

# 이점 대각 이차 근사화 기법을 적용한 최적설계

김민수\* · 김종립\*\* · 전재영\*\* · 최동훈†  
(2001년 2월 1일 접수, 2001년 6월 14일 심사완료)

## Design Optimization Using Two-Point Diagonal Quadratic Approximation

Min-Soo Kim, Jong-Rip Kim, Jae-Young Jeon and Dong-Hoon Choi

**Key Words :** Two-Point Approximation(이점 근사화), Sequential Approximate Optimization(순차적 근사 최적화)

### Abstract

Based on the exponential intervening variable, a new two-point approximation method is presented. This introduces the shifting level into each exponential intervening variable to avoid the lack of definition of the conventional exponential intervening variables due to zero - or negative-valued design variables. Then a new quadratic approximation whose Hessian matrix has only diagonal elements of different values is proposed in terms of these intervening variables. These diagonal elements are determined in a closed form that corrects the typical error in the approximate gradient of the TANA series due to the lack of definition of exponential type intervening variables and their incomplete second-order terms. Also, a correction coefficient is multiplied to the pre-determined quadratic term to match the value of approximate function with that of the previous point. Finally, in order to show the numerical performance of the proposed method, a sequential approximate optimizer is developed and applied to solve six typical design problems. These optimization results are compared with those of TANA-3. These comparisons show that the proposed method gives more efficient and reliable results than TANA-3.

### 1. 서론

일반적인 최적설계 방법에서는 해석 프로그램이 직접 최적설계 과정에 삽입되어 최적설계 모듈에서 해석을 요구할 경우 실제의 해석을 반복적으로 수행한다. 그러므로 해석 비용이 큰 경우 적용하기 힘든 단점이 있어, 실제 해석을 통한 시스템의 정보들로 근사 함수를 생성하여 이를 최적설계 과정에 삽입시켜 전체 최적설계 과정에서의 실제 해석 회수를 줄이는 근사 최적설계 기법이 개발되

었다.

1970년대 Schmit 등은 처음으로 근사화의 개념을 소개하였다.<sup>(1-3)</sup> 이들은 지금은 친숙한 기술인 매개 변수(intervening variable)에 대한 정의, 명시적 근사화(explicit approximation), 축소 기저(reduced basis)와 설계 변수 연결(design variable linking), 구속조건 삭제(constraint deletion) 그리고 영역화(regionalization)의 개념을 결합시켰다. 1980년대 대부분의 근사화는 한 점에서의 함수 값과 도함수 값의 정보를 기본으로 한 테일러 급수를 기초로 하였다. 그 중에는 선형(linear) 근사화, 역(reciprocal) 근사화, 보수(conservative) 근사화<sup>(3)</sup> 등이 있다. 이 근사화 방법들은 대부분의 최적설계 알고리즘이 함수 값과 도함수 값을 필요로 하기 때문에 근사 함수를 생성하는 과정에서 추가적인 함수나 도함수 계산을 필요로 하지 않아 널리 사용되고 있다. 그러나 이러한 일련의 근사화 기법들이 응력과 변위 함수의 근사화에는 좋은 결과를

\* 회원, 한양대학교 최적설계신기술연구센터(iDOT) 연구교수

\*\* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

† 책임저자, 회원, 한양대학교 최적설계신기술연구센터(iDOT) 소장

E-mail : dhchoi@hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0478/9 FAX : (02)2291-4070

나타내지만, 단절 오차(truncated error)가 커질 수 있어 부정확할 가능성이 크다.

1990년대 이르러 기존의 알고 있는 설계 정보들을 근사 함수의 생성시 최대한 이용하기 위하여 수많은 다점(multi-point) 근사화 기법들이 제안되었다.<sup>(4-8)</sup> 그 중에서 사용이 간단하여 널리 쓰이고 있는 이점 근사화 방법은 Fadel 등<sup>(7)</sup>에 의해 처음으로 소개되었다. 이들은 지수 형태의 매개 변수를 정의하여 이전 설계점에서 실제 도함수 값과 근사 도함수 값을 일치시켜 매개 변수의 지수를 결정하였다. 이 매개 변수에 기초하여 Wang 과 Grandi<sup>(4)</sup>는 두 설계점에서의 함수 값과 도함수 값을 모두 이용하는 개선된 이점 근사화 방법인 TPEA-change, TANA, TANA-1 그리고 TANA-2를 개발하였다. 최근에는 Xu 와 Grandhi<sup>(8)</sup>가 TANA-2에서처럼  $n+1$  개의 연립 비선형 방정식을 풀어야 하는 수치적 부담을 피하기 위해 헤시언 행렬의 대각요소가 변할 수 있는 TANA-3를 개발하였다. 그러나 TANA-3는 두 설계점에서의 도함수 값의 부호가 변하는 경우 정확도가 떨어지는 단점을 가지고 있어, 순차적 근사 최적화(Sequential Approximate Optimization, SAO)의 수행에 영향을 준다. 뿐만 아니라 실제 도함수 값과는 다르게 0이 아닌 값을 줄 수도 있다.

본 논문에서는 새로운 이점 대각 이차 근사화 방법을 제안하였다. 제안한 방법에서는 기존의 이점 근사화 방법이 두 설계점의 도함수 값의 부호가 반대인 경우 가지는 단점을 보완하기 위한 새로운 개념의 대각성분 2차 항을 제안하였다. 제안한 방법에서는 매개 변수 공간에서의 각 변수 축 상에서 이전 설계점의 실제 도함수 값과 근사 도함수 값을 일치시키는 각각의 변수에 대한 헤시언 행렬의 대각 요소를 결정하였다. 또한 유일하게 정할 수 있는 보정 계수를 2차 항에 곱함으로써 이전 설계점에서 실제 함수 값과 근사 함수 값을 일치시켰다. 또한 다른 이점 근사화 방법과는 달리 근사 도함수의 특이성을 방지하기 위해 이동수준(shifting level)을 갖는 매개 변수의 사용을 제안하였다.

