

무요소법에서 절점 적분의 개선방안

송태한* · 석병호* · 임장근†

(2001년 1월 3일 접수, 2001년 6월 16일 심사완료)

Improvement Scheme of Nodal Integration in Meshless Method

Taehan Song, Byungho Seog and Jangkeun Lim

Key Words : Meshless Method(무요소법), Reproducing Kernel Particle Method(RKPM), Nodal Integration(절점 적분), Modified Nodal Integration(수정 절점 적분), Integration Cell(적분셀), Stability(안정성)

Abstract

Meshless methods, developed in various ways over the past decade, have been attractive as new computational methods in that they do not need mesh generation in analyzing procedure. But most of these methods were not truly meshless methods because background meshes were required for the spatial integration of a weak form. Accordingly, in this paper, nodal integration for truly meshless methods has been studied, and an improvement scheme is proposed. To improve stabilization and accuracy, which are the weak points in previous nodal integration methods, the integration area is transformed to circle and then numerically integrated. This method does not need any adding term for stabilization in the variational formulation and then simplifies the integration procedure. Numerical test results show that the proposed method is more accurate, stable, and reasonable than the existed nodal integration methods.

1. 서 론

유한 요소법의 적용과정에서 발생하는 요소구성에 대한 근본적인 문제를 해결하기 위해 개발된 무요소법은, 공간상에 배치된 절점들만으로 해석을 수행한다는 장점으로 인하여 형상함수의 수식화 과정에 따라 여러가지 다른 이름으로 개발되어 왔다.^(1~5)

최근, 이러한 무요소법이 많은 역학 문제들에 응용되면서 전산역학적 방법으로 인정받고 있으나 아직 몇 가지 문제점들이 남아 있다. 행렬 방정식의 구성을 위한 수치적분도 그러한 문제점들 중의 하나이다. 무요소법은 유한 요소법에서와 같은 요소가 없기 때문에 정확한 영역을 설정하여 적분하는 적분방법에 어려움이 따르게 된다. 따라서 아직 무요소법의 많은 연구가 수치해의 안정성과 정

확성이 알려져 있는 적분격자(integral cell)를 이용하고 있다. 하지만 이것은 적분격자가 형상함수의 구성과 무관하게 이루어진다 하더라도 유한요소법의 요소를 구성하듯 미리 형성해놓아야 한다는 것과 순수한 의미의 무요소법이 되기 위해서는 절점만으로 모든 계산과정이 이루어져야 한다는 것으로 인해 단점이 되고 있다. 따라서 순수한 의미의 무요소법을 위한 절점 적분이 필요하게 되고 이에 관한 연구가 수행되어 왔다.

초기 무요소법에서 적용되던 순수한 의미의 절점 적분은 정확도와 안정성의 문제로 널리 활용되지 못하였다.^(6~8) Beissel 등⁽⁹⁾은 이러한 불안정성을 제거하기 위해 지배방정식에 잔류항(residual)을 추가하여 처리하는 안정화된 방법을 제안하였고 Bonet 등⁽¹¹⁾도 2차 미분치를 추가하는 방법으로 역시 불안정성의 해결 방안을 모색하였다. 이러한 방법은 절점 적분의 가장 기본적인 방법으로 비교적 쉽게 적용할 수 있었으나, 잔류항의 추가에 따른 수식의 복잡성과 부정확성이 단점이 되었다. Dyka 등⁽¹⁰⁾은 절점 주위에 새로운 점을 이용하는

* 회원, 한양대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : jklim@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0441 FAX : (02)2281-1869

응력포인트(stress point) 방법을 제안하여 불안정성을 제거하였는데 이것은 초기 해석영역의 절점에 새로운 추가적인 절점을 뿌리고 추가된 절점은 적분과정에서만 계산에 이용하여 해를 안정화시키는 방법이었다. 한편, Atluri 등^(12,13)은 Petrov-Galerkin 방법을 이용하는 MLPG(the meshless local Petrov-Galerkin)를 제안하며 실제적인 무요소법이 될 수 있음을 주장하였다. 이러한 MLPG 는 절점단위로 이루어진 부영역(sub-domain)을 기준하여 적분을 하며 정확한 적분을 위해 영역을 분할하여 처리하게 된다. 적분의 정확성 향상을 위하여 De 등⁽¹⁴⁾은 MLPG 방법에서 적분방법으로 입체구적법(cubature rule)을 이용하는 MFS(the method of finite spheres)를 제시하였다. 또한, Nagashima⁽¹⁵⁾는 Beissel 등⁽⁹⁾에 의해 사용되던 절점 가중계수의 계산을 위해 버킷(bucket)을 이용하고 이를 다시 부버킷(sub-bucket)으로 나누어 각각 영향을 미치는 관계를 고려하여 영역을 지정하고 적분하는 NBNM(the node-by-node meshless method)을 제안하였으며, Belytschko 등⁽¹⁶⁾은 응력포인트와 라그랑지안 커널(Lagrangian kernel), 잔류항 추가 등을 사용함으로써 불안정성의 원인들을 제거할 수 있음을 확인하는 등 관련분야 연구가 활발히 진행되고 있다.

