

한 개의 선형 여유센서를 갖는 스튜어트 플랫폼의 실시간 순기구학

이태영* · 심재경†

(2001년 1월 4일 접수, 2001년 6월 26일 심사완료)

Real-Time Forward Kinematics of the 6-6 Stewart Platform with One Extra Linear Sensor

Tae-Young Lee and Jae-Kyung Shim

Key Words : Stewart Platform(스튜어트 플랫폼), Forward Kinematics(순기구학), Extra Sensor(여유센서), Algebraic Elimination(대수적 소거법), Determinant(행렬식),

Abstract

This paper deals with the forward kinematics of the 6-6 Stewart platform of planar base and moving platform using one extra linear sensor. Based on algebraic elimination method, it first derives an 8th-degree univariate equation and then finds tentative solution sets out of which the actual solution is to be selected. In order to provide more exact solution despite the error between measured sensor value and the theoretic al one, a correction method is also used in this paper. The overall procedure requires so little computation time that it can be efficiently used for real-time applications. In addition, unlike the iterative scheme e.g. Newton-Raphson, the algorithm does not require initial estimates of solution and is free of the problems that it does not converge to actual solution within limited time. The presented method has been implemented in C language and a numerical example is given to confirm the effectiveness and accuracy of the developed algorithm.

1. 서론

6자유도 병렬형 기구인 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석은 다리의 길이가 지정되어 있을 때, 이동 플랫폼의 위치와 방향을 구하는 문제로서, 필요한 기구학적 조건이 직렬기구의 경우에 비해 더욱 많은 해를 가질 수 있는 고차의 비선형 연립식으로 나타나게 되므로 그 해법이 쉽지 않은 것으로 알려져 있다. 이러한 문제에 대해 뉴턴-랩슨법과 같은 수치적 반복법의 적용이 가능하나, 현재의 플랫폼 형상에 충분히 가까운 인자들을 그 초기값으로 사용해야만 효과적으로 사용될 수 있을 뿐 아니라, 이론적으로는 실제 해로의 수렴이 보장되지 않으며, 때때로 실제 형상을 나타내는 인자 값으로부터 멀어져 다른 해로 수렴하기도 한다.

이러한 문제가 발생하지 않는 하나의 접근 방법으로서 순기구학식이 가지는 모든 해를 구한

후 가장 적절한 실제 해를 선택하는 방법을 들 수 있다. 일단 모든 해를 구한 후에는, 기구의 초기 조립 모드(assembly mode) 혹은 해석의 바로 이전 단계에서의 기구형상을 고려하면, 현재 형상에 해당하는 실제 해를 선택하는 것은 그리 어려운 과정이 아니라고 할 수 있다. 반면에, 모든 해를 구하는 과정은 매우 복잡한데, 이러한 문제에 대해 잘 알려진 방법으로는 대수적 소거법⁽¹⁾을 들 수 있다. 이는 다양한 수치법에 의해 한 개의 미지수를 갖는 비선형 다항식의 모든 해를 구하는 것이 어렵지 않다는 사실에 근거하여, 처음에 주어진 비선형 연립다항식을 소거과정을 통해 한 개의 미지수를 갖는 단일 다항식으로 유도하는 과정을 거치게 된다.

이러한 소거법은 지금까지 다양한 형태와 배치를 갖는 스튜어트 플랫폼의 순기구학에 적용되어 왔다. Innocenti와 Parenti-Castelli^(2,3)는 6-3형태에 대해 16차, 5-5 형태에 대해서는 40차의 단일다항식을 각각 유도하였다. Innocenti⁽⁴⁾는 6-4 형태가 복소영역에서 32개의 순기구학 해를 가질 수 있음을 발견했고, Nielson과 Roth⁽⁵⁾는 6-5 형태에 대해 유도된 단일 다항식을 인수분해 하여 40차의 식을 구하였다.

* 회원, 고려대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 고려대학교 기계공학과

E-mail : jkshim@korea.ac.kr

TEL : (02)3290-3362 FAX : (02)926-9290

베이스와 이동 플랫폼이 모두 평면 형상인 경우에 대해서는, Lin 등^(6,7)이 4-4와 4-5 형태를, Chen과 Song⁽⁸⁾이 4-6 형태에 소거법을 적용하였다. 평면 형상의 범위 내에서 가장 일반적인 기하 형상을 보이는 6-6 형태는 Wen과 Liang,⁽⁹⁾ Zhang과 Song⁽¹⁰⁾에 의해 독립적으로 연구되었다.

일반적인 형상으로서 순기구학이 가장 어려운 6-6 형태의 스튜어트 플랫폼에 대해, Husty⁽¹¹⁾는 320차의 중간단계의 다항식으로부터, Innocenti⁽¹²⁾는 2개의 56차의 다항식으로부터 각각 40차의 단일 다항식을 유도하였다. Dhingra 등⁽¹³⁾은 Gröbner-Sylvester 혼합법을 통해 계산된 68개의 Gröbner 베이스로 구성된 Sylvester 행렬로부터 40차의 다항식을 구하였다.