2 장에서는 기존의 이점 근사화 방법인 TPEA, TANA, TANA-2, TANA-3에 대하여 고찰하겠다. 3 장에서는 제안한 방법에 대한 자세한 설명을 하고 4 장에서는 TDQA를 사용한 순차적 근사 최적설계의 수치적 과정에 대하여 설명하겠다. 5 장에서는 제안한 방법의 수치적 결과 및 효율에 대하여 논할 것이다. 6 장에서는 결론에 대하여 기술하고자 한다.

## 2. 이점 근사 기법의 고찰

이 장에서는 기존의 이점 근사화 기법인 TPEA, TANA, TANA-1, TANA-2 그리고 TANA-3에 대해 수학적으로 자세히 기술하기로 하겠다. 이미 설계점  $\mathbf{x}_1(x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{n,1})$ 과  $\mathbf{x}_2(x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{n,2})$ 에서는 그 함수 값과 도함수 값의 정보를 알고 있으며, 여기서  $n$ 은 설계 변수의 개수이다. 함수  $\tilde{g}(\mathbf{x})$ 는 현재의 설계점인  $\mathbf{x}_2$ 에서 전개되었으며 두 점에서의 함수 값과 도함수 값을 사용하여 전개된 이점 근사화 식이다.

### 2.1 이점 지수 근사 기법

Fadel 등<sup>(7)</sup>은 처음으로 이점 지수 근사 기법(Two-Point Exponential Approximation, TPEA)을 소개하였다. 매개 변수를 사용하여 테일러 급수의 1차 항까지 전개한 근사식이다.

$$y_i = x_i^{p_i}, \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

여기에서  $p_i$ 는 근사화된 함수의 이전 설계점에서의 도함수 값과 실제 도함수 값이 같다는 조건으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} = \left( \frac{x_{i,1}}{x_{i,2}} \right)^{p_i-1} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

식 (2)로부터  $p_i$ 는 다음과 같이 구하여진다.

$$p_i = 1 + \left\{ \ln \left[ \frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} / \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \right] / \ln [x_{i,1}/x_{i,2}] \right\} \quad (3)$$

실제 설계 변수  $x_i$ 에 대하여 근사화된 함수는 식 (4)와 같다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \left( \frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^{p_i} - x_{i,2}^{p_i}) \quad (4)$$

TPEA에서는  $p_i$ 는  $-1 \sim 1$ 로 제한되었다. 그러나 Wang 과 Grandhi<sup>(4)</sup>는 구조 최적설계 문제에 대하여 이러한 제한을 없앴으로써 더 좋은 결과를 얻을 수 있다고 제안하였으며, 이를 이점 지수 근사화 기법의 변형(TPEA-change)이라고 한다.

### 2.2 이점 적응 비선형 근사 기법

Wang 과 Grandhi<sup>(4)</sup>는 적응 매개 변수  $y_i = x_i^r, i=1, \dots, n$ 을 사용하여 이점 적응 비선형 근사 기법(Two-point Adaptive Nonlinear Approximation, TANA)을 제안하였다. 여기서,  $r$ 은 매 반복 단계마다 다른 값을 취하나 모든 변수에 대하여 동일한 값을 취하는 비선형 상수(non-linearity index)를 나타낸다. 즉  $r$ 은 실제 함수 값과 근사 함수 값이 같다는 조건으로부터 수치적 방법으로 계산된다. 또한, Wang 과 Grandhi<sup>(4)</sup>는 보다 나

은 근사화를 위해 TANA 와 TPEA-change 를 조합 하여 더 많은 정보를 이용하여 TANA-1 과 TANA-2 를 제안하였다.

TANA-1 은 식 (1)과 동일한 매개 변수를 사용하며, 식 (5)와 같이 전개된다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} \left( \frac{x_{i,1}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^p - x_{i,1}^p) + \varepsilon_1 \quad (5)$$

여기서  $\varepsilon_1$  은 상수이며, 매개 변수  $y_i$  에 대한 1 차 테일러 급수의 잔차를 나타낸다. 이 방법은 다른 이점 근사화 방법과는 달리 최근의 설계정보를 더욱 정확히 표현하기 위하여 이전 설계점인  $\mathbf{x}_1$  에서 전개된다.  $p_i$  는  $\mathbf{x}_2$  에서의 실제 도함수 값과 근사 도함수 값이 같다는 조건으로부터 계산할 수 있다. 따라서 현 설계점에서 도함수 값을 일치시켰기 때문에 현 설계점에서의 실제 함수 값과 근사 함수 값이 다를 수 있다. 이 차이는 함수 값을 일치시킴으로써, 보정 계수항인  $\varepsilon_1$  로부터 보상되어진다.

TANA-2 또한 식 (1)의 매개 변수를 사용하며, 현 설계점  $\mathbf{x}_2$  에서 식 (6)과 같이 전개되어진다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \left( \frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^p - x_{i,2}^p) + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \sum_{i=1}^n (x_i^p - x_{i,2}^p)^2 \quad (6)$$

이 근사화 방법은 테일러 급수의 2 차항의 효과를 포함하고 있다. 여기서  $\varepsilon_2$  는 헤시언 행렬의 대각 요소만을 나타내며, 동일한 값을 가진다. 이 근사화 방법은 매개 변수  $y$  에 대한 전개로 되어 있고 근사적인 헤시언 행렬의 오차는 비선형 상수  $p_i$  에 의하여 부분적으로 수정되어진다. 식 (6)은  $p_i$  와  $\varepsilon_2$  를 결정하기 위하여  $n+1$  개의 방정식이 필요하다.  $n$  개의 방정식은 이전 설계점  $\mathbf{x}_1$  에서의 도함수 값을 일치시킴으로써, 마지막 방정식은 함수 값을 일치시킴으로써 얻을 수 있다.

