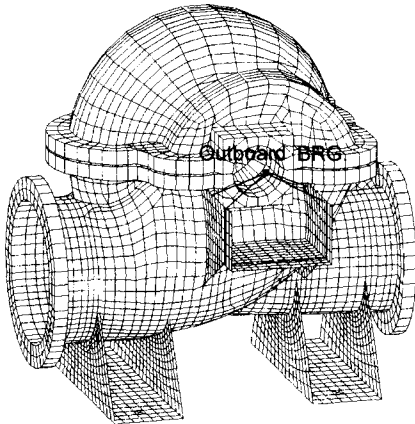
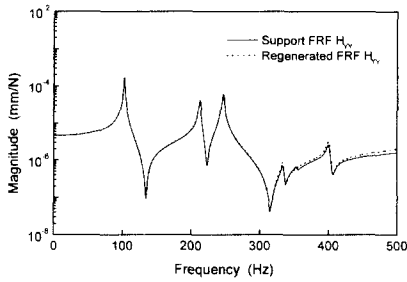
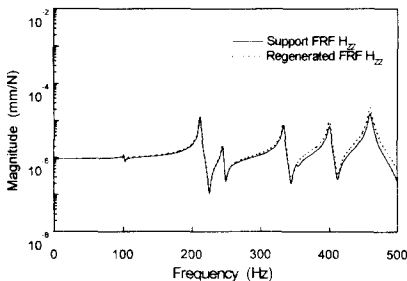


Fig. 2 Finite element model of the double suction centrifugal pump



(a) $H_{YY}(\omega)$



(b) $H_{ZZ}(\omega)$

Fig. 3 Frequency response functions of the support structure and the regenerated spring-mass model

실선은 상세 지지구조물의 해석결과이고 점선은 등가모델의 결과로서, 각 공진점의 발생위치와 진폭크기가 잘 일치하고 있다. 한편, 앞의 등가모델은 비감쇠 구조물로 가정하여 유도한 계산 결과이다. 그러나, 공진점에서의 진폭크기를 지배하는 감쇠 값은 모드시험을 통해서 쉽게 얻을 수 있으므로, 이같은 감쇠특성을 등가의 유한요소 모델에서 다시 고려함으로써 지지부의 감쇠효과를 표현할 수가 있다. 본 연구에서는 해석방법의 타당성에 초점을 두었으며, 따라서 공진점에서의 진폭크기를 비교하기 위해서 감쇠계수는 각각 0.05를 사용하였다.

4.2 개선된 축계모델

지지구조물의 동특성 효과를 회전축의 진동해석 모델에서 고려하기 위해 앞에서 유도한 지지부의 등가모델을 축계의 유한요소 모델에 직접 포함하였다. 즉, 축과 지지부의 연결점인 양단 베어링 위치에서 지지부의 동특성을 등가의 질량과 스프링 요소로 나타내었으며, Fig. 4는 이와같이 구성한 개선된 축계모델을 나타내고 있다.

5. 회전축의 진동해석

5.1 모델검증

회전축계의 진동해석에서 지지구조물의 영향을 효율적으로 고려하기 위한 방법으로 임피던스 커플링 방법과 등가지지형의 개선된 축계모델을 제시하였다. 먼저, 해석방법의 타당성을 검증하기 위해서, 펌프의 지지구조물을 상세모델로 구성한 전체계에서의 결과와 본 연구에서 제시한 방법들의 주파수 응답특성들을 서로 비교하였다.

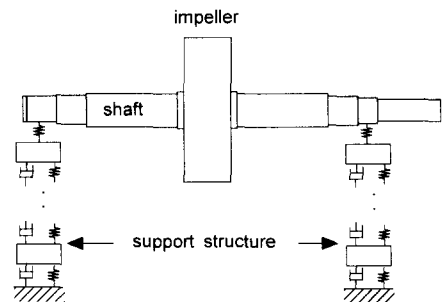
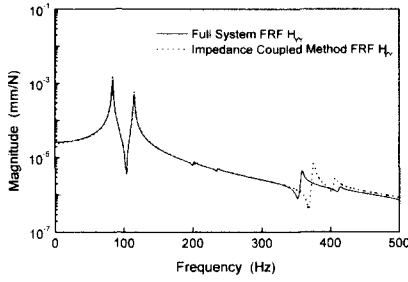
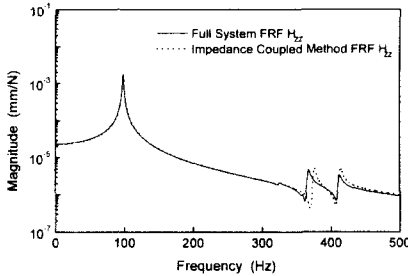


