

원형 단면을 갖는 헬리컬 스프링에 대한 파동

이재형[†] · 허승진*

(2000년 10월 27일 접수, 2001년 3월 5일 심사완료)

Wave Motion of Helical Springs with a Circular Section

Jaehyung Lee and Seung-Jin Heo

Key Words : Helical Spring(헬리컬 스프링), Wave Motion(파동), Dispersion(분산), Frenet Formulas(프레넷 공식), Timoshenko Beam(티모센코 보), Free Wave Number(자유 파동수)

Abstract

The governing partial differential equations of a helical spring with a circular section were derived from Frenet formulas and Timoshenko beam theory. These were solved to give the dispersion relationship between wave number and frequency along with the associated wave form. Wave motions of helical springs are categorized by 4 regimes. In the first regime, the lower frequency area, the torsional and extensional waves of the spring are predominant and two waves are composite wave motions involving lateral motion of the coils and rotation of the coils about a horizontal axis. All waves are propagating in the second regime. The wave of the extensional motion of the spring and one wave of transverse motion of a wire change from travelling waves to near field waves in the third regime. Both waves excited by both axial and transverse motion are predominant in the fourth regime.

기호설명

- A : 권선의 단면적
- E : Young 율
- \bar{F} : 스프링에 작용하는 힘
- G : 전단강성계수
- [I] : 단위행렬
- I_u, I_v, I_w : 권선의 면적관성모멘트
- k : 파동수
- M : 권선에 작용하는 모멘트
- P : 권선에 작용하는 힘
- R : 스프링의 반경
- r : 권선의 반경
- S_{ij} : 힘-변위에 대한 스프링계의 부행렬
- s : 권선을 따라 측정된 거리
- T_{ij} : 관성력에 대한 스프링계의 부행렬

- t : 시간
- $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$: 권선 좌표계에 대한 단위벡터
- α : 권선의 각
- Δ : 권선의 병진운동에 대한 변위의 크기
- δ : 권선의 병진운동에 대한 변위 벡터
- γ : 권선 단면적의 전단 계수
- κ : 권선의 곡률
- Λ : 권선의 회전운동에 대한 변위의 크기
- ρ : 단위 길이당 질량
- τ : 권선의 비틀림율
- Π : 권선에 작용하는 힘의 크기
- Θ : 권선에 작용하는 모멘트의 크기
- θ : 권선의 회전운동에 대한 변위 벡터
- ω : 각주파수

아래첨자

u, v, w : 권선 좌표계에서의 단위벡터 방향

[†] 책임저자, 회원, 국민대학교 자동차전문대학원
E-mail : jaehyung@kookmin.ac.kr
TEL: (02)910-4834 FAX : (02)910-4178

* 국민대학교 기계자동차공학부

1. 서론

구조물의 동특성을 해석하는 데 있어서 스프링

과 댐퍼는 질량이 없는 힘의 요소로 취급되어 왔다. 이러한 가정은 스프링의 고유주파수가 구조물의 관심 주파수 영역에 비하여 상대적으로 높을 경우에는 타당성이 있다. 그러나 구조물에 대한 관심 주파수 영역이 스프링의 고유주파수에 인접하게 된다면 이러한 가정을 사용하여 구조물의 동특성을 예측하는 것은 더 이상 타당성을 갖을 수 없다. 이러한 예로는 고속운동을 하는 엔진의 인젝션 펌프나 밸브 트레인 등의 동적 해석에 관한 것으로 특정 주파수 이상에서는 스프링의 내부 공진에 의한 효과를 고려하지 않을 경우 상당한 오차를 보이는 것에서 알려져 있다.

1899년에 Love는⁽¹⁾ 곡률을 갖는 보의 파동에 대한 해석을 위하여 12차 연립 미분 방정식을 유도하였다. 그러나 이 운동 방정식의 해를 해석적으로 구하는 것은 불가능하였다. 1930년대에 Timoshenko는⁽²⁾ 압축 하중을 받는 코일 스프링의 횡방향 좌굴에 대한 안정성 범위를 구하기 위하여 코일 스프링의 압축강성과 횡강성 및 전단강성의 값을 결정하였으며, 이 결과를 이용하여 헬리컬 스프링의 거동을 보의 거동에 유추한 해석을 가능하게 하였다.