본 논문에서는 무요소법의 하나인 RKPM 을 이용하여 순수한 무요소법을 구현할 수 있는 절점 적분에 대하여 연구하였다. 간단히 절점에 대한 정보만으로 모든 해석이 이루어질 수 있도록 하기 위해 Beissel 등⁽⁹⁾이 제안하고 있는 절점 가중계수를 원의 형태로 치환하여 적분영역을 설정하고, 적분 영역과 주위 절점간의 관계를 명확히 해줄 수 있도록 이 영역에 대하여 가우스-르장드르 적분(Gauss-Legendre quadrature)을 수행함으로써, 절점을 추가하거나 지배방정식에 잔류항을 추가하는 복잡한 수식 없이도 해의 불안정성을 개선하고 정확한 해를 얻고자 하였다. 몇 가지 수치 예제의 실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 검증하고자 한다.

2. RKPM 의 기본방정식

편리상 미소변형 조건에서 해석 영역이 Ω 이고 경계 Γ 로 둘러싸인 선형탄성문제를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{\nabla} \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$n \cdot \sigma = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (3)$$

여기서 σ , b 는 응력 텐서와 체적력을 나타내며 Γ_u , Γ_t 는 필수경계와 자연경계를 나타낸다. 또한 \bar{u} , \bar{t} 는 각각 주어진 변위값과 트렉션 값이다. 식 (1~3)에 대한 포텐셜 에너지식을 구성하고 그의 변분식을 구하면 다음과 같다.

$$\pi = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon(u) : \sigma(u) - u \cdot b \right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} u \cdot \bar{t} d\Gamma \quad (4)$$

$$\delta \pi(u, \delta u) = \int_{\Omega} (\delta \varepsilon : \sigma(u) - \delta u \cdot b) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma \quad (5)$$

식 (4), (5)의 식으로부터 무요소법을 적용하기 위하여 다음과 같은 RKPM⁽³⁾을 도입한다.

$$u(x) = \sum \Psi_i(x) u_i \quad (6)$$

$$\Psi_i(x) = Q^T(0) \bar{M}^{-1} Q(x-x_i) \Phi(x-x_i) \quad (7)$$

식 (7)은 RKPM 의 형상함수를 나타낸다. 또한 $\Phi(x-x_i)$ 는 커널 함수를 의미하고 \bar{M} 과 Q 는 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{M}(x) = Q(x-x_i) \Phi(x-x_i) Q^T(x-x_i) \quad (8)$$

$$Q^T(x-x_i) = \begin{bmatrix} 1 & (x-x_i) & (x-x_i)^2 & \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

상기 식 (5)를 이산화 시키기 위하여 다음 관계식들을 도입한다.

$$u = \Psi(x)d \quad (10)$$

$$\sigma = C\varepsilon = CBd \quad (11)$$

식 (11)에 사용된 d 는 절점 변위이고 변형률 행렬 B 는 다음과 같이 정의 되며 C 는 구성행렬(constitutive matrix)⁽⁹⁾을 나타낸다.

$$B = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n]$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \Psi_{i,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{i,y} \\ \Psi_{i,y} & \Psi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

식 (10)~(12)를 이용하여 식 (5)에 대입하고 정리하면 식 (13)과 같은 행렬식을 얻게 된다.

$$Kd = f \quad (13)$$

$$K = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega \quad (14)$$

$$f = \int_{\Gamma_t} \Psi^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi^T b d\Omega \quad (15)$$

식 (14), (15)의 강성 행렬과 외력벡터는 이론적으로 전체 해석 영역과 트렉션 경계에서의 적분으로 구할 수 있다. 그러나 실제로 무요소법에서는 영향역이 존재하기 때문에 전체 영역을 적절하게 분할하여 적분하는 적분계획이 중요하다.