그러나 언급된 논문에서 제시된 소거법에 의한 방법만으로는 많은 계산량 등으로 인해 실시간 해석에 효과적으로 사용되기는 어렵다. 계산 시간을 단축하는 동시에 실제의 유일해만을 얻기 위한 방법으로 여유 센서를 사용하는 것을 들 수 있다. 즉, 위치해석에 기본적으로 필요한 6개의 액추에이터 길이센서 외에 센서를 추가하여, 순기구학식을 초과구속(over-constrained) 함으로써 소거과정을 단순화함과 동시에 단 한 개의 해를 가지도록 하는 방법이다.

Merlet⁽¹⁴⁾은 가장 일반적인 형태의 스튜어트 플랫폼에 대해 4개의 여유센서를 설치함으로써 실시간 폐쇄형(closed-form) 해를 얻을 수 있음을 밝혔다. Parenti-Castelli와 Di Gregorio⁽¹⁵⁾는 한 개의 여유센서만을 이용하여 그 해를 구하였으나 이는 실시간 해석을 위한 것은 아니었으며, 후에 두개의 회전 센서를 사용한 실시간 해석 방법⁽¹⁶⁾을 소개하였다. Innocenti⁽¹⁷⁾는 1개의 선형 센서를 사용하여 비선형 연립다항식으로부터 146개의 선형식을 구성하여, 이로부터 유일해를 구하였고, Lee와 Shim⁽¹⁸⁾은 1개의 회전 센서를 이용한 실시간 해석법을 제시하였다.

본 논문에서 다루게 될 평면 형상의 베이스와 이동 플랫폼의 경우에 대해서는 Jin과 Hai-rong⁽¹⁹⁾이 1개의 선형센서를 추가 함으로써 형성된 20개의 선형식의 해를 구하는 방법을 제시하였다. 그러나 이 방법은, 센서의 한쪽 끝이 액추에이터의 구조인트의 중심과 일치해야 한다는 설치상 불리한 조건을 가지며, 초과구속 연립 다항식의 해가 두개 이상 존재하는 경우에는 적용될 수 없다는 단점을 가진다. 본 논문의 목적은 이와 같은 형태의 스튜어트 플랫폼이 가지는 1개의 선형 여유센서의 양쪽 끝단이 베이스와 이동 플랫폼의 평면상의 임의의 위치에 각각 설치 가능할 경우에 대해 실시간으로 유일해를 찾는 방법을 제시하는 것이다. 이는 먼저 초과구속된 순기구학식으로부터 한 개의 미지수를 가지는 8차의 단일 비선형 다항식을

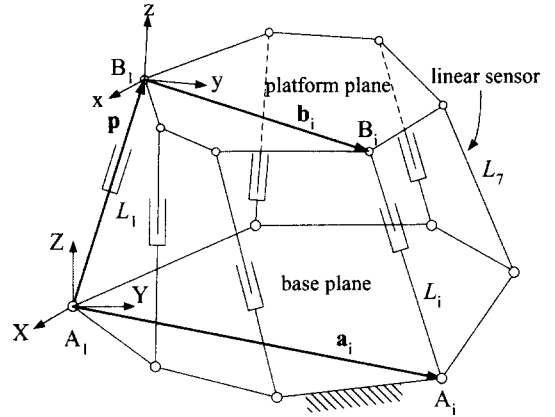


Fig. 1 The 6-6 Stewart platform

유도하여 그 식의 각각의 해에 대응하는 잠정적인 해들을 구한 후, 초과구속식의 실제해에 대해서만 성립되는 식에 대입함으로써 그 유일해를 구한다. 또한 선형 센서의 측정값이 이론적인 값과 정확히 일치하지 않을 때, 측정값을 이론값에 접근하는 방향으로 수정함으로써 좀 더 정확한 해를 얻기 위한 방법을 제시하였다. 전체과정을 C언어로 구현하였으며, 수치예제를 통해 제시된 방법이 이론적인 센서값에 대해 정확한 해석값을 가짐을 보였으며, 측정값에 오차가 존재하는 경우에 대해 측정값 수정과정 전후의 결과값을 비교하였다.

2. 순기구학식

Fig. 1은 본 논문에서 다루게 될 스튜어트 플랫폼의 기구학적 모델로서, 베이스와 이동 플랫폼의 모든 조인트와 여유센서의 양끝은 각 평면상에 설치되어 있다. 이동 플랫폼의 위치와 방향을 유일하게 결정하기 위한 입력값은 각각의 선형 액추에이터에 의해 제어되는 6개의 다리의 길이와 선형 센서에 의해 측정된 한 개의 값이다.