Wahl은⁽³⁾ 양단이 고정된 원형 단면을 갖는 코일 스프링의 1차 고유진동수를 구하였으며, 2차 이상의 고유진동수는 1차 고유진동수의 자연수 배수로 나타남을 보여주었다.

Wittrick은⁽⁴⁾ 헬리컬 스프링에 전단 변형과 회전에 대한 관성을 포함하는 Timoshenko 보이론을 적용하여 12원 선형 미분 방정식을 구하고, 이 연립 방정식의 근사해를 구할 수 있는 방법을 제시하여 헬리컬 스프링에서 발생하는 파동 대한 이론을 정립하였다.

Jiang 등은⁽⁵⁾ 스프링에 대한 비선형 운동 방정식을 구하고 이를 선형화하여 스프링이 거동시 종방향 운동과 비틀림이 연성을 이루고 있음을 보여주었다. Shinha와 Costello는⁽⁶⁾ 시간 영역에서 스프링의 운동에 대한 비선형 미분 방정식을 풀기 위하여 유한차분법과 비선형 특성법을 사용하였다. 그러나 이러한 연구들은 스프링의 종방향과 비틀림 운동을 표현하는 것으로 제한되어 있다.

김도중과 이덕영은⁽⁷⁾ 원통형 스프링의 동적 거동을 해석하기 위한 헬리컬 로드의 유한요소법을 개발하였다. 이들은 질량 및 강성행렬의 대칭성을 보장하기 위하여 정하중 상태에서 스프링 변형곡선을 형상함수로 사용하고 Galerkin 방법을 적용하여 요소행렬을 구하였다.

Mottershead는⁽⁸⁾ 스프링에 대한 미분 방정식의 적분을 통하여 요소의 변위함수를 얻을 수 있는

특별한 유한 요소를 개발하였다. 그러나 이 요소가 정적인 문제에 대하여는 정확한 해를 구할 수 있으나 동적인 문제에 있어서는 주자유도(master degrees of freedom)의 수가 충분하지 않을 경우 고유주파수가 격자 밀도에 따라 변하지 못하므로 정확성이 떨어지는 단점이 있다.

헬리컬 스프링에 대한 동특성을 해석하는 또 다른 접근 방법으로는 전달함수법과^(9,10) 동강성법이⁽¹¹⁻¹³⁾ 사용되었다. 전달함수법은 전달함수를 구성하는 스프링의 분할요소에 따라 결과의 정확성과 계산 속도에 차이를 나타내는 단점을 갖고 있다. 이에 비하여 동강성법을 이용한 해석은 계산 속도와 결과의 정확성에 있어서 비교적 만족할 만한 결과를 보여준다.

본 논문에서는 Timoshenko 보이론과 곡률과 비틀림을 갖는 기하학적 형상에 대한 Frenet 공식을 사용하여 헬리컬 스프링에 대한 운동방정식을 유도하고, 운동방정식으로부터 헬리컬 스프링의 분산 곡선을 구하여 주파수 영역에 따른 파동의 변화를 살펴보았다.

2. 운동방정식

2.1 평형방정식

Fig. 1과 같이 반경이 r 인 균일한 철선을 감아 권선의 각이 α , 반경이 R 이 되도록 만든 헬리컬 스프링에 임의의 하중 \vec{F} 가 작용할 경우, 권선의 법선방향, 접선방향, 그리고 이 두 방향에 수직인 방향으로 힘과 모멘트의 성분이 존재하게 된다. 이러한 힘과 모멘트에 의하여 스프링을 구성하고

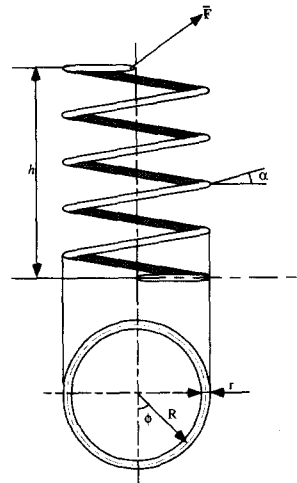


Fig. 1 Schematic of a helical spring

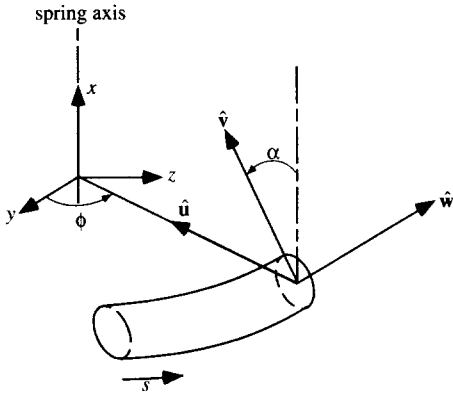


Fig. 2 Coordinate system of the circular helix

있는 철선에 병진방향과 회전방향으로 변위가 발생하게 된다.