TANA-1 은 현 설계점에서의 도함수 값이 실제 도함수 값과 같지 않고, TANA-2 는 근사화 과정에서  $n+1$  개의 방정식을 풀어야 하는 수치적 부담을 갖고 있다.

최근 Xu 와 Grandhi<sup>(8)</sup>은 식 (1)과 같은 매개 변수를 사용하여, 변할 수 있는 대각요소만을 갖는 헤시언 행렬을 사용하여 불안정한 형태의 2 차 테일러 급수 전개로 TANA-3 를 제안하였는데, 현 설계점  $\mathbf{x}_2$  에서 식 (7)과 같이 전개된다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \left( \frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} \right) (x_i^p - x_{i,2}^p) + \frac{1}{2} \varepsilon_3 (\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n (x_i^p - x_{i,2}^p)^2 \quad (7)$$

여기서

$$\varepsilon_3(\mathbf{x}) = H \left[ \sum_{i=1}^n (x_i^p - x_{i,1}^p)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i^p - x_{i,2}^p)^2 \right] \quad (8)$$

이다.  $p_i$  와  $H$  는 이전 설계점  $\mathbf{x}_1$  에서의 정보로부터 유일해를 가진다.  $p_i$  는 식 (3)과 동일하게 구하여지며,  $H$  는 식 (9)와 같다.

$$H = 2 \left[ g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \frac{x_{i,2}^{1-p_i}}{p_i} (x_{i,1}^p - x_{i,2}^p) \right] \quad (9)$$

이때 식 (3)의 분자 또는 분모의 로그속의 비가 음수이거나, 분모가 1 에 가까울 경우를 위한 수치적인 고려가 필요하다. 전자의 경우 Xu 와 Grandhi<sup>(8)</sup>은  $p_i$  를 1 또는 -1 로 두었다. 후자는 최적설계가 수렴영역에 가까울 경우로 생각하여 설계 변수의 변화가 적으므로 역시  $p_i$  를 1 또는 -1 로 두었다. 반면  $p_i$  가 너무 큰 값을 갖는 경우, 근사화에 지배적인 영향을 미치며 근사화가 나빠질 수가 있다. 이를 위하여 경계값  $p_{max} = 5$  를 두었으며,  $|p_i| < p_{max}$  로 제안하였다.

TANA-3 가  $n+1$  개의 비선형 연립방정식을 풀어야 하는 TANA-2 의 부담은 해결하였으나, 가변적 이차항으로 인하여 다음과 같은 3 가지의 문제점을 여전히 안고 있다.

- TANA-3 는 실제 함수가 두 설계점 사이에서 볼록 함수(convex function)일 경우에도, 변곡점을 가질 수 있다.
- Xu 와 Grandhi 의 수치적인 고려가 있으나, 식 (3)의 분자 또는 분모가 음수인 경우에는 근사화의 정확도는 보장되지 않는다.
- TANA-3 는 실제 함수와는 달리 0 이 아닌 도함수 값을 줄 수도 있다. 즉, 실제 함수  $g(\mathbf{x})$  의 도함수가 0 인 경우에도,  $\varepsilon_3(\mathbf{x}) \neq 0$  또는  $\partial \varepsilon_3(\mathbf{x}) / \partial x_i \neq 0$  이면 식 (10)과 같이 표현되는 근사 도함수 값은 0 이 아니다.

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_3(\mathbf{x})}{\partial x_i} \sum_{i=1}^n (x_i^p - x_{i,2}^p)^2 + \varepsilon_3(\mathbf{x}) (x_i^p - x_{i,2}^p) p_i x_i^{p-1} \quad (10)$$

이러한 문제점들은 수정계수  $\varepsilon_2$  를  $\varepsilon_3(\mathbf{x})$  의 단순화 된 형태로 생각할 수 있으므로, TANA-2 에서도 유사한 경향으로 발생할 수 있다.

### 3. 이점 대각 이차 근사 기법

#### 3.1 기본 개념

이 절에서는 새로이 제안하는 이점 대각 이차 근사 기법(Two-point Diagonal Quadratic

Approximation, TDQA)에 자세히 기술하겠다. 이 방법에서는 식 (1) 형태의 지수형 매개 변수를 사용하나, 새로이 이동 수준(shifting level)을 도입하여 식 (11)과 같은 형태의 매개 변수를 사용한다.

$$y_i = (x_i + c_i)^{p_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

여기에서  $c_i$ 는 설계 변수  $x_i$ 에 대한 이동 수준이다. 미지 지수  $p_i$ 는 TANA-3와 같은 방법으로 구하여지며, 식 (12)와 같다.

$$p_i = 1 + \left\{ \ln \left[ \frac{\partial g(\mathbf{x}_1)}{\partial x_i} / \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial x_i} \right] / \ln \left[ \frac{(x_{i,1} + c_i)}{(x_{i,2} + c_i)} \right] \right\} \quad (12)$$

2.2 절에서 설명하였듯이, 식 (12)의 분자 또는 분모의 로그속의 값이 음수 또는 0 일 경우에는 적절히 그 값을 지정하였다. 이 경우에 대한 상세한 수치적인 고려 사항들은 3.2 절에 다시 언급하기로 한다.