3. 절점 적분

3.1 절점 적분법

절점 적분은 식 (16), (17)과 같이 1 포인트 가우스-르장드르 수치 적분 형태로 표현된다.^(6,9)

$$\mathbf{K} \approx \sum_I^n q_I^\Omega \mathbf{B}(x_I)^T \mathbf{C}(x_I) \mathbf{B}(x_I) \quad (16)$$

$$f \approx \sum_I^n q_I^\Omega \Psi(x_I)^T \bar{\mathbf{t}}(x_I) + \sum_I^n q_I^\Omega \Psi(x_I)^T \mathbf{b}(x_I) \quad (17)$$

여기서 n 은 해석영역 내의 절점 수를 의미하며 s 는 Γ_I 에서의 절점을 의미한다. 또한 q_I^Ω 은 절점 I 에 관련된 가중계수(weight coefficient)로서 적분 영역을 의미하는 값으로 다음 식으로 결정된다.⁽⁹⁾

$$q_I^\Omega = \frac{f_{\Omega,I} \rho_I^2}{\sum_{j=1}^n (f_{\Omega,j} \rho_j^2)} A_\Omega \quad (18)$$

A_Ω , ρ_I 는 각각 전체 영역과 절점 I 에 관련된 가중함수의 영향영역반경을 의미한다. $f_{\Omega,I}$ 는 해석 영역 Ω 에 위치한 절점의 영향계수로서 사각형의 경우 내부에서는 1 의 값을 갖으며 변에서는 0.5 모서리에서는 0.25 의 값을 갖게 된다. 또한 q_I^Ω 에 대한 값은 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$q_I^\Omega = \frac{f_{I,I} \rho_I}{\sum_{j=1}^n (f_{I,j} \rho_j)} L_{I,I} \quad (19)$$

$L_{I,I}$ 는 자연경계의 전체 길이이고 $f_{I,I}$ 는 경계 상의 절점 I 가 갖는 영향 계수 값이다. Beissel 등⁽⁹⁾ 은 이러한 가중계수 q_I^Ω 를 여러가지 다른 형태로도 나타낼 수 있음을 지적하였다.

3.2 절점 적분의 안정화

3.1 절의 절점 적분으로 무요소법의 행렬 방정식을 구성하면 절점이 있는 위치에서만 적분점이 설정되기 때문에 가상의 단파장모드(short wavelength mode)가 나타나는 불안정성을 보이게 된다. 따라서 Beissel 등⁽⁹⁾ 은 식 (4)에 다음과 같은 안정화 항을 추가 하였다.

$$\pi_s = \pi + \frac{\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b})^2 d\Omega \quad (20)$$

여기서 α_s 는 무차원 안정계수이며 l_c, E 는 분할 특성길이와 탄성계수를 나타낸다. 식 (20)의 안정화 항은 평형방정식의 제곱 항으로 이의 약형(weak form)은 다음과 같이 표현된다

$$\begin{aligned} \delta \pi_s(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \delta \pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \\ &+ \frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) d\Omega \end{aligned} \quad (21)$$

식 (5)의 약형에 대하여 절점 적분을 할 경우 절점에서의 1 차 미분치가 거의 0 에 가깝게 얻어지기 때문에 충분히 단파장모드의 에너지를 반영하지 못하여 강성행렬을 과소평가(underestimate)하게 된다. 따라서 식 (21)과 같이 절점에서 변위의 2 차 미분 항을 포함하는 안정화 항으로 강성행렬이 과소평가 되는 것을 보상해준다.

2 차 미분 치에 대한 행렬 방정식은 다음과 같다.

$$\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}' \mathbf{D} d \quad (22)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \dots \quad \mathbf{D}_n] \quad (23)$$

$$\mathbf{D}_I = \begin{bmatrix} \Psi_{I,xx} & \Psi_{I,xy} & \Psi_{I,yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{I,xx} & \Psi_{I,xy} & \Psi_{I,yy} \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

\mathbf{C}' 는 구성 행렬 \mathbf{C} 를 식 (22)에 맞추도록 재구성한 식을 의미한다. 위의 식들을 식 (21)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 식 (13)에 안정화 항이 추가된 새로운 행렬식 (25)를 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_s] \{d\} = \{f + f_s\} \quad (25)$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega \mathbf{D}^T \mathbf{C}' \mathbf{D} d\Omega \quad (26)$$

$$f_s = -\frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega \mathbf{D}^T \mathbf{C}' \mathbf{b} d\Omega \quad (27)$$