Fig. 2에 표시된 것과 같이 기준점으로부터 권선을 따라서 s 만큼 떨어진 곳에 위치한 임의의 점에서 법선방향의 단위벡터를 \hat{u} , 접선방향의 단위벡터를 \hat{w} , 그리고 벡터의 오른손 법칙을 따라서 이 두 벡터와 수직을 이루는 단위벡터를 \hat{v} 로 정의한다면 각각의 단위 벡터들은 선형적으로 서로 독립적인 관계가 유지된다. 그러므로 권선상의 한 점에서의 병진운동과 회전운동에 의하여 발생하는 변위 δ 와 θ 및 이 때 작용하는 힘 \mathbf{P} 와 모멘트 \mathbf{M} 의 분력은 단위벡터를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_u & \delta_v & \delta_w \\ \theta_u & \theta_v & \theta_w \\ P_u & P_v & P_w \\ M_u & M_v & M_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

식 (1)의 양변을 권선을 따라 측정된 거리 s 로 미분을 하면 식 (2)와 같이 된다.

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} \delta_u & \delta_v & \delta_w \\ \theta_u & \theta_v & \theta_w \\ P_u & P_v & P_w \\ M_u & M_v & M_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_u & \delta_v & \delta_w \\ \theta_u & \theta_v & \theta_w \\ P_u & P_v & P_w \\ M_u & M_v & M_w \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

또한 Timoshenko의 보이론에 의하면 힘과 변위 사

이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_u + \theta_v}{GA\gamma} & \frac{P_v - \theta_u}{GA\gamma} & \frac{P_w}{EA} \\ \frac{M_u}{EI_u} & \frac{M_v}{EI_v} & \frac{M_w}{GJ} \\ 0 & 0 & 0 \\ P_v & -P_u & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이 식에서 E 는 영률, G 는 전단강성계수, A 는 권선의 단면적, γ 는 전단계수를 나타낸다. 또한 I_u 와 I_v 권선의 원형 단면에 대한 면적 관성모멘트를 표시하고 J 는 St. Venant의 전단상수이다. 본 논문은 원형 단면을 갖는 헬리컬 스프링의 경우로 제한하였으므로 $I_u = I_v$ 이고, $J = I_w$ 로 면적에 대한 극관성모멘트가 된다.

원통형 헬리컬 시스템의 경우에 권선의 곡률 κ 과 비틀림율 τ 는 권선의 각 α 와 스프링의 반경 R 에 대한 함수로 다음과 같이 나타낸다.

$$\kappa = \frac{\cos^2 \alpha}{R}, \quad \tau = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R} \quad (4a, 4b)$$

권선상의 단위벡터 \hat{u} , \hat{v} 와 \hat{w} 는 선형적으로 서로 독립적인 관계에 있으므로, 공간상에 존재하는 단위 벡터의 도함수도 다음과 같이 이 단위 벡터들의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & -\kappa \\ -\tau & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

식 (3)과 (5)를 식 (2)에 대입하여 변위와 힘에 대한 성분으로 정리하면 정적으로 평형인 시스템에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_u + \theta_v + \tau\delta_v - \kappa\delta_u}{GA\gamma} & \frac{P_v - \theta_u - \tau\delta_u}{GA\gamma} & \frac{P_w + \kappa\delta_u}{EA} \\ \frac{M_u + \tau\theta_v - \kappa\theta_w}{EI_u} & \frac{M_v - \tau\theta_u}{EI_v} & \frac{M_w + \kappa\theta_u}{EI_w} \\ \tau P_v - \kappa P_w & -\tau P_u & \kappa P_u \\ P_v + \tau M_v - \kappa M_w & -P_u - \tau M_u & \kappa M_u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

위 식을 변위와 힘의 성분으로 정리하면 식 (7)과 같은 12×12 의 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \\ \Pi \\ \Lambda \end{Bmatrix} e^{ks+j\omega t} \quad (9)$$