해석의 편의상 X-Y-Z 좌표의 원점은 위치 A_1 과 일치하며, Z-축은 베이스 평면에 수직을 이루며 위를 향하게 두었다. 마찬가지로, x-y-z축의 원점은 B_1 과 일치하며, z-축은 이동 플랫폼의 평면에 수직을 이룬다. 벡터 $a_i(i=1, \dots, 7)$ 는 X-Y-Z좌표에서 A_i 의 위치를 나타내며, $b_i(i=1, \dots, 7)$ 는 x-y-z좌표에서 B_i 의 위치를 나타낸다. a_7 와 b_7 는 여유센서의 양쪽 끝의 위치를 나타내며, a_i 와 $b_i(i=1, \dots, 7)$ 의 z-값은 모두 0이다. 위치벡터 p 는 X-Y-Z좌표에 대한 x-y-z좌표의 원점의 위치를 나타낸다. 고정된 다리의 길이 $L_i(i=1, \dots, 6)$ 와 센서의 측정값 L_7 에 대한 기구학적 구속식은 다음과 같다.

$$(\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{R}\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) = L_i^2, \quad i = 2, \dots, 7 \quad (1)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = L_1^2 \quad (2)$$

여기서 \mathbf{R} 은 회전행렬로서, Cayley의 식⁽²⁰⁾에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{C}) \quad (3)$$

여기서 \mathbf{I} 는 3x3 크기의 단위 행렬이고, \mathbf{C} 는 같은 크기를 갖는 임의의 반대칭(skew symmetric) 행렬로서 가장 간단한 형태는 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (3)에 대입하면

$$\mathbf{R} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 1+c_1^2-c_2^2-c_3^2 & 2(c_1c_2-c_3) & 2(c_3c_1+c_2) \\ 2(c_2c_1+c_3) & 1-c_1^2+c_2^2-c_3^2 & 2(c_2c_3-c_1) \\ 2(c_3c_1-c_2) & 2(c_3c_2+c_1) & 1-c_1^2-c_2^2+c_3^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

이 되며, 여기서 $\Delta = 1+c_1^2+c_2^2+c_3^2$ 이다. 식 (1)을 전개한 후, 식 (2)를 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$-2\mathbf{a}_i^T \mathbf{p} + 2\mathbf{b}_i^T \mathbf{R}^T \mathbf{p} - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{R}\mathbf{b}_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i - L_i^2 + L_1^2 = 0, \quad i = 2, \dots, 7 \quad (6)$$

회전 인자들을 벡터 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]^T$ 로 나타내면, 식 (2)와 (6)은 미지벡터 \mathbf{p} 와 \mathbf{c} 를 포함하게 되며 이러한 값들이 이동 플랫폼의 위치와 방향을 나타내기 위해 결정되어야 하는 값이다.

3. 소거와 해의 유도 과정

3.1 순기구학식의 수정

효율적인 소거를 위해 다음의 관계를 가지는 위치벡터 \mathbf{q} 를 도입한다.

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}^T \mathbf{p} \quad (7)$$

식 (7)에 의해 식 (6)은 양변을 2로 나눈 후 다음과 같이 정리 될 수 있다.

$$-\mathbf{a}_i^T \mathbf{p} + \mathbf{b}_i^T \mathbf{q} - \mathbf{a}_i^T \mathbf{R}\mathbf{b}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i - L_i^2 + L_1^2) = 0, \quad i = 2, \dots, 7 \quad (8)$$

식 (3)과 (7)로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{p} - (\mathbf{I} + \mathbf{C})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$, $\mathbf{q} = [q_x, q_y, q_z]^T$ 로 두면 식 (9)는 다음과 같은 스칼라 식으로 나타낼 수 있다.

$$p_x + c_3 p_y - c_2 p_z - q_x + c_3 q_y - c_2 q_z = 0 \quad (10)$$

$$-c_3 p_x + p_y + c_1 p_z - c_3 q_x - q_y + c_1 q_z = 0 \quad (11)$$

$$c_2 p_x - c_1 p_y + p_z + c_2 q_x - c_1 q_y - q_z = 0 \quad (12)$$

이로서 10개의 식 (2), (8), (10)-(12)로부터 결정되어야 하는 미지 벡터는 위치벡터 \mathbf{p} 와 \mathbf{q} , 회전 인자 벡터 \mathbf{c} 가 된다. 미지수의 수가 9개이므로 상기의 10개의 식은 초과구속 되었음을 알 수 있다.