제안한 새로운 이차 근사 기법의 현 설계점  $\mathbf{x}_2$ 에서의 전개식은 식 (13)과 같다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_i - y_{i,2}) + \sum_{i=1}^n G_i (y_i - y_{i,2})^2 \quad (13)$$

헤시언 행렬의 대각 요소  $G_i$ 는 이전 설계점에서의 근사 도함수의 오차를 수정하기 위하여 식 (14)와 같이 정의한다.

$$G_i = \frac{1}{2(y_{i,1} - y_{i,2})} \left( \frac{\partial g(\mathbf{y}_1)}{\partial y_i} - \frac{\partial g(\mathbf{y}_2)}{\partial y_i} \right) \quad (14)$$

따라서,  $\partial g(\mathbf{y}_1)/\partial y_i = \partial g(\mathbf{y}_2)/\partial y_i$ 를 만족시키기 위하여 결정된  $p_i$ 는  $G_i=0$ 을 만족한다. 마지막으로 이전 설계점에서의 함수 값에 대한  $\tilde{g}(\mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_1)$ 를 만족하기 위하여 수정계수  $\eta$ 를 식 (15)와 같이 결정할 수 있다.

$$\eta = \frac{g(\mathbf{x}_1) - g(\mathbf{x}_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_{i,1} - y_{i,2})}{\sum_{i=1}^n G_i (y_{i,1} - y_{i,2})^2} \quad (15)$$

결과적으로 제안하고자 하는 방법인 TDQA의 최종 근사식은 식 (16)과 같다.

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}_2)}{\partial y_i} (y_i - y_{i,2}) + \eta \sum_{i=1}^n G_i (y_i - y_{i,2})^2 \quad (16)$$

### 3.2 수치적 고려 사항

본 절에서는 TDQA를 위한  $c_i, p_i, G_i, \eta$ 의 4가지 인자를 결정하기 위한 수치적인 고려 사항들을 살펴보겠다.

#### 3.2.1 이동 수준 $c_i$ 에 대한 수치적 고려

설계 변수  $x_i$ 가 임의의 작은 양수 값  $\zeta$ 보다 작

을 경우에만  $c_i = |x_i^l| + 1$ 을 사용하며, 그 외 경우에는  $c_i = 0$ 으로 한다. 여기서  $x_i^l$ 은 설계 변수  $x_i$ 의 하한 경계치를 의미한다. 이동 수준은  $x_i = 0$  근방에서의 근사 도함수의 특이성(singularity)과  $x_i < 0$ 에 대한 다른 이점 근사 기법들의 근본적인 문제점을 극복하기 위하여 제안되었으며,  $\zeta = 1 \times 10^{-3}$ 을 추천한다.

#### 3.2.2 지수 $p_i$ 에 대한 수치적 고려

식 (12)의 분자 또는 분모의 로그 속의 비가 음의 값이나, 또는  $p_i = 0$ 일 경우 수치적인 고려가 필요하다. 분자의 경우  $p_i = 1$ 로 설정하였다. 이것은  $G_i$ 의 정의로부터  $x_i$ 에 대한 이차 근사화를 표현한다. 또한 분모가  $|(x_{i,1} + c_i)/(x_{i,2} + c_i) - 1| \leq \varepsilon$ 과 같이 0 근방일 경우  $p_i^k = p_i^{k-1}$ 로 설정하였으며,  $p_i^0 = 1$ 로 하였다. 여기서 상첨자  $k$ 는 SAO의 반복 회수를 나타내며,  $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ 을 추천한다.

$p_i$ 의 값이 너무 크면 근사화가 나빠질 수 있다. 따라서,  $p_{\max} = 5$ 를 사용하여  $|p_i| < p_{\max}$ 로 설정하였

#### 3.2.3 대각 이차항 $G_i$ 에 대한 수치적 고려

식 (14)의 분모가 0에 가까울 경우  $G_i$ 의 값은 수치적으로 무한대가 될 수 있으며, 이것은 근사화의 질을 나쁘게 한다. 따라서,  $|y_{i,1} - y_{i,2}| \leq \varepsilon |y_{i,2}|$ 이면  $G_i = 0$ 으로 설정하였으며,  $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ 을 추천한다.

#### 3.2.4 수정 계수 $\eta$ 에 대한 수치적 고려

식 (15)의 분모가 작은 값일 경우 수정 계수  $\eta$ 는 매우 큰 값이 될 수 있는데, 이것이 근사 함수의 질은 향상시킬지라도 근사 도함수의 질은 나쁘게 한다. 따라서 식 (17)과 같은 조건을 판단하여  $\eta$  값을 결정한다.

$$|\text{식 (15)의 분모}| > \varepsilon |\text{식 (15)의 분자}| \quad (17)$$

여기서  $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ 을 추천한다. 만약 식 (17)의 조건을 만족한다면 식 (15)로 구한 값을 사용하며, 그렇지 않을 경우에는  $\eta = 1$ 로 설정하였다. 즉, 식 (15)의 분모(근사 함수의 이차 항)가 분자(근사 함수의 선형 항)의 1%보다 클 경우에는 구하여진  $\eta$  값을 사용하며, 작을 경우에는 오차가 1% 미만이므로 이전 설계점에서의 함수 값의 일치를 고려하지 않았다.

## 4. TDQA를 이용한 SAO의 수치적 절차

TDQA 방법을 이용한 순차적 근사 최적화(SAO)

의 수치적인 과정은 아래와 같다.

단계 0: 초기 설계점  $\mathbf{x}_0$  에서 목적함수  $f(\mathbf{x})$ 와 구속 조건  $g_j(\mathbf{x}), j=1, \dots, m$ 의 함수 값과 도함수 값을 계산하고  $k=0$ 으로 한다.