식 (6)에서 \mathbf{S}_{ij} 는 부행렬로 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & -\kappa & 0 & 1 & 0 \\ -\tau & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & -\kappa \\ 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{12} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{GA\gamma}, \frac{1}{GA\gamma}, \frac{1}{EA}, \frac{1}{EI_u}, \frac{1}{EI_v}, \frac{1}{GI_w} \right\}$$

$$\mathbf{S}_{22} = -\mathbf{S}_{11}^T$$

동적 평형 상태에 대한 시스템의 운동방정식을 구하기 위해서 관성력이 탄성력의 반대로 작용한다고 가정하여 D'Alembert 정리를 이용하면 식 (8)과 같은 편미분방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

이 식에서 $\mathbf{T}_{21} = \text{diag} \{ \rho A, \rho A, \rho A, \rho I_u, \rho I_v, \rho I_w \}$ 로 단위 길이당 질량이 ρ 인 스프링의 관성력에 의한 항을 나타낸다.

2.2 분산관계

코일 스프링의 파는 시간과 공간의 변화에 대한 것으로 구성되어 있다. 시간변화에 대한 것은 각주파수 ω 에 의하여 결정되고, 공간변화에 대한 것은 파동수 k 에 의하여 결정된다. 파동수 k 는 복소수로서 실수부는 파가 지수함수의 형태로 감쇠되는 현상을 나타내며, 허수부는 파동이 전달되는 모습을 나타낸다.

구속이 없는 구조물에 대한 자유파에서 한 요소에 대한 병진운동, 회전운동 및 응력은 모두가 공간에 대한 종속함수이므로 권선상의 한 요소의 응답을 시간에 대한 조화함수로 표시할 수 있다. 그 때 특정한 자유파에 대한 힘과 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

식 (9)를 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 12원 선형 연립 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(k[\mathbf{I}] - \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \\ \Pi \\ \Lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (10)$$

이 식에서 $\mathbf{S}_{21} = -\omega^2 \mathbf{T}_{21}$ 이다. 식 (10)이 힘과 변위에 대한 무의미한 해를 얻지 않기 위해서는 행렬 $(k[\mathbf{I}] - \mathbf{S})$ 의 행렬값이 0이 되어야 한다. 식 (10)에 의하여 구성된 12차 고유값 해석 문제는 파가 전달되는 데 있어서 6개의 전방 속도와 6개의 후방속도에 관계된 12개의 파동수를 포함하고 있다. 그러므로 주파수 ω 가 주어진다면 식 (10)으로 표시된 시스템의 고유값 해석으로부터 구속이 없는 자유상태에서의 파동수를 구할 수 있다. 또한 고유벡터 $\{\Delta, \Theta, \Pi, \Lambda\}^T$ 로부터 파동수 k 와 주파수 ω 에서 자유파의 전달에 대한 변위의 비와 응력의 비를 알 수 있다.

3. 해석 및 토의

이 장에서는 소형 승용차의 전륜 현가장치에 사용되는 헬리컬 스프링을 모델로 사용하여 해석을 수행하고 이 때 스프링에서의 파의 변화를 고찰하였다. 모델로 사용된 스프링은 직경이 12 mm인 철선을 6번 감아 만든 것으로 스프링의 반경이 65 mm, 높이가 320 mm이고 권선의 각은 약 7.44°로 이루어져 있다. 모델에 사용된 스프링은 차체의 하중에 의하여 스프링이 예하중을 받음으로서 실제 작용하는 스프링의 권선의 수는 가운데 4개가 되도록 양단의 권선의 각이 가운데 각보다 약간 작은 값을 갖는 형상으로 이루어져 있다. 그러나 본 논문에서는 해석의 편의를 위하여 권선의 각에 대한 차이를 고려하지 않았다.