식 (26), (27)의 안정화 항에 대한 절점 적분은 다음식으로 표현된다.

$$\mathbf{K}_s \approx \frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \sum_{I=1}^n q_I^\Omega \mathbf{D}(x_I)^T \mathbf{C}(x_I)^T \mathbf{C}(x_I) \mathbf{D}(x_I) \quad (28)$$

$$f_s \approx -\frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \sum_{I=1}^n q_I^\Omega \mathbf{D}^T(x_I) \mathbf{C}(x_I)^T \mathbf{b}(x_I) \quad (29)$$

4. 개선된 절점 적분법

4.1 절점 적분의 개선방안

앞의 행렬식 (25)에 의해 얻어진 수치해석 결과는 안정화 항에 의해서 해의 안정성에 도움을 주지만 적분 셀을 사용한 결과에 비해서는 현저히 해가 부정확해진다. 이것은 절점에서의 영역 값을 q_I^Ω 로 직접 부여하기 때문으로 생각된다.

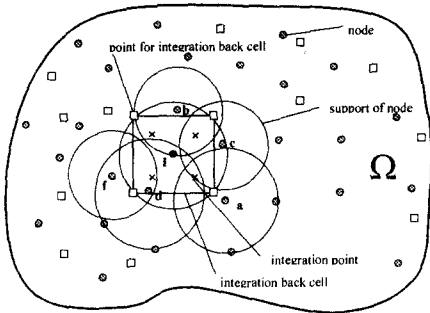


Fig. 1 Nodal points for integration back cells, integration points and supports of nodes in Ω

Fig. 1에서 점 I에 대한 절점 적분이 수행될 경우에 점 I의 영역값 q_I^Ω 에 대하여 관련을 갖는 절점들은 점 b, d가 되고 I점과 절점간의 거리를 계산하여 형상함수의 값을 결정하게 된다. 또한 절점 I에서의 1차 미분 항은 절점 위치에서 계산하여 직접 얻게 됨으로써 정확한 값을 얻지 못하게 된다. 그러나 보통 적용하고 있는 적분 셀을 설정하여 그 영역에 대한 가우스-르장드르 적분을 할 경우에는 그림에서와 같이 적분 점에서 각 절점과의 거리를 이용하게 됨으로 계산 절점의 해당영역 q_I^Ω 에 영향을 미치는 a-f의 절점들에 대한 영향이 정확하게 평가된다. 이러한 것은 1차 미분치의 정확한 평가를 얻게 됨으로써 안정한 결과를 얻을 수 있을 뿐 아니라 절점과의 연관성을 명확히 함으로써 정확성도 향상시키게 된다.

따라서, 본 논문에서는 각 절점 적분에 이용되는 절점 적분 영역의 값을 식 (30), (31)과 같이 원의 형태로 치환하고 이 영역에 대하여 가우스-르장드르 적분을 수행함으로써 적분 절점의 해당영역에 영향을 미치는 절점들을 적절히 고려 할 수 있도록 배려하였다.

$$r_I = \left(\frac{1}{f_{\Omega,I}} \frac{q_I^\Omega}{\pi} \right)^{0.5} \quad (30)$$

$$\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \iint_{\Omega} f(x(r,\theta), y(r,\theta)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr d\theta \quad (31)$$

$$\Rightarrow \sum \sum w_i w_j \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det J$$

적분은 식 (30)과 같은 반지름 r 인 원의 영역을 설정하고 적분식들을 식 (31)과 같이 r, θ 의 형태로 치환하여 가우스-르장드르 수치적분법을 적용하였다.

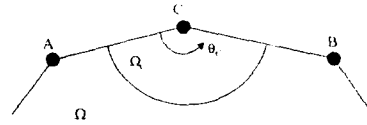


Fig. 2 Boundary nodes for area fraction calculation

논문에서는 적분점수에 따른 수치해석결과로부터 r 방향은 2, θ 방향에 대해서는 6 이상이면 수렴된 결과를 얻을 수 있었으므로 r, θ 방향에 대해 각각 2와 6개의 적분점을 이용하였다. 이렇게 하면 절점에서의 1차 미분에 따르는 불안정성 해소에도움을 주며 주어진 절점의 영역에 영향을 미치는 모든 절점들의 평가를 정확히 할 수 있으며 절점 적분만으로 적분셀을 사용한 것과 같은 효과를 얻을 수 있다.