단계 1: 만약  $k=0$  이면 보수 근사 기법 (conservative approximation)을 사용하여 근사 함수를 생성하고 단계 2로 간다. 그 외의 경우에는 TDQA를 사용하여 근사 함수를 생성한다.

단계 2: 만약  $k=0$  이면 40%의 이동제한(move limit) 조건 하에서, 그 외의 경우에서 이동제한 조건이 없이 근사 최적설계 문제를 푼다.

단계 3: 근사 최적해  $\bar{\mathbf{x}}_k$ 에서의 실제 함수 값을 계산한다. 만약  $|f(\bar{\mathbf{x}}_k) - f(\mathbf{x}_k)| \leq \tau_1 |f(\mathbf{x}_k)|$ 의 수렴영역에 있고,  $g_j(\bar{\mathbf{x}}_k) \leq \tau_2, j=1, \dots, m$ 가 충족되었다면, 해가 수렴을 한 것으로 판단하고, 최적설계 과정을 종료한다. 다른 경우라면 단계 4로 간다.

단계 4:  $\bar{\mathbf{x}}_k$ 에서 목적 함수와 구속 조건의 실제 도함수 값을 계산한다. 그리고 설계 변수를  $\mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathbf{x}}_k$ 로 설정한다.  $k = k + 1$ 로 하고, 단계 1로 돌아간다.

단계 2에서의 구속 조건이 있는 근사 최적설계 문제를 위하여 본 논문에서는 SQP(Sequential Quadratic Programming)<sup>(9-10)</sup>를 사용하였다.

### 5. 수치적 예제

제한한 TDQA의 성능을 검증하기 위하여, 4장에서 기술한 내용을 바탕으로 TDQA와 TANA-3의 근사화 기법을 사용하여 SAO를 구성하였다. 본 논문에서는  $n+1$ 개의 비선형 연립 방정식을 풀어야 하는 TANA-2는 포함하지 않았다.

2가지 기계 시스템의 설계 문제와 10부재 트러스 문제<sup>(11-12)</sup>의 4가지 설계 문제에 대하여 근사 최적화를 수행하였다. 기계 시스템 문제는 코일 스프링 설계<sup>(11-12)</sup> 문제와 피스톤 설계<sup>(10)</sup> 문제이다. 기계 시스템 설계 문제에서는 2장과 3장에서 언급한 두 근사 기법에서의 오차의 영향을 명백히 볼 수 있으며, 10부재 트러스 설계 문제에서는 제한한 이동 수준의 영향을 수치적으로 볼 수 있는 것이다. 모든 설계 문제에 대하여 허용 오차는  $\tau_1 = 1 \times 10^{-3}$ 와  $\tau_2 = 1 \times 10^{-3}$ 을 사용하였다.

#### 5.1 기계 시스템 설계

[예제 1] 코일 스프링 설계

이 예제는 Fig. 1과 같이 주어진 코일 스프링의 중량을 최소화하는 문제이며, 구속 조건으로는 최소 변위, 전단 응력, 서지(surge) 진동수와 스프링의 외경 제한이 있다. 설계 변수는 와이어의 직경  $x_1$ , 유효 코일 직경  $x_2$ 와 코일의 유효 감긴 회수  $x_3$ 이다. 최적설계 정식화는 다음과 같다.

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = (x_3 + 2)x_2 x_1^2$$

$$\text{subject to } g_1(\mathbf{x}) = 1 - x_2^3 x_3 / 71875 x_1^4 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{4x_2^2 - x_1 x_2}{12566(x_2 x_1^3 - x_1^4)} + \frac{1}{5108 x_1^2} - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 1 - 140.45 x_1 / x_2^2 x_3 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2) / 1.5 - 1 \leq 0$$

초기 설계점과 설계 상·하한치는  $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\mathbf{x}^L = (0.05, 0.05, 1)^T$  및  $\mathbf{x}^U = (5, 5, 15)^T$ 이다. 구속 조건  $g_1$ 과  $g_2$ 가 최적해에서 활성화조건이며, 최적해는  $f(\mathbf{x}^*) = 0.01268$ 로 주어져 있으며, 보다 상세한 내용은 참고문헌 (12)를 참고하기 바란다.

최적화 결과는 Table 1에 나타냈으며, TANA-3에 비해 TDQA가 더 좋은 결과를 주었다. TANA-3의 수렴과정을 살펴보면, 7번째 반복과정에서 주목할 현상을 발견할 수 있는데, 이것으로부터 두 근사화 기법의 이차 항에 대한 뚜렷한 차이를 알 수 있을 것이다. 6번째 과정과 7번째 과정, 즉,  $\mathbf{x}_6 = (0.1693, 1.0183, 1.5922)^T$ 와  $\mathbf{x}_7 = (0.0931, 1.5673, 1.8075)^T$ , 사이에서 구속 조건  $g_1$ 에 대한 두 근사 기법의  $\bar{g}_1$ 과  $\nabla \bar{g}_1$ 의 정확도를 살펴보자. 왜냐하면, TANA-3의 7번째 반복과정에서 구속 조건  $g_1$ 만이 활성화 구속 조건이다. TANA-3의 지수  $p_i$ 는 식 (3)에 의한 값이  $p_{\max}$  값보다 크므로  $(-5, 5, 5)^T$ 를 가진



Fig. 1 Coil spring design problem

Table 1 Comparison of optimization results for the coil spring design (\*prematurely converged)

	Initial design	TDQA	TANA-3
$x_1$	1.0	0.0529	0.0584
$x_2$	2.0	0.3863	0.5417
$x_3$	3.0	9.7938	5.2745
$f$	10.0	0.0127	0.0134*
$g_{\max}$	1.0	0.0000	0.0006
Iterations	-	11	7

다. 또한, 식 (9)에 의해  $H$  는  $-1.04726$  로 계산된다. 한편, TDQA 에서는  $c_i = 0$  이므로, TANA-3 와 같은 지수  $p_i$  를 가진다. 또한 식 (14)-(15)에 의해서  $G_i$  와  $\eta$  는 각각  $(0, -0.00396, -0.0071)^T$  과  $0.85968$  로 계산된다.