주파수에 따른 파동수의 변화를 나타내는 분산곡선은 파의 전달에 대한 유용한 정보를 줄 수 있다. 이러한 분산곡선은 식 (9)에서 주파수 ω 가 주어질 때 이 식의 고유값 해석을 통하여 구한 파동수 k 를 사용하여 얻을 수 있다. 이 해석은 감쇠손

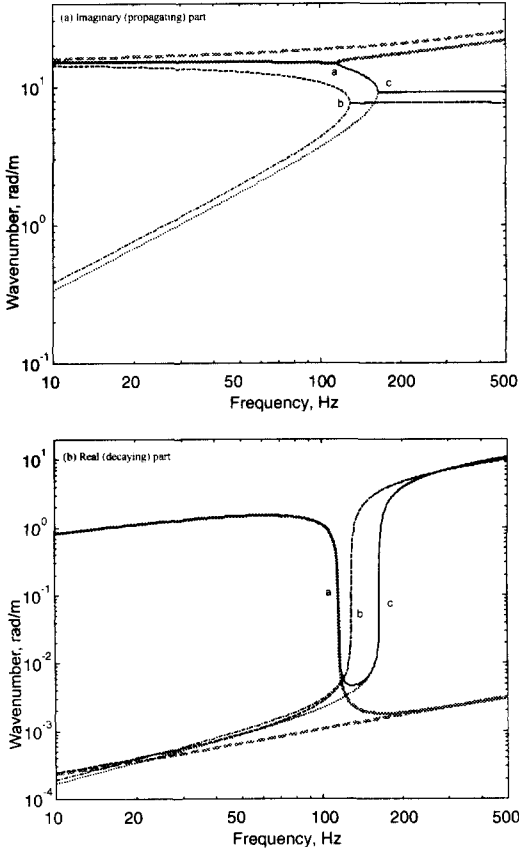


Fig. 3 Dispersion curves for spring. wave 1, - · - wave 2, - - - wave 3, — wave 4; in grey: — wave 5, - - - wave 6

실계수로 10^{-3} 의 상수값을 사용하여 MATLAB으로 수행하였다.

Fig. 3은 해석에 사용된 스프링의 각각의 운동에 대한 분산곡선을 보여주는 것으로 Fig. 3(a)가 파의 전달 과정을 보여주는 허수부를 나타내고 Fig. 3(b)는 파의 감쇠현상을 나타내는 실수부를 표시하고 있다. 일반적으로 헬리컬 스프링의 분산곡선은 주파수에 따라 특성이 변하는 현상을 보이게 되는데, Fig. 3의 점a, b, c는 분산곡선의 특성이 변하는 점을 표시하고 있다. 해석에 사용된 스프링의 경우에 a점은 144 Hz, b점이 166 Hz이고 c점이 210 Hz 부근에 위치하고 있다. 이 세 점에 의하여 주파수 범위는 4개의 영역으로 구분된다. 첫 번째 영역은 a점보다 주파수가 낮은 영역으로 1번파와 2번파는 주파수가 0 Hz일 때 파동수도 0 rad/m이고, 주파수에 따라 증가하고 있음을 알 수 있다. 이전의 연구에서^(4, 5) 밝혀진 바와 같이 이 두 파는 스프링의 비틀림 운동과 축방향 운동에 관련된 파로 매우 유사한 형태의 분산곡선을 보이고 있다. 즉