4.2 경계에서의 영역 적분법

개선된 절점 적분법을 사용하면 경계에서의 분할부분을 편리하게 처리 할 수 있다. 기존의 방법에서는 절점에 해당되는 영향영역의 분할부분을 이용하여 $f_{\Omega,I}$ 값을 적용하였는데 이 값을 θ 의 함수로 정의하여 사용한다.

Fig. 2에 보이는 경계상에서의 절점들에 관련된 전역 좌표계의 각도 값을 얻기 위해서 다음과 같은 식을 정의한다.

$$\theta_{ij}^G = \cos^{-1} \left[\frac{|dx_{ij}|}{\sqrt{(dx_{ij}^2 + dy_{ij}^2)}} \right] \quad (32)$$

각 위치에서의 각도 값을 이용하면 다음과 같은 수식으로 절점에 해당하는 q_I^Ω , $f_{\Omega,I}$ 값을 얻게 되며 이 식을 이용하면 경계부분에서의 영역적분을 편리하게 수행할 수 있다.

$$f_{\Omega,I} = \frac{\theta_{CB}^G - \theta_{CA}^G}{2\pi} = \frac{\theta_C}{2\pi} \quad (33)$$

5. 수치예제 및 검토

제안한 방법의 타당성을 검토하기 위해 몇 가지 예제로 수치실험 하였으며 그 결과를 식 (34)의 L_2 놈을 이용한 상대오차로 비교 평가하였다.

$$r = \frac{\| \mathbf{u}^{num} - \mathbf{u}^{exact} \|_{L_2}}{\| \mathbf{u}^{exact} \|_{L_2}} \quad (34)$$

5.1의 수치예제는 제안한 방법에 대한 해의 안정성 그리고 5.2, 5.3은 정확성을 검토하기 위한

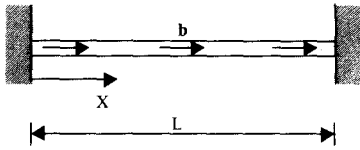


Fig. 3 1-D bar problem

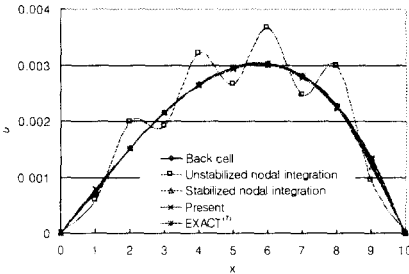


Fig. 4 Nodal displacements in 1-D bar problem with regular node distributions

예제이다. 한편, 본 예제에서 필수 경계 조건을 위한 처리법은 형상함수 수정법⁽¹⁸⁾을 적용하였다.

5.1 1차원 문제

Fig. 3 과 같이 양단이 고정되고 분포하중 b 가 작용하는 1 차원 문제를 수치실험 하였다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(L) = 0 \\ b = Lx \end{aligned} \tag{35}$$

경계조건이 식 (35)와 같이 선형조건으로 주어지고 있는 경우를 11 개의 절점으로 분할하여 해석하였으며 그 결과로써 내부 절점에서의 변위를 비교하여 Fig. 4 에 도시하였다.

Fig. 4 는 해석 결과를 서로 비교하기 위하여 절점 적분 시에 안정화 항을 추가한 경우(Δ)와 추가하지 않은 경우(\square) 본 논문에서 제안한 수정 절점 적분 방법(\times) 기존의 적분법을 이용한 RKPM 에 의한 결과(\circ)와 엄밀해($*$)를 도시한 것이다. 그림에 보이는 바와 같이 안정화를 추가하지 않은 기존의 절점방법의 경우를 제외하고 모두 엄밀해와 유사한 결과를 얻을 수 있다.

또한 Beissel 등⁽⁹⁾은 이와 같은 예제의 경우 선형기저를 이용하여 계산을 하거나 영향영역을 크게 하는 경우 진동현상이 나타나지 않는다고 보고하였다. 따라서 안정화 항은 일부 이러한 진동현상이 나타나는 부분에서 억제 시키는 역할을 하고 있음을 알 수 있으며 본 논문에서 제안한 방법으로도 동일한 효과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.