3.2 c_1, c_2, c_3 만으로 이루어진 식의 유도

식 (8)을 행렬형태로 정리하면 다음과 같은 2개의 선형식을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{M}_i \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -a_{2x} & -a_{2y} & b_{2x} & b_{2y} & F_2 \\ -a_{3x} & -a_{3y} & b_{3x} & b_{3y} & F_3 \\ -a_{4x} & -a_{4y} & b_{4x} & b_{4y} & F_4 \\ -a_{5x} & -a_{5y} & b_{5x} & b_{5y} & F_5 \\ -a_{ix} & -a_{iy} & b_{ix} & b_{iy} & F_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad i = 6, 7 \quad (13)$$

여기서

$$F_i = -\mathbf{a}_i^T \mathbf{R}\mathbf{b}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i - L_i^2 + L_1^2), \quad i = 2, \dots, 7 \quad (14)$$

이고 $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}, 0]$, $\mathbf{b}_i = [b_{ix}, b_{iy}, 0]$ ($i=2, \dots, 7$) 이다. 식 (13)의 2개의 선형식의 미지값에 해당하는 p_x, p_y, q_x, q_y 이 해를 갖기 위해서는 다음의 관계가 성립해야 한다.

$$\det(\mathbf{M}_i) = 0, \quad i = 6, 7 \quad (15)$$

(15)의 조건에 의해 다음의 2개의 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_i(c_1, c_2, c_3) \equiv g_{i1} + g_{i2} c_3 + g_{i3} c_3^2 + g_{i4} c_1^2 + g_{i5} c_1 c_2 + g_{i6} c_2^2 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

여기서 g_{ij} ($i=1, 2, j=1, \dots, 6$)는 입력값에 의해서 결정되는 실계수이다.

식 (10) × c_1 과 식 (11) × c_2 를 더하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$(c_1 - c_2 c_3) p_x + (c_2 + c_1 c_3) p_y - (c_1 + c_2 c_3) q_x - (c_2 - c_1 c_3) q_y = 0 \quad (17)$$

$$\Phi'_3(c_1, c_2, c_3) \equiv U_1 c_1 + U_2 c_2 \quad (24)$$

여기서

$$U_i(c_3) = \sum_{j=0}^3 u_{ij} c_3^j, \quad i=1,2 \quad (25)$$

식 (17)을 이용하여 식 (13)의 마지막 행을 교체하면, 다음과 같은 또 한 개의 선형식을 만들 수 있다.

이고 u_{ij} 는 입력값에 의해서 결정되는 실계수이다.

$$\mathbf{M}'\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -a_{2x} & -a_{2y} & b_{2x} & b_{2y} & F_2 \\ -a_{3x} & -a_{3y} & b_{3x} & b_{3y} & F_3 \\ -a_{4x} & -a_{4y} & b_{4x} & b_{4y} & F_4 \\ -a_{5x} & -a_{5y} & b_{5x} & b_{5y} & F_5 \\ c_1 - c_2 c_3 & c_2 + c_1 c_3 & -c_1 - c_2 c_3 & -c_2 + c_1 c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (18)$$

3.3 c_3 만으로 이루어진 단일다항식의 유도
 c_3 만을 미지수로 갖는 단일다항식을 얻기 위해 4 개의 식 $\Phi_1, \Phi_2, \Phi'_3 \times c_1, \Phi'_3 \times c_2$ 로부터 다음의 선형식을 구성할 수 있다.

마찬가지로 식 (18)이 해를 갖기 위해 다음이 성립해야 한다.

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} G_1 & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ G_2 & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ 0 & U_1 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1^2 \\ c_1 c_2 \\ c_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\det(\mathbf{M}') = 0 \quad (19)$$

여기서 G_i 와 U_i ($i=1,2$)는 식 (22)와 (24)에 주어져 있다. 여기에 해가 존재하기 위한 다음의 조건

(19)의 조건에 의해 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_3(c_1, c_2, c_3) \equiv T_1 c_1 + T_2 c_2 + \sum_{j=0}^3 T_{3j} c_1^{3-j} c_2^j = 0 \quad \det(\mathbf{Q}) = 0 \quad (27)$$

여기서

을 적용하면, 다음과 같은 c_3 에 대한 8차의 다항식이 유도 된다.

$$T_i(c_3) = \sum_{k=0}^3 t_{i,k} c_3^k, \quad i=1,2 \quad (28)$$

$$T_{3j}(c_3) = \sum_{k=0}^1 t_{3,j,k} c_3^k, \quad j=0, \dots, 3$$

이고, 아래 첨자가 있는 모든 t 는 입력값에 의해 결정되는 실계수이다. $\Phi_1 \times c_1, \Phi_2 \times c_1, \Phi_1 \times c_2, \Phi_2 \times c_2$ 와 Φ_3 의 5개의 식을 행렬 형태의 선형식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{i=0}^8 s_i c_3^i = 0 \quad (28)$$

여기서 s_i ($i=0, \dots, 8$)는 입력값에 의해 결정되는 실계수이다. 식 (28)을 풀면 복소범위에서 c_3 에 대한 8개의 잠정적인 해 c_{3i} ($i=1, \dots, 8$)를 얻을 수 있다.