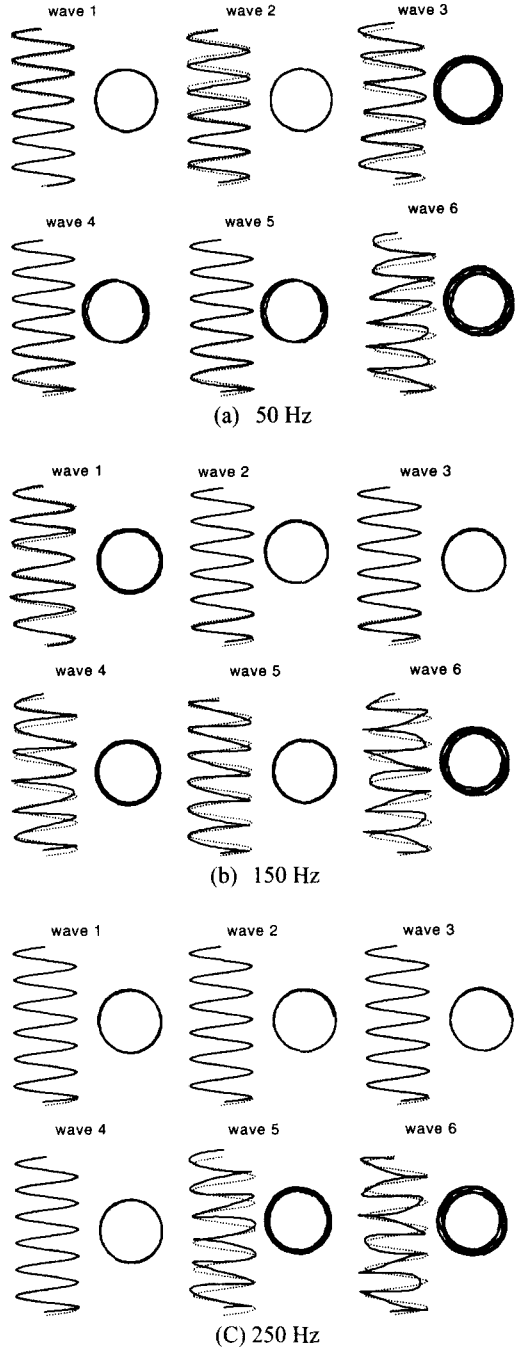


Fig. 4 Displacement during free wave motion. Solid line: displaced shape, dotted line: undisplaced shape

두 파에 대한 분산곡선이 매우 인접해있으므로 1번파와 2번파에 의한 모드가 쉽게 연성을 이룰 수 있다. 3번파와 6번파의 파장은 0 Hz에서 스프

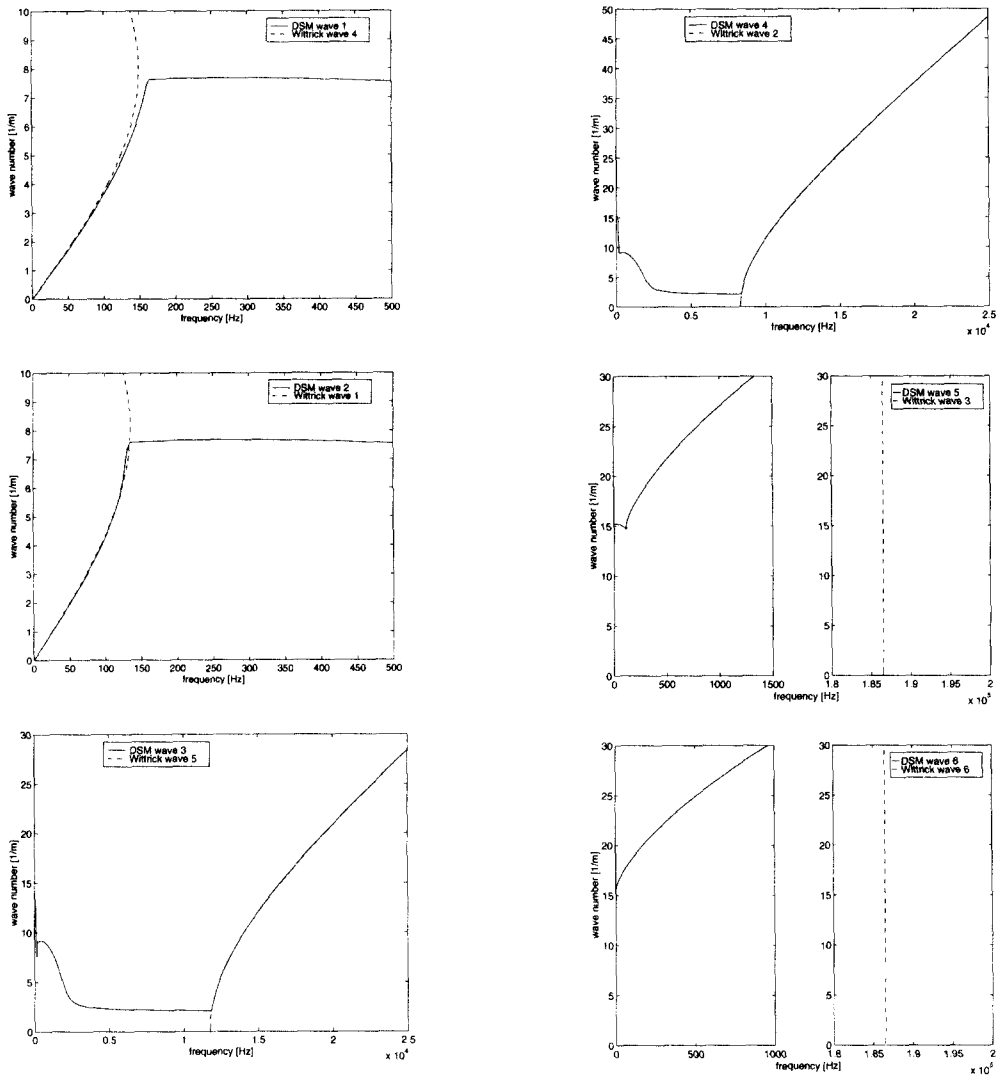


Fig. 5 Comparison of dispersion curves: Solid line (DSM): presented method, dotted line (Wittrick): Wittrick's wave