Fig. 5 Irregular nodal distributions and nodal area shapes in 1D bar problem

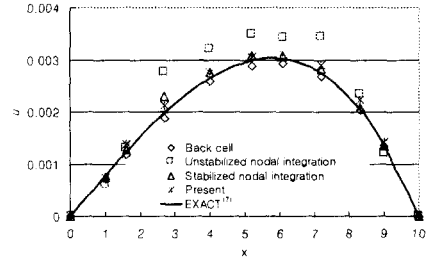


Fig. 6 Nodal displacements in 1-D bar problem with irregular node distributions

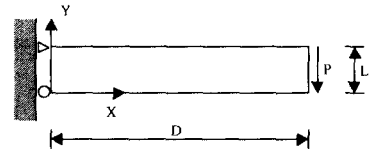


Fig. 7 Cantilever plane under end traction

같은 예제에서 절점 분포를 불규칙하게하여 수치 실험하였다. Fig. 5 는 해석에 사용된 절점 분포와 절점 영역의 범위를 원의 형태로 표시하여 나타낸 그림이다.

수치 실험 결과는 Fig. 6 에 도시하였다. Fig. 6 에서 알 수 있듯이 절점 적분을 이용한 경우, 안정화 항을 추가한 것과 유사한 효과를 보이며 제안한 방법으로 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

5.2 외팔보 문제

Fig. 7 은 2 차원 문제의 수치 실험으로 끝단에 트렉션을 받고 있는 외팔보 문제를 나타낸 것이다.

Fig. 8(a)는 15 개의 절점으로 구성된 해석 모델의 절점 분포이며 Fig. 8(b),(c),(d)는 논문에서 비교하고 있는 적분 방법들에서 적분 영역의 차이를 보이는 그림이다.

Fig. 8(b)는 기존의 절점적분 방법으로써 사각형 형태의 격자는 절점영역의 형태를 해석 영역으로 나누어 그린것이다. 절점분포가 일정한 경우 이와 같은 형태로 표현할 수 있으나 절점이 불규칙한 경우에는 어떠한 형태로 이루어지는지 정확히 알 수는 없다. 이 그림으로부터 각 절점에 해당하는

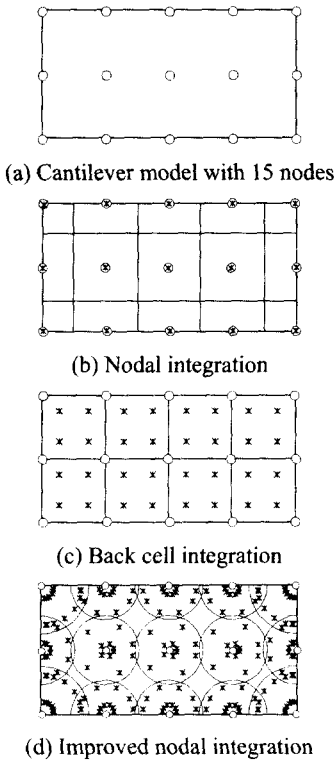


Fig. 8 Regular nodes and integration parts in the cantilever model (*:integration points, O:nodes)

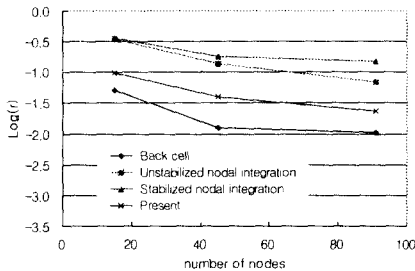


Fig. 9 Comparison of relative error norms in the cantilever model with regular node distributions

위치에 사실상 1 포인트적분을 하는 경우와 유사하다고 할 수 있으며 이러한 적분방법으로 인해 해의 신뢰성을 위해서는 많은 절점분포와 안정화항이 필요하게 된다. (c)는 보통 무요소법에서 사용하는 적분 방법으로 적분 셀을 이용한다는 단점 이외에는 가장 안정적인 해를 준다. (d)는 본 논문에서 사용한 방법으로 (c)와 같이 적분 셀을 미리 형성하지 않고도 절점의 정보만으로 (c)와 같은 결과를 얻기 위해 만든 방법이다.

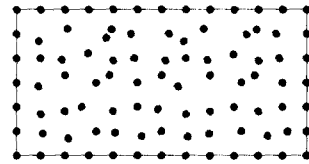
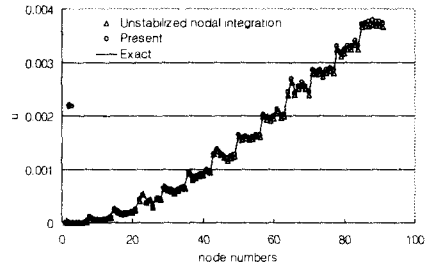
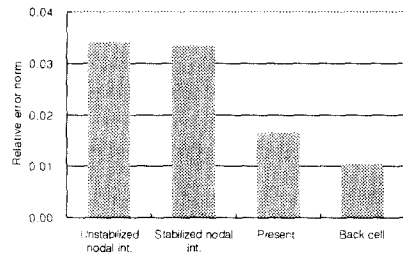