Fig. 4 Improved rotor model

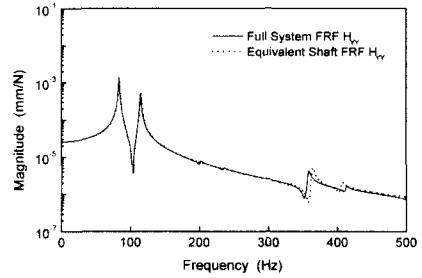


(a) $H_{YY}(\omega)$

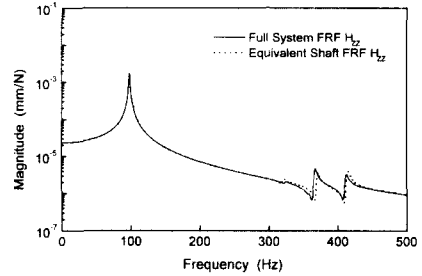


(b) $H_{ZZ}(\omega)$

Fig. 5 Driving point receptance at impeller center for the pump system and the impedance coupling method



(a) $H_{YY}(\omega)$



(b) $H_{ZZ}(\omega)$

Fig. 6 Driving point receptance at impeller center for the pump system and the improved rotor model

Fig. 5는 축의 회전속도 0 rpm에서 계산한 임펠러 중심에서의 리셉턴스 크기이다. 실선은 펌프계에서의 결과이고 점선은 임피던스 커플링법에 의한 것이다. 지지구조물의 비대칭 동강성에 의해 수평방향에서는 1차 공진점의 발생위치가 크게 감소하였으며, 또한 추가적인 공진현상이 나타나고 있다. 그러나, 수직방향의 경우 지지부의 공진점 발생위치가 Fig. 3에서 나타낸 바와 같이 축의 1차 공진점(99.2 Hz)보다 매우 높기 때문에 그 영향이 거의 없음을 알 수 있다.

Fig. 6은 지지부의 영향을 등가의 스프링-질량 모델로 나타낸 개선된 축계모델에서의 결과와 펌프계에서의 결과를 비교한 것이다. 앞에서와 마찬가지로 모든 주파수 영역에서 두 해석결과가 매우 잘 일치하고 있다.

이상과 같은 결과들로부터 지지부의 공진점이 축의 위험속도에 근접할 경우 지지구조물의 영향을 축진동 해석에서 반드시 고려해야 할 것이며, 또한 축계의 진동특성을 정확히 얻기 위해서는 제시한 방법들이 매우 효과적임을 알 수 있다.

5.2 회전축계의 진동해석

회전축계의 진동은 지지부 영향뿐만 아니라 회전속도의 함수인 자이로스코프 효과 등에 따라서도 많이 변할 수 있다. 따라서, 비회전 구조물에 대한 식 (1)과 비교해서 회전축계 모델에서는 회전속도 항을 포함하고 있으며 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C] - \dot{\phi}[G])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (26)$$

여기서, $\dot{\phi}$ 는 축의 회전속도를 나타내며, $[G]$ 는 자이로스코프 효과를 나타내는 반대칭 행렬 (skew-symmetric matrix)이다.

회전축의 설계에서 매우 중요한 임계속도는 일반적으로 질량 불평형으로 인한 진동크기가 국부적으로 최대가 되는 위치를 의미하며, 이것은 축의 회전속도에 따라 변하는 양이다. 본 연구에서는 API⁽¹⁴⁾에서 규정한 질량 불평형 크기의 동기가진력에 대해서 앞에서 제시한 두가지 방법을 적용해서 변위응답을 계산하였다.