방향 벡터  $s = x_6 - x_7$  이라고 하고,  $\alpha = (0, 1)$  에서의  $x = x_7 + \alpha s$  에 대한 실제 및 근사 함수 값을 구할 수 있다. 이에 대하여 Fig. 2 에 도시했다. 두 근사 기법에 의한 함수 값이 양 끝점 ( $\alpha = 0, \alpha = 1$ )에서 잘 일치하나, TANA-3 는 구간  $(0, 1)$ 에서 여러 굴곡이 있음을 알 수 있다. 반면, TDQA 는 전 구간에서 잘 일치하고 있다. 앞에서 언급했듯이, 두 근사기법은 같은 지수  $p_i$  를 사용하였다. 따라서, 이러한 차이는 이차 항에 의한 것임을 알 수 있다.

보다 정확한 비교를 위하여, 방향 도함수를 구하여 보자. 이를 Fig. 3 에 도시하였으며,  $dg_1/d\alpha = \nabla g_1 \cdot s$  로 정의된다. 현 설계점 ( $\alpha = 0$ )에서는 정확히 일치하고 있으나, 심한 근사 오차가 존

Table 2 Comparison of approximate derivatives at  $\alpha = 0.17$

	$\partial g_1/\partial x_1$	$\partial g_1/\partial x_2$	$\partial g_1/\partial x_3$	$\partial g_1/\partial \alpha$
Exact value	23.52	-1.27	-0.35	2.57
TDQA	19.18	-1.53	-0.54	2.42
TANA-3	-1.75	-1.92	-0.65	1.07

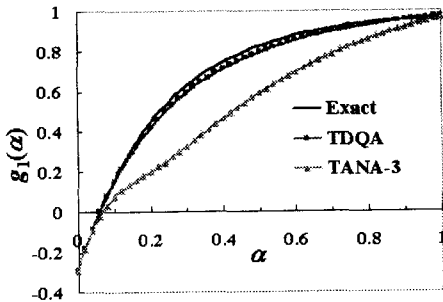


Fig. 2 Comparison of approximate function values along s vector

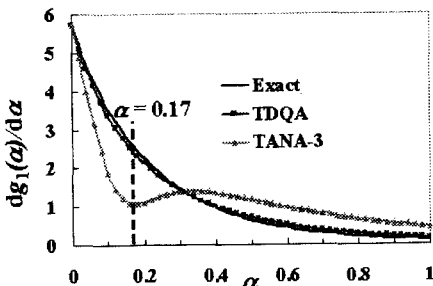


Fig. 3 Comparison of approximate gradient values along s vector

재함을 Fig. 3 에서 볼 수 있다.  $\alpha = 0.17$  에서의 비교값을 Table 2 에 나열하였다. 이를 통하여 TANA-3 의 오차는  $\partial g_1/\partial x_i$  의 부호가 실제와 다름에 기인한 것임을 알 수 있다. 이러한 현상의 이유는 2.2 절에서 설명을 하였으며,  $H$  와  $G_i$  의 차이에서 오는 것이라 저자는 생각한다. 따라서, 수치적 최적화 과정에서 TANA-3 는 잘못된 방향 벡터를 제공할 수 있다.

[예제 2] 피스톤 설계

이 문제는 상용 최적설계 프로그램인 DOT<sup>(10)</sup>에 수록 되어있는 문제이다. 목적 함수는 Fig. 4 에서 처럼 0°에서 45°까지 들어올리는데 필요한 기름의 부피를 최소화하는 것이다. 구속조건은 힘의 평형 상태, 보의 최대 굽힘 응력, 최소의 피스톤 스트로크(stroke) 등 이다.  $X_3$  는  $L/2$  의 위치를 넘어서는 안되며, 지지 위치는 적어도 피스톤 직경의 1/2 이상이어야 한다. 설계 변수는 거리  $X_1, X_2, X_3$  그리고,  $D$  이다. 초기 설계점은  $x_0 = (84.0, 60.0, 84.0, 6.0)^T$  이고, 설계 변수의 하한치는 모두 0.05 이고, 상한치는 설계 변수  $X_3$  만 120 이며, 나머지는 모두 1000 이다. 최적해는  $x^* = (50.90, 3.27, 120.0, 6.52)^T$  로 알려져 있다. 최적설계의 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } f(x) = \pi D^2(b-a)/4$$

Subject to

- Equilibrium at  $\theta = 45^\circ$   $QL \cos \theta - RF \leq 0$
- Bending Moment  $Q(L - X_3) - 1.8 \times 10^6 \leq 0$
- Piston Stroke  $1.2(b-a) - a \leq 0$
- Support Location  $D/2 - X_2 \leq 0$

where

$$R = \frac{-X_2(X_3 \sin \theta + X_1) + X_1(X_2 - X_3 \cos \theta)}{\sqrt{(X_3 \sin \theta + X_1)^2 + (X_2 - X_3 \cos \theta)^2}}$$

$$F = \pi P D^2/4$$

$$a = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + X_1^2}$$

$$b = \sqrt{(X_3 \sin 45^\circ + X_1)^2 + (X_2 - X_3 \cos 45^\circ)^2}$$

Payload( $Q$ ) = 10,000 lbs

Beam Length( $L$ ) = 240 in

Oil Pressure( $P$ ) = 1,500 psi

Maximum Allowable Bending Moment of the Beam =  $1.8 \times 10^6$  lbs-in

최적화 결과는 Table 3 에 나타냈으며, 표를 보면 TANA-3 는 다른 국부 최적해에 수렴한 것을 알 수 있다. 반면 TDQA 는 DOT 에서 제한한 최적해에 근사한 최적해에 수렴한 것을 알 수 있다.