Fig. 10 Cantilever plane model with irregular node distributions



(a) Displacements



(b) Relative error norms

Fig. 11 Comparison of displacements and relative error norms according to the irregular node distributions in the cantilever model

이 방법은 절점에 해당되는 절점 영역의 값을 원으로 치환한 상태에서 적분점을 잡아 해석하는 방법으로 적분셀의 설정이 필요 없음을 알 수 있다. 이렇게 적분을 하면 해석해의 값은 (a)방법보다는 정확하면서 (c)의 방법에 근사한 값을 얻게 된다. 다만, 원의 형태로 나누어 지면서 빈구역이 생기게 되나 이것에 대한 영역값은 겹쳐지게 되는 영역으로 대처되며 해석과정에서는 (a)방법과 동일한 영역 값으로 계산되어지게 된다. 물론 이렇게 빈 구역이 크게 나타나게 되면 결과에는 좋지 않은 영향을 미치게 되나 초기의 절점만을 가지고 가중계수를 이용하는 경우에 이러한 것은 기존의 방법으로도 대처할 수 없다. 따라서 해의 신뢰성에 도움을 주기 위해서는 두 경우 모두 절점의 분포를 가능한 규칙적으로 혹은 간격을 적절하게 해주는 것이 좋다.

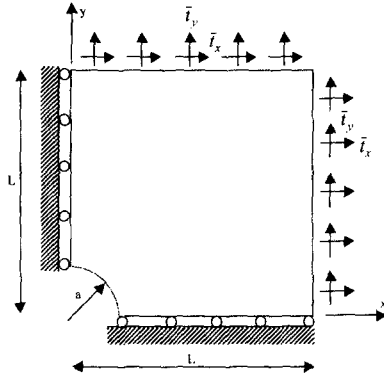


Fig. 12 A finite quarter plane with a circular hole at center

Fig. 9는 절점의 분포가 규칙적인 외팔보 모델의 수치실험 결과이다. 절점 변위 L_2 놈의 상대 오차를 절점수에 따라 비교하여 나타내었다. 논문에서 제안한 방법이 기존의 안정항을 추가한 절점 적분에 비해서 적분 셀을 이용한 방법에 근사한 결과를 보임으로써 정확도가 향상되었음을 알 수 있다.

절점이 불규칙하게 분포될 경우에 해에 미치는 영향을 검토하기 위하여 같은 문제를 Fig. 10과 같이 모델링하여 수치실험을 하였다. Fig. 10은 절점의 수 91개를 임의로 뿌려놓은 모델이다.

해석 결과는 Fig. 11에 도시하였다. Fig. 11(a)는 각 절점의 변위를 기존의 절점 적분에 의한 결과와 논문에서 제안한 방법의 결과를 정해와 비교하여 나타낸 것이다.

이 문제에서는 안정화 항을 추가한 결과와 추가하지 않은 결과가 거의 같으므로 Fig. 11(b)에 L_2 놈의 상대오차를 이용하여 막대그래프로 나타내었다. 역시 적분셀을 이용한 결과가 가장 좋은 것을 알 수 있으며 본 논문에서 제안한 방법은 안정항을 이용하는 기존의 방법에 비하여 정확한 결과를 보임을 알 수 있다.

5.3 원형홀이 있는 무한 평판 문제

다른 2차원 탄성체로 Fig. 12에 보인 중앙에 원형 구멍을 갖는 유한 평판의 인장 문제를 수치실험 하였다.

이 평판문제는 x 방향 인장력 T_x 를 받는 무한 평판 문제와 동일한 해를 얻기 위하여 Fig. 12와 같은 유한 평판의 응력해로 식 (36~38)의 정해⁽⁹⁾가 알려져 있으며 이를 이용하여 평판의 트래션 경계 조건으로 부여하였다.