3.4 역대입에 의한 c_1, c_2 와 \mathbf{p} 값의 계산

각각의 c_{3i} 에 대응하는 나머지 회전 인자들의 값을 구하기 위해, 우선 식 (26)의 계수행렬 \mathbf{Q} 의 부분행렬로 구성된 다음의 선형식의 해를 구한다.

$$\mathbf{N}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} G_1 c_1 & g_{14} & g_{15} & g_{16} & 0 \\ G_2 c_1 & g_{24} & g_{25} & g_{26} & 0 \\ G_1 c_2 & 0 & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ G_2 c_2 & 0 & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ T_1 c_1 + T_2 c_2 & T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1^2 \\ c_1 c_2 \\ c_2^2 \\ c_2^3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} G_1 & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ G_2 & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ 0 & U_1 & U_2 & 0 \end{bmatrix}_{c_3=c_{3i}} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1^2 \\ c_1 c_2 \\ c_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (29)$$

여기서 $G_i = g_1 + g_2 c_3 + g_3 c_3^2$ 이다. 식 (22)가 해를 가지려면 다음이 성립해야 한다.

식 (29)로부터 $c_1^2, c_1 c_2, c_2^2$ 의 값에 해당하는 $(c_1^2)_i, (c_1 c_2)_i, (c_2^2)_i$ ($i=1, \dots, 8$)를 구할 수 있다. 이들 값으로부터 c_1 과 c_2 의 값인 c_{1i} 과 c_{2i} 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\det(\mathbf{N}) = 0 \quad (23)$$

조건 (23)에 의해 형성되는 식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \text{if } (c_1^2)_i \neq 0: & c_{1i} = \pm\sqrt{(c_1^2)_i}, \quad c_{2i} = \frac{(c_1 c_2)_i}{c_{1i}} \\ \text{if } (c_1^2)_i = 0: & c_{1i} = 0, \quad c_{2i} = \pm\sqrt{(c_2^2)_i} \end{cases} \quad (30)$$

식 (30)에서 보듯이 각각의 c_{3i} 에 대해 잠정적인 c_1 과 c_2 의 해는 두 쌍이 존재한다. 즉, $c_i = [c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}]$ 이 식 (29)의 해이면, $\tilde{c}_i = [-c_{1i}, -c_{2i}, c_{3i}]$ 역시 해가 된다. 위치벡터 \mathbf{p} 의 성분 중 p_x 와 p_y 의 값인 p_{xi} 와 p_{yi} 은 식 (18)에 의한 다음식에 의해 계산될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -a_{2x} & -a_{2y} & b_{2x} & b_{2y} & F_2 \\ -a_{3x} & -a_{3y} & b_{3x} & b_{3y} & F_3 \\ -a_{4x} & -a_{4y} & b_{4x} & b_{4y} & F_4 \\ -a_{5x} & -a_{5y} & b_{5x} & b_{5y} & F_5 \end{bmatrix}_{c=c, or \tilde{c}} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (31)$$

p_z 에 해당하는 값은 다음에 의해 결정된다.

$$\begin{cases} \text{if } c_{1i} \neq 0: & \text{by Eq. (11) and (12)} \\ \text{if } c_{1i} = 0, c_{2i} \neq 0: & \text{by Eq. (10) and (12)} \end{cases} \quad (32)$$

$c_{1i}, c_{2i} = 0$ 인 경우의 p_z 값의 계산은 다음 절에 설명되어 있다. 식 (18)과 (32)에 의해 계산된 \mathbf{p} 값 역시 쌍을 이루게 되므로, 잠정적인 인자값들 역시 $[c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}]$ 와 $[-c_{1i}, -c_{2i}, c_{3i}, p_{xi}, p_{yi}, -p_{zi}]$ 의 쌍으로 나타난다. 이는 베이스 평면에 대하여 이동 플랫폼이 대칭형상을 가질 수 있기 때문이다.

3.5 실제해의 판별법

먼저, 본 문제는 실제 갖추어져 있는 기구의 해석으로서 그 해가 실수로 나타난다는 점을 고려하여, 8개의 $c_{3i}(i=1, \dots, 8)$ 값에서 오직 실수 만을 선택하고, 선택된 c_{3i} 에 대응하는, 식 (29)에 의한 나머지 인자들 중 $(c_1^2)_i \leq 0$ 또는 $(c_2^2)_i \leq 0$ 인 값은 같은 이유로 버린다.