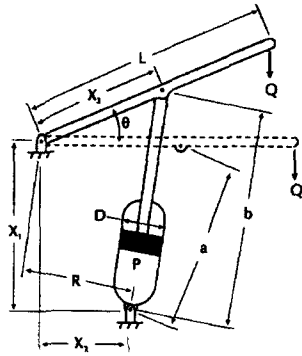


Fig. 4 Piston design problem

Table 3 Comparison of optimization results for the piston design (\*: prematurely converged)

	Initial Design	TDQA	TANA-3
$X_1$	84.0	60.3341	795.7932
$X_2$	60.0	8.8525	42.2144
$X_3$	84.0	120.0	60.0043
$D$	6.0	5.9655	5.8274
$f$	1584.4066	1045.5668	1126.3162*
Iterations	-	10	13

이 이유는 앞서의 스프링 설계 문제에서와 같이 최적설계 과정에서 TANA3의 도함수 값이 부정확하여 다른 방향의 최적해에 수렴한 결과라고 할 수 있다.

5.2 10 부재 트러스 설계

이 문제는 Haug와 Arora<sup>(11)</sup> 등 많은 문헌에서 다루어졌던 문제이며, Fig. 5에 도시하였다. 설계 변수는 각 부재의 단면적이고, 상·하한치는 매개 변수의 이동 상수 효과를 알아보기 위해 0.0001 in<sup>2</sup>과 50 in<sup>2</sup>로 하였으며, 초기점은 각 부재 모두 1.0 in<sup>2</sup>이다. 부재의 밀도는  $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ 이며, 탄성 계수(Young's modulus)는  $E = 10^7 \text{ psi}$ 이며, 전체 부재의 체적을 최소화하는 문제이다.

[조건 1]

하중은 절점 2와 4에서 음의 y-방향으로 100 kips이 작용한다. 이때의 각 부재의 허용 응력은 인장, 압축을 고려한  $\sigma_a = 25 \text{ ksi}$ 이다.

Table 4에 최적설계의 결과를 나타내었다. 최적해 부근에서는 1, 3, 4, 7, 8, 9 부재의 응력 구속조건과, 2, 5, 6, 10번 부재의 하한치 근처에서 활성 영역에 있다. 결과에서 제안한 TDQA의 경우 부재 2, 5, 6, 10의 단면적이 하한치까지 닿은 것을 확인할 수 있다. 그러나 TANA-3의 경우는 그렇지 못한 것을 알 수 있다. 즉, 제안한 이동 상수의 사용이 해의 수렴에 좋은 영향을 준 것으로 생각할 수 있다.

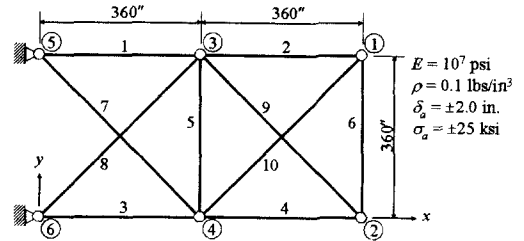


Fig. 5 Ten-bar truss design problem

[조건 2]

앞의 [조건 1]의 문제와 모든 조건은 동일하며, 절점 1, 2, 3, 4의 상하 방향 변위 구속조건이 추가된 문제이다. 변위의 구속조건은  $\delta_a = \pm 2.0 \text{ in}$ 이다. 최적해 근처에서는 절점 2에서의 아래 방향 변위 구속조건과 2, 5, 10번 부재 단면적이 하한치에서 활성 영역에 있다. 두 경우 모두 정확한 최적해에 수렴한 것을 알 수 있다.

[조건 3]

하중 조건을 제외한 모든 조건은 [조건 1]과 동일하다. 이 문제에서는 절점 2, 4에서 하중이 음의 y-방향으로 150 kips 작용하고 있으며, 절점 1, 3에서는 양의 y-방향으로 50 kips 작용한다. 다음의 최적설계의 결과에서 부재 2, 5, 10의 응력 구속조건이 최적해 근처에서 활성영역에 있다. 결과에서 두 경우 비슷한 결과를 낸 것을 알 수 있다.

[조건 4]

각 절점의 변위 구속조건  $\delta_a = \pm 2.0 \text{ in}$ 가 추가적으로 있는 것을 제외하고는 [조건 3] 문제와 동일하다. Table 7의 결과에서 최적해 근처에서는 절점 2에서의 아래 방향 변위 구속조건과 5번 부재의 응력 구속조건, 부재 2와 5번 부재의 단면적이 하한치 근처에 있다. 결과에서 보듯 이 문제 역시 제한한 매개 변수로 인해 설계 변수  $x_2$ 가 TDQA의 경우 정확히 최적해인 설계 변수의 하한치에 수렴한 반면에 TANA-3는 그렇지 못한 것을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 지수형 매개 변수를 갖는 새로운 이점 대각 이차 근사 기법(Two-point Diagonal Quadratic Approximation, TDQA)을 제안하였다. 본 방법에서는 이동 수준을 제안하여 기존의 이점 근사 기법들이 안고 있는 설계 변수가 0 근방 또는 음수일 때의 수치적인 어려움을 극복하였다. 또한 제안한 방법은 기존의 근사 기법들이 불완전한 매개 변수의 정의에 기인한 불록 함수의 근사화가 힘든 경우와 불완전한 이차 항에 기인한 설계 변