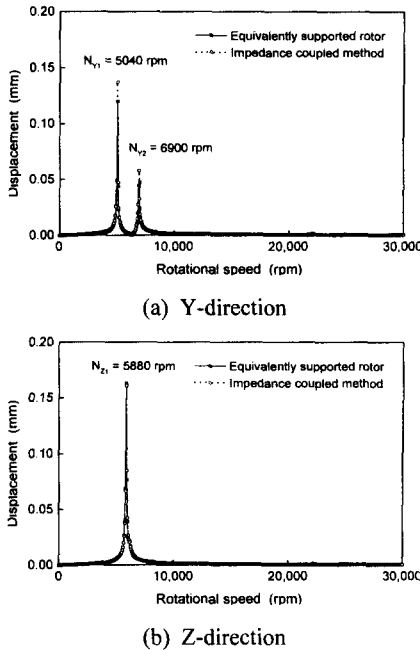


Fig. 7 Comparison of the unbalance response at impeller center between impedance coupling method and the improved rotor model

Fig. 7은 회전속도 변화에 따른 질량 불평형 힘이 작용할 경우 임피던스 커플링 방법과 개선된 축계모델을 이용해서 계산한 임펠러 중심에서의 동기응답으로 두 해석모델의 계산결과가 서로 잘 일치하고 있다. 그러나, 지지부의 비대칭 동특성에 의해 공진점의 위치가 방향에 따라 크게 다르며, 특히 수평방향에서는 위험속도의 감소뿐만 아니라 추가적인 위험속도가 발생할 수 있다.

6. 결론

회전축계의 진동해석에서 지지구조물의 동적 영향을 고려하는 것은 매우 중요하다. 본 연구에서는 이같은 영향을 축계모델에서 보다 효율적으로 나타내기 위해 각 부분구조물의 임피던스를 커플링 하는 방법과 등가의 지지부 특성을 이용하는 개선된 축계모델을 제시하였으며, 다음과 같다.

(1) 임피던스의 커플링법과 등가지지의 축계모델에 의한 축진동 해석방법들의 타당성을 검증하

기 위해서 회전속도를 고려하지 않은 상태에서의 주파수 응답특성들을 전체 펌프계의 결과와 비교하였으며, 그 결과 서로 잘 일치하였다.

(2) 지지구조물의 고유진동수가 회전축의 위험속도에 근접할 경우 지지부의 비대칭 동특성에 의해 위험속도의 감소와 추가적인 위험속도가 발생할 수 있다.

참고문헌

- (1) Sauer, G. and Wolf, M., 1989, "Finite Element Analysis of Gyroscopic Effects," *Finite Elements in Analysis and Design* 5, pp. 131~140.
- (2) Kim, D. and David, J. W., 1990, "An Improved Method for Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems," *Trans. ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 112, pp. 112~118.
- (3) Yang, B. S., Oh, S. K. and Iwatsubo, T., 1986, "Effects of Annular Seals on the Stability of Centrifugal Pump Rotors," 대한기계학회논문집, 제10권 제1호, pp. 56~61.
- (4) Vance, J. M., 1987, *Rotor Dynamics of turbomachinery*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 116~170.
- (5) Lee, C. W., 1993, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers, London, pp. 151~226.
- (6) Buckles, J. R. and Rouch, K. E., 1996, "Modeling Support Effects-Finite Element and Experimental Modal Methods," *ASME 96-GT-403*, NY, pp. 1~9.
- (7) Okitsu, A., Yamashita, K. and Azegami, H., 1987, "Substructure Synthesis Method with Consideration of Rotational Effects on the Combined Boundary," 일본기계학회논문집, 제54권 505호, pp. 2059~2064.
- (8) Hong, S. W. and Park, J. H., 1996, "On Improved Substructure Synthesis Method for Unbalance Response Analysis of Rotor Bearing Systems," 한국소음진동공학회지, 제6권 제1호, pp. 71~82.
- (9) Taiping, H., 1988, "The Transfer Matrix Impedance Coupling Method for the Eigensolutions

- of Multi-Spool Rotor Systems," *Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 110, pp. 468~472.
- (10) Yang, B., 1992, "Natural Frequencies of Combined Gyroscopic Systems," *Journal of Sound and Vibration* 159-2, pp. 23~37.
- (11) Suarez, L. E. and Singh, M. P., 1992, "Modal Synthesis Method for General Dynamic Systems," *Journal of Engineering Mechanics* 118-7, pp. 1488~1503.
- (12) Ewins, D. E., 1986, *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., pp. 19~85.
- (13) Kramer, E., 1993, *Dynamics of Rotors and Foundations*, Springer-Verlag, pp. 261~313.
- (14) *API Standard 610*, 1985, 6th Edition.