다음으로 실제 스튜어트 플랫폼의 해석에 있어, 위치 벡터 \mathbf{p} 의 한 성분인 p_z 의 부호는 쉽게 예측할 수 있으므로 각 쌍의 잠정적인 해에서 1개씩만 선택될 수 있다. 실제해를 선택하기 위한 다음 단계의 기준으로는 지금까지 사용되지 않은 식 (2)를 사용한다. 이를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - L_1^2 = 0 \quad (33)$$

즉, 모든 잠정적인 해들 중 식 (33)을 가장 잘 만족하는 해를 택하면 쉽게 실제해를 얻을 수 있다.

식 (29)로부터 $c_{1i}, c_{2i} = 0$ 가 된 경우는 식 (32)에 포함되지 않는 경우로서 별도의 판정기준을

적용한다. $c_{1i}, c_{2i} = 0$ 가 실제해인 경우를 살펴보면 c_{3i} 의 값이 3중근이 된다는 것을 발견할 수 있다. 그러므로 이러한 경우에 우선 c_{3i} 가 3중근이 아니면 해를 무시하고, 3중근이라면 이를 실제해로 선택하고 식 (31)의 해를 식 (33)에 대입하여 적절한 부호를 갖는 p_{zi} 를 선택함으로써 실제해를 구한다.

3.6 측정값의 수정

여유센서로 인해 초과구속된 순기구학의 문제에서 정확한 해를 얻기 위해 가장 중요한 것은 추가 센서의 정밀도와 정확도이다. 즉, 주어진 6개의 액추에이터 길이에 의해 형성되는 현재의 형상으로부터 측정된 센서데이터가 오차를 포함하고 있으면 정확한 해를 얻을 수 없다. 또한 센서자체의 성능이 아무리 우수하다 할 지라도 기구자체의 공차와 처짐 등으로 인해 이론적인 센서값과 측정된 값 사이에는 오차가 존재할 수밖에 없으며, 센서값에 있어서의 이러한 미세한 오차에 대해 그 결과값이 민감할 수 있으므로 좀더 정확한 해를 얻기 위해서는 초과구속 연립 다항식의 모순성(inconsistency)이 줄어드는 방향으로 센서값을 수정할 필요가 있다. 본 논문에서는 $c_{1i}, c_{2i} = 0$ 를 제외한 경우에 적용 가능한 방법을 다루는데, 실제로 $c_{1i}, c_{2i} = 0$ 의 경우는 입력 데이터의 유효 숫자 한계 등으로 인해 거의 발생하지 않는다.

이론적인 센서값 L_7 에 대한 \mathbf{p} 와 \mathbf{c} 의 해를 $\mathbf{p}_0, \mathbf{c}_0$ 라고 하고, 실제 측정값 \bar{L}_7 에 대한 해를 $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{c}}$ 라고 할 때, 다음과 같은 함수를 정의한다.

$$D(\bar{L}_7) = \bar{L}_7 - L_7^2 \quad (34)$$

여기서 L_7 은 첫번째 액추에이터 길이에 대한 입력값이고, \bar{L}_7^2 은 $\bar{\mathbf{p}}$ 에 의해 다음과 같이 계산된 값이다.

$$\bar{L}_7^2 = \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{p}} \quad (35)$$

만일 $\bar{L}_7 = L_7$ 이라면 $D(\bar{L}_7) = D(L_7) = 0$ 이 된다. 그러나 만일 실제 측정데이터 \bar{L}_7 이 오차를 포함하고 있으면 $D(\bar{L}_7) \neq 0$ 이 되며 미소변위에서 $(\bar{L}_7 - L_7)$ 에 대략 선형적인 비례관계를 보이므로, 식 (34)와 같이 \bar{L}_7 의 함수로 표현될 수 있다. 측정데이터 \bar{L}_7 에서 \bar{L}_7 에 대한 $D(\bar{L}_7)$ 의 변화율을 알아보기 위해 미소변경을 가한 $\bar{L}_7' = \bar{L}_7 + \epsilon$ 을 측정데이터로 가정하고 그에 대응하는 해 $\bar{\mathbf{p}}', \bar{\mathbf{c}}'$ 를 구한 후, $D(\bar{L}_7')$ 를 구한다. 이를 바탕으로 선형성에 근거하여 $D(\bar{L}_7^*) = 0$ 이 되기 위한 \bar{L}_7^* 을 다음과 같이 근사적으로 예측할 수 있다.