링의 권선이 일회전한 길이에 해당하는 $2\pi R/\cos\alpha$ 에서 시작된다. 4번파와 5번파의 파장은 스프링 권선의 일 회전한 길이의 역수에 해당하는 값에서 시작되지만 이동거리가 짧은 파(near field waves)이므로 파가 멀리 전달되지 못하는 현상을 보이게 된다. 이 두 파는 제1영역에서 서로에 대한 공액복소수 관계로서 동일한 분산 특성을 나타내고 있다. 이 두 파는 서로 공액복소수의 형태를 취하게 된다.

c점을 지나면서 1번파와 4번파도 공액복소수의 형태로 나타나며, 이동 길이가 짧은 파로 변하는 것을 알 수 있다. 그러므로 c점 이상의 높은 주파수 영역에서는 단지 5번파와 6번파만이 이동거리

가 긴 파로 남게 된다.

Fig. 4는 분산곡선과 관련된 여러 가지 형태의 파를 보여주는 것으로 파가 자유롭게 이동하는 한 순간에 발생하는 스프링의 변위를 나타낸 것이다. Fig. 4(a)는 주파수가 상대적으로 낮은 영역인 50 Hz에서의 결과를 나타낸 것으로 1번파와 2번파는 이동거리가 긴 파로서 파장은 스프링 권선이 8 회전한 길이에 해당한다. 3번파와 6번파는 수평축에 대하여 권선의 횡방향 운동과 회전운동이 복잡적으로 나타나고 있으며, 4번파와 5번파는 이동거리가 짧은 파로 급격히 감쇠되고 있다.

Fig. 4(b)는 150 Hz에서의 운동을 나타낸 것으로

스프링에 대한 가진주파수가 b점과 c점 사이에 위치하고 있을 경우에 해당한다. 이 영역에서는 수평축에 대한 권선의 회전 운동과 관련된 4번파와 5번파가 "cut-on"되면서 다른 파에 비해 우선하게 된다. 2번파와 3번파는 전달되는 현상이 약해지면서 이동거리가 짧은 파로 변하게 된다. 한편 1번파와 6번파는 Fig. 4와 비슷한 특성을 유지하고 있다.

Fig. 4(c)는 비교적 주파수가 높은 영역인 250 Hz에서의 결과를 나타낸 것으로 5번파와 6번파만이 이동거리가 긴 파로 남아있다. 이 두 파는 축방향과 굽힘방향의 운동에 의하여 가진될 수 있음을 보여주고 있다.

Fig. 5는 본 논문에서 제시한 방법으로 얻은 분산곡선을 참고문헌 (4)의 Wittrick의 근사값에 의하여 그린 것을 비교하였다. Wittrick은 권선의 각을 "0"으로 가정하여 헬리컬 스프링의 위상속도(phase velocity)와 군속도(group velocity)를 구하였다. 파장이 충분히 길고 권선의 각이 작을 경우 이 Wittrick의(4) 근사값에 의하여 얻어진 1번파와 2번파의 위상속도는 비교적 정확하였다. 그러나 관심 주파수 영역에서 다른 파들의 위상속도는 상당한 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 오차는 3차 방정식의 근을 구하기 위한 근사식과 이에 사용된 가정에 의하여 발생하고 있다. 일반적으로 군속도는 가진점으로부터 에너지의 감쇠율을 나타내므로 에너지가 전달되는 현상을 설명하기 위해서는 위상속도 보다 더 중요하다. 군속도는 주파수를 파동수로 편미분한 값이므로 분산곡선에서는 기울기의 역수에 해당하는 값을 갖게 된다.