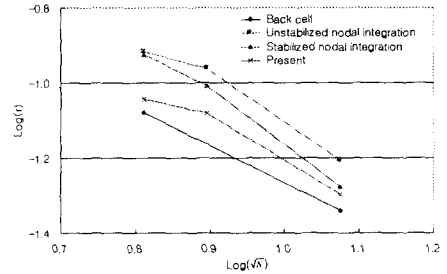


Fig. 13 Comparison of relative error norms for the plane model with a circular hole

$$\sigma_{xx} = T_x \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\} \quad (36)$$

$$\sigma_{yy} = -T_x \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\} \quad (37)$$

$$\sigma_{xy} = -T_x \left\{ \frac{a^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right] - \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right\} \quad (38)$$

Fig. 13은 해석 결과의 상대 오차를 절점수에 따라 비교하여 나타낸 것이다. 모두 절점수의 증가에 따라서 수렴되는 결과를 보여주고 있으며 논문에서 제안한 방법이 적분 셀을 이용하는 경우에 비해서는 값이 떨어지고 있으나 기존의 절점 적분 방법에 비해서 향상됨을 알 수 있다.

6. 결론

대부분의 무요소법에서 수치 적분을 위해 사용하고 있는 적분 셀의 불편함과 이것이 해에 미치는 영향 등을 없애기 위해서 절점만으로 수치계산이 이루어지는 절점 적분 방법을 연구하였다. 간단히 초기 절점에 대한 정보만으로 모든 해석이 이루어질 수 있도록 하기 위해 기존의 절점 가중 계수를 이용하여 이를 원의 형태로 치환하고 이들 영역에 대하여 가우스-르장드르 적분을 수행하여 절점 적분의 특성을 향상시키는 방법을 제안하였다. 제안한 수정 절점 적분 방법의 타당성과 그 특성을 규명하기 위하여 몇 가지 탄성 문제를 수치 실험하였으며 그 결과를 검토하여 다음 결론을 얻었다.

(1) 제안한 절점 적분 방법을 사용하면 적분 셀을 구성할 필요가 없기 때문에 무요소법에 의한 해석을 편리하게 한다.

(2) 잔류항을 이용하는 기존의 절점 적분 방법

에 비해 정확도를 크게 향상 시킬 수 있으며 안정성을 위해 추가되었던 안정항을 배제하여 간단한 수식화와 일관성 있는 해를 얻을 수 있다.

(3) 제안한 절점 적분 방법에서는 경계부분에서의 영역 적분처리를 간단히 자동화 할 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 핵심전문연구과제(과제번호: 981-1012-072-2)의 지원 하에 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Monaghan J. J., 1988, "An Introduction to SPH," *Computer Physics Communications*, Vol. 48, pp. 89-96.
- (2) Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L., 1994, "Element Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256.
- (3) Liu W. K., Jun S. and Zhang Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081-1106.
- (4) Duarte C. A., Oden J. T., 1996, "An h-p Adaptive Method Using Clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 237-262.
- (5) Belytschko T., Tabbara M., 1996, "Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923-938.
- (6) Liu W. K., Jun S., Li S., Adee J. and Belytschko T., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 1655-1679.
- (7) Liu W. K., Chen Y., Jun S., Chen J. S., Belytschko T., Pan C., Uras R.A. and Chang T., 1996, "Overview and Applications of the Reproducing Kernel Particle Methods," *Archives of computational Methods in Engineering: State of the art reviews*, Vol. 3, pp. 3-80.
- (8) Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., 1996, "Meshless Methods : An Overview and Recent Developments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3-47.
- (9) Beissel S., Belytschko T., 1996, "Nodal integration of the element-free Galerkin method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 49-74.
- (10) Dyka, C. T., Randles, P. W., Ingell, R. P., 1997, "Stress Points for Tension Instability in SPH," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 2325-2341.
- (11) Bonet, J., S. Kulasegaram, 2000, "Finite increment gradient stabilization of point integrated meshless methods for elliptic equations," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Volume 16, pp. 475-483.
- (12) Atluri, S. N., Zhu, T., 2000, "Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics," *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 169-179.
- (13) Atluri, S. N., Cho, J. Y., Kim, H. G., 1999, Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations," *Computational Mechanics*, Vol. 24, pp. 334-347
- (14) De, S., Bathe, K. J., 2000, "Method of finite spheres," *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 329-345.
- (15) Toshio Nagashima, 1999, "Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 341-385.
- (16) Belytschko T, Yong Guo, Wing Kam Liu and Ping Xiao, 2000, "Unified stability analysis of meshless particle methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, pp. 1359-1400.
- (17) 석병호, 임장근, 1998, "갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성," 대한기계학회 '98년도 추계학술대회논문집, pp. 396-401.
- (18) 석병호, 송태한, 임장근, 2000, "EFGM 에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법," 대한기계학회 논문집, pp. 803-809.