Table 1 Input data for example 1

i	\mathbf{a}_i	\mathbf{b}_i	L_i
1	$[0, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$	10.2469507659596
2	$[6, 0, 0]^T$	$[4, 0, 0]^T$	13.9880901722382
3	$[6, 3, 0]^T$	$[5, 2, 0]^T$	15.4811713596442
4	$[5, 6, 0]^T$	$[4, 5, 0]^T$	17.2568826848884
5	$[0, 6, 0]^T$	$[1, 5, 0]^T$	15.6268998844940
6	$[-2, 4, 0]^T$	$[-1, 2, 0]^T$	17.2568826848884
7	$[2, 3, 0]^T$	$[2, 2, 0]^T$	12.4418648119966

Table 2 Solutions of the univariate polynomial

i	c_{3i}
1	-0.884945990455167
2	1.38966565483335
3	-2.22097549463538
4	2.99999999999999
5, 6	-0.144234291873568 ± 2.13432456211199i
7, 8	-0.186494697895484 ± 1.03361396089361i

$$\bar{L}_7^* = \bar{L}_7 - \frac{D(\bar{L}_7)}{D(\bar{L}_7^*) - D(\bar{L}_7)} \times \varepsilon \quad (36)$$

이와 같이 계산된 \bar{L}_7^* 를 입력으로 \mathbf{p} 와 \mathbf{c} 의 해 $\bar{\mathbf{p}}^*$, $\bar{\mathbf{c}}^*$ 를 구하는 과정을 반복하면 이론적인 해 $\mathbf{p}_0, \mathbf{c}_0$ 에 매우 가까운 해를 얻을 수 있다.

4. 수치예제

수치예제에 사용될 스튜어트 플랫폼의 각 조인트의 위치와 입력값은 Table 1에 주어져 있다. 여기서 6개의 액추에이터의 길이와 1개의 측정값은 다음과 같이 미리 결정된 위치와 방향의 인자를 갖는 이동 플랫폼의 형상으로부터 계산된 값으로서, 결과값인 실제해 역시 다음의 값과 일치해야 한다.

$$\mathbf{p} = [1, 2, 10]^T, \quad \mathbf{c} = [1, 2, 3]^T.$$

제안된 과정에 의한 c_{3i} 의 8차 다항식의 8개의 해 $c_{3i}(i=1, \dots, 8)$ 는 Table 2와 같다. 다음은 역대입 과정을 거쳐 선택된 유일해의 결과값으로서 매우 정확함을 확인할 수 있다.

$$\mathbf{p}_0 = [0.999999999999936, 2.00000000000002, 10.0]^T, \\ \mathbf{c}_0 = [0.999999999999992, 2.00000000000003, 3.0]^T.$$

그러나 만일 측정값이 센서 자체오차와 기구의 변형 등으로 Table 1 의 이론적인 센서값 L_7 과 달리, $\bar{L}_7 = 12.47$ 으로 측정 되었다고 가정하면 그 결과 값은 다음과 같이 상당한 차이를 가진다.

$$\bar{\mathbf{p}} = [0.7739088, 2.1838937, 10.4470925]^T, \\ \bar{\mathbf{c}} = [0.8911307, 1.9387967, 2.6742798]^T.$$

$\bar{\mathbf{p}}$ 와 $\bar{\mathbf{c}}$ 를 식 (2)로부터 유도된 다음의 식에 대입하면 대입하여 $D(\bar{L}_7)$ 를 구하면

$$D(\bar{L}_7) = \bar{L}_7^2 - L_7^2 = \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{p}} - L_7^2 = 9.5100684 \quad (37)$$

이 된다. 수치미분을 위한 미소변경값을 \bar{L}_7 에 비해 충분히 작은 값 $\varepsilon = 0.001$ 로 두고, $\bar{L}_7^* = \bar{L}_7 + \varepsilon = 12.471$ 에 대한 해를 구해보면 $\bar{\mathbf{p}}^*, \bar{\mathbf{c}}^*$ 는

$$\bar{\mathbf{p}}^* = [0.7653878, 2.1900731, 10.4625566]^T, \\ \bar{\mathbf{c}}^* = [0.8877729, 1.9369748, 2.6639949]^T.$$

이 되며, 이로부터 $D(\bar{L}_7^*)$ 을 구해보면,

$$D(\bar{L}_7^*) = \bar{\mathbf{p}}^{*T} \bar{\mathbf{p}}^* - L_7^2 = 9.8473300 \quad (38)$$

이 된다. 식 (36)에 의해 수정된 센서값을 계산하면

$$\bar{L}_7^* = 12.47 - \frac{9.5100684 \times 0.001}{9.8473300 - 9.5100684} = 12.4418021 \quad (39)$$

으로서, 이론적인 값 $L_7 = 12.4418648$ 과의 차이가 매우 적음을 알 수 있으며, L_7^* 값에 대해 해를 구해보면 다음과 같이 $\mathbf{p}_0, \mathbf{c}_0$ 에 매우 근접한 해 $\bar{\mathbf{p}}^*, \bar{\mathbf{c}}^*$ 을 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{p}}^* = [1.0004747, 1.9995639, 9.9989645]^T, \\ \bar{\mathbf{c}}^* = [1.0002796, 2.0001608, 3.0008186]^T.$$

본 논문에서 제안된 전체 풀이과정은 C언어로 구현되었다. 일정한 선형센서의 측정값에 대한 실제해를 한 번 구하는데 PentiumII-350MHz 환경 하에서 대략 0.1msec의 계산시간이 소요되며, 수정과정을 적용하면 이와 같은 과정을 여러 번 반복해야 하며, 그 회수는 원하는 플랫폼 자세의 정밀도와 측정값의 오차의 크기에 따라 달라진다.