Wittrick의 근사값에 의하면 파장의 제곱이 무한대로 갈 경우, 비틀림과 축방향 모드에 해당하는 1번파와 2번파를 제외한 모든 군속도는 "0"이 된다. 이때 1번파와 2번파의 군속도는 위상속도와 동일한 값을 갖게 된다. 즉, 이 두 파만이 분산없이 에너지를 전달하며 다른 파와 관련된 에너지는 전혀 전달되지 못함을 의미하고 있다. 그러나 본 논문에서 제시한 분산곡선에 따르면 영역에 따라 존재하는 군속도의 수는 달라지며 이들에 의하여 분산이 발생되고 모든 파들이 해당 에너지를 전달하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

이 논문에서는 헬리컬 스프링에서 자유파에 대한 운동방정식을 Timoshenko 보 이론과 Frenet의 공식을 사용하여 유도하였다. 또한 분산관계를 살펴봄으로써 스프링에 존재하는 파동은 4개의 영역

에서 서로 다른 특성을 보이고 있다. 특히 저주파수 영역에서는 4개의 파만이 이동파인 반면에 특정 주파수 이상에서는 축방향과 굽힘방향의 운동이 연성을 이룬 파의 형태로 두 개의 파동만이 존재하게 됨을 알 수 있었다. 이와 같은 주파수 영역에 따른 파동의 특성을 이용하여 헬리컬 스프링의 운용 영역을 결정하게 되면 스프링의 내부 공진에 의한 효과를 최소화할 수 있다. 또한 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 분산곡선을 참고문헌 (4)의 근사값으로 구한 것과 비교하였다. 이 분산곡선으로부터 여러 주파수 영역에서 다른 파에 비하여 우선하는 파의 형태와 에너지 전달에 대한 것을 고찰하였다.

향후에는 이러한 결과를 이용하여 헬리컬 스프링 권선의 각도에 따른 파의 변화 및 주파수 변화에 따른 동강성 변화를 연구하여 스프링 내부 공진에 대한 연구가 좀 더 진행되어야 하겠다.

후기

본 논문은 2001년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Love, A.E.M., 1899, "The Propagation of Waves of Elastic Displacement along a Helical Wire," *Transaction of Cambridge Philosophy Society*, 18, pp. 364-374.
- (2) Timoshenko, S.P., 1936, *Theory of Elastic Stability*, 1st Edn., NY, MacGraw Hill.
- (3) Wahl, A.M., 1963, *Mechanical Springs*, 2nd Edn., NY, MacGraw Hill.
- (4) Wittrick, W.H., 1966, "On Elastic Wave Propagation in Helical Springs," *International Journal of Mechanical Science*, 8, pp. 25-47.
- (5) Jiang, W., Jones, W.K., Wang, T.L. and Wu, K.H., 1991, "Free Vibration of Helical Springs," *Transaction of ASME*, 58, 222.
- (6) Shinha, S.K. and Costello, G.A., 1978, "The Numerical Solution of the Dynamic Response of Helical Springs," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 12, 949.
- (7) 김도중, 이덕영, 1999, "원통형 스프링의 동특성 해석을 위한 헬리컬 로드 유한요소 개발," 한국소음진동공학회지 제9권 제3호, pp. 544-553.
- (8) Mottershead, J.E., 1980, "Finite Elements for Dynamical Analysis of Helical Rod," *International Journal of Mechanical Sciences*, 22, pp. 267-283.
- (9) Pearson, D., 1982, "The Transfer Matrix Method for the Vibration of Compressed Helical Springs," *Journal of Mechanical Engineering Science*, 24, pp. 163-171.
- (10) Yildirim, V. and Ince, N., 1997, "Natural Frequencies

- of Helical Springs of Arbitrary Shapes," *Journal of Sound and Vibration*, 204(2), pp. 311~329.
- (11) Pearson, D. and Wittrick, W.H., 1986, "An Exact Solution for the Vibration of Helical Springs using a Bernoulli-Euler Model," *International Journal of Mechanical Sciences*, 28, pp. 83~96.
- (12) Lee, J. and Thompson, D.J., 1999, "Application of the Dynamic Stiffness Method to the Vibration of Helical Springs," ISVR Technical Memorandum No. 842, University of Southampton.
- (13) 이재형, 김성걸, 허승진, Thompson, D.J., 2000, "동강성법을 이용한 코일 스프링의 진동 해석," 한국소음진동공학회 창립10주년 기념소음진동학술대회논문집, pp. 1933~1938.