**Table 4** Comparisons of optimization results for ten-bar truss design: case-1

	Initial design	TDQA	TANA-3
$x_1$	1.0	7.9998	7.9545
$x_2$	1.0	0.0004	0.0624
$x_3$	1.0	8.0001	8.0427
$x_4$	1.0	3.9998	3.9523
$x_5$	1.0	0.0001	0.0001
$x_6$	1.0	0.0004	0.0624
$x_7$	1.0	5.6564	5.7204
$x_8$	1.0	5.6565	5.5934
$x_9$	1.0	5.6565	5.5933
$x_{10}$	1.0	0.0003	0.0925
$f$	419.64	1583.97	1588.15
$g_{\max}$	7.19	0.0001	0.0007
Iterations	-	10	14

**Table 6** Comparisons of optimization results for ten-bar truss design: case-3

	Initial design	TDQA	TANA-3
$x_1$	1.0	5.9871	5.9874
$x_2$	1.0	0.0208	0.0290
$x_3$	1.0	10.0128	10.0130
$x_4$	1.0	3.9867	3.9862
$x_5$	1.0	0.0001	0.0001
$x_6$	1.0	2.0133	2.0144
$x_7$	1.0	8.5034	8.5037
$x_8$	1.0	2.8104	2.8113
$x_9$	1.0	5.6381	5.6371
$x_{10}$	1.0	0.0286	0.0307
$f$	419.64	1657.26	1657.70
$g_{\max}$	7.37	0.0002	0.0007
Iterations	-	12	14

수들이 서로 다른 방향의 기울기를 갖는 경우를 표현하지 못하는 단점을 극복하였다.

TDQA 와 TANA-3 의 근사 기법을 사용하여, 2 가지 기계 시스템 설계 문제와 10 부재 트러스 설계 문제의 4 가지 경우에 대하여 순차적 근사 최적설계를 수행하였다. 이러한 예제를 통하여 2 장에서 설명한 TANA-3 의 단점과 제안한 이동 수준의 성능을 보였다. 또한 TDQA 와 TANA-3 의 성능을 비교하였으며, 제안한 근사 기법의 우수성을 보였다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 연구비 지원과 국방과학연구소(Grant No. ADD-00-05-08)의 지원으로 수행되었습니다. 이에 감사를 드립니다.

## 참고문헌

**Table 5** Comparisons of optimization results for ten-bar truss design: case-2

	Initial design	TDQA	TANA-3
$x_1$	1.0	29.5333	29.8105
$x_2$	1.0	0.0001	0.0001
$x_3$	1.0	22.9959	23.1649
$x_4$	1.0	15.3412	15.4185
$x_5$	1.0	0.0001	0.0001
$x_6$	1.0	0.2392	0.6497
$x_7$	1.0	7.6663	7.6661
$x_8$	1.0	20.4640	20.4560
$x_9$	1.0	21.7987	21.3552
$x_{10}$	1.0	0.0001	0.0001
$f$	419.64	4993.92	5004.55
$g_{\max}$	18.70	0.0000	0.0010
Iterations	-	12	12

**Table 7** Comparisons of optimization results for ten-bar truss design: case-4

	Initial design	TDQA	TANA-3
$x_1$	1.0	22.9287	23.0235
$x_2$	1.0	0.0001	0.9974
$x_3$	1.0	25.3236	25.2012
$x_4$	1.0	14.2363	14.2246
$x_5$	1.0	0.0001	0.0001
$x_6$	1.0	2.0003	2.0002
$x_7$	1.0	12.7557	12.7519
$x_8$	1.0	12.1823	12.1201
$x_9$	1.0	20.1744	20.3548
$x_{10}$	1.0	0.0001	0.0001
$f$	419.64	4619.15	4658.67
$g_{\max}$	19.06	0.0010	0.0002
Iterations	-	8	8

- (1) Schmit, L.A. and Farshi, B., 1974, "Some Approximation Concepts for Structural Synthesis," *AIAA Journal*, Vol. 12, pp. 692 ~ 699.
- (2) Schmit, L.A. and Miura, H., 1976, "A New Structural Analysis/Synthesis Capability -ACCESS 1," *AIAA Journal*, Vol. 14, pp. 661 ~ 671.
- (3) Schmit, L.A. and Fleury, C., 1980, "Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods," *AIAA Journal*, Vol. 18, pp. 1252 ~ 1260.
- (4) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1995, "Improved Two-Point Function Approximation for Design Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 9, pp. 1720 ~ 1727.
- (5) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1996, "Multipoint Approximations: Comparisons Using Structural Size, Configuration and Shape Design," *Structural Optimization*, Vol. 12, pp. 177 ~ 185.
- (6) Wang, L.P. and Grandhi, R.V., 1996, "Multivariate Hermite Approximation for Design Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 787 ~ 803.
- (7) Fadel, G.M., Riley, M.F. and Barthelemy, J.F.M., 1990, "Two Point Exponential Approximation Method



- for Structural optimization," *Structural Optimization*, Vol. 2, pp. 117 ~ 124.
- (8) Xu, S. and Grandhi, R.V., 1998, "An Effective Two-Point Function Approximation for Design Optimization," *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 39<sup>th</sup> Structural, Structural Dynamics, and Materials Conference, Long beach CA, April 20-23*, pp. 2181 ~ 2191.
- (9) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering with Applications*, McGraw-Hill, New York, pp. 195 ~ 199.
- (10) Vanderplaats, G.N., 1995, *DOT Users Manual: version 4.20*, Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs.
- (11) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, *Applied optimal Design Mechanical and Structural Systems*, John Wiley & Sons, New York, pp. 242 ~ 245.
- (12) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, New York, pp. 489 ~ 493.