5. 결론

본 논문에서는 평면 베이스와 이동 플랫폼을 갖는 6-6 스텐트 플랫폼의 순기구학 문제에 대해, 한 개의 여유 센서를 이용하여 유일해를 실시간으로 구하는 방법을 제시하였다. 또한 선형센서의 이론적인 값과 실제 측정값과의 오차로 인해 발생할 수 있는 해의 부정확성을 방지하기 위한 센서값의 수정방법을 제시하였다.

참고문헌

- (1) Raghavan, M., and Roth, B., 1995, "Solving Polynomial Systems for the Kinematic Analysis and Synthesis of Mechanisms and Robot manipulator," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, pp. 71~79.
- (2) Innocenti, C., and Parenti-Castelli, V., 1990, "Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 25, No. 6, pp. 611~621.
- (3) Innocenti, C., and Parenti-Castelli, V., 1993, "Closed-Form Direct Position Analysis of a 5-5 Parallel Mechanism," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 515~522.
- (4) Innocenti, C., 1995, "Direct Kinematics in Analytical Form of the 6-4 Fully-Parallel Mechanism," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, pp. 89~95.
- (5) Nielson, J., and Roth, B., 1996, "The Direct Kinematics of the General 6-5 Stewart-Gough Mechanism," in *Recent Advances in Robot Kinematics*, Kluwer Academic Publishers pp. 7~16.
- (6) Lin, W., Griffis, M., and Duffy, J., 1992, "Forward Displacement Analyses of the 4-4 Stewart Platforms," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 444~450.
- (7) Lin, W., Crane, C., and Duffy, J., 1994, "Closed-Form Forward Displacement Analysis of the 4-5 In-Parallel Platforms," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, pp. 47~53.
- (8) Chen, N., and Song, S., 1994, "Direct Position Analysis of the 4-6 Stewart Platforms," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, pp. 61~66.
- (9) Wen, F., and Liang, C., 1994, "Displacement Analysis of the 6-6 Stewart Platform Mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 4, pp. 547~557.
- (10) Zhang, C., and Song, S., 1994 "Forward Position Analysis of Nearly General Stewart Platforms," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 116, pp. 54~60.
- (11) Husty, M. L., 1996, "An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, pp. 365~380.
- (12) Innocenti, C., 1998, "Forward Kinematics in Polynomial Form of the General Stewart Platform," *25th Biennial Mechanisms Conference*, Atlanta GA, Paper: DETC98/MECH-5894.
- (13) Dhingra, A., Almadi, A., and Kohli, D., 1998, "A Gröbner-Sylvester Hybrid Method for Closed-Form Displacement Analysis of Mechanisms," *25th Biennial Mechanisms Conference*, Atlanta GA, Paper: DETC98/MECH-5969.
- (14) Merlet, J. P., 1993, "Closed-Form Resolution of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators Using Extra Sensors Data," *Proc. IEEE Int. Robotics and Automation Conf.*, Atlanta, Georgia, pp. 200~204.
- (15) Parenti-Castelli, V., and Di Gregorio, R., 1995, "Determination of the Actual Configuration of the General Stewart Platform Using Only One Additional Displacement Sensor," *Proc. of the ASME Int. Mechanical Engineering Congress & Exposition*, San Francisco, CA, Nov. pp. 12~17.
- (16) Parenti-Castelli, V., and Di Gregorio, R., 1996, "Real-Time Computation of the Actual Posture of the General Geometry 6-6 Fully Parallel Mechanism Using Two Extra Rotary Sensors," *24th Biennial Mechanisms Conference*, Irvine, CA, paper: DETC96/MECH-1010.
- (17) Innocenti, C., 1996, "Closed-Form Determination of the Location of a Rigid Body by Seven in-Parallel Linear Transducers," *24th Biennial Mechanisms Conference*, Irvine, CA, paper: DETC96/MECH-1567.
- (18) Lee, T., Y., and Shim, J., K., 2000, "Real-Time Forward Kinematics of the General 6-6 Stewart Platform Using One Extra Sensor," *26th Biennial Mechanisms Conference*, Baltimore, Maryland, Paper: DETC00/MECH-14095.
- (19) Jin, Y., and Hai-rong, F., 1996, "Explicit Solution for the Forward Displacement Analysis of the Stewart Platform Manipulator," *24th Biennial Mechanisms Conference*, Irvine, CA, paper: DETC96/MECH-1001.
- (20) Bottema, O., and Roth, B., 1979, *Theoretical Kinematics*, North-Holland Publishing Company, New York, pp. 9~11.