기획 교구

대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.1, 155~184 March 2001

기하판을 활용한 학교수학의 지도

김 남 희 (전주대학교)

Ⅰ. 머리말

기하는 학교수학교육과정에서 중요한 영역이다. 기하에 대한 직관, 지식, 통찰 등은 일상생활의 상황에서 유용하게 작용할 뿐 만 아니라 수학의 다른 영역을 이해해 나가는 경우에도 강력한 영향을 미친다. 기하학습은 수학적 개념이 추상화되는 근원인 실제 세계를 여러 가지 방식으로 관찰하면서 시작된다. 따라서 학교수학의 학습에서는 모형, 벽돌, 그래프 종이 그리고 기하판 등의 구체적인 자료를 이용하여 관계와 규칙성을 탐구시키면서 여러 도형의 성질을 이해할 수 있게 하는 적절한 문제상황을 만들어주는 것이 필요하다. 그러한 문제상황 속에서 학생들은 공간 감각과 더불어 기하의 특정한 개념을 직관하고 의식해 나갈 수 있을 것이다(구광조 외 2인, 1992, pp.73-74).

본 연구에서는 학교현장의 기하수업에서 활용될 수 대표적인 구체적 조작물의 하나인 '기하판(Geoboard)'을 논의의 대상으로 하여 기하판 활동의 수학교육적 효과를 분석하고 이를 수업에 바르게 적용할 수 있도록 고안된 여러 가지 학습활동을 제공해 보고자 한다. 기하판 위에서의 활동은 탐구를 위한 끝없는 가능성과 체험을 제공함으로써 도형을 구성하는 과정에서 공간 지각력의 향상 나아가 문제 해결력의 향상을 꾀하게 한다. 따라서 오래 전부터 기하판은 학교수학의 여러 가지 기하학적 개념의 지도에 그 활용을 권장 받아 온 교구였다. 이미 현장의 수학교사들은 여러 경로를 통하여 기하판 교구의 기본적인 설명과 사용방법을 접하였을 것으로 생각되는 바, 본 고에서는 기하판 교구의 기본적인 설명과 사용방법에 대한 언급은 가능하면 간단하게 다루고 학교수학의 내용과 연결지어 기하판이 다루어질 수 학습상황을 소개하는데 많은 지면을 할애할 것이다. '수학적 힘'의 육성을 강조하는 제 7차 교육과정[1]의 이념, 수학적 발견술, 문제해결교육에 대한 관심이 증가하고 있는 현재

---

1) 우리나라 제 7 차 수학과 교육과정은 문제해결력과 더불어 제반 고등사고능력을 함께 포함

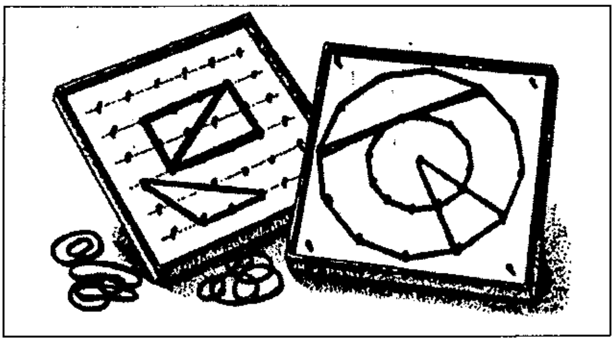
의 수학교육적 사조에 비추어 기하판을 활용한 수업의 내용을 어떻게 전개해 나가는 것이 바람직한가에 초점을 맞추어 논의해 나갈 것이다.

본 연구에서 제시한 학교수학의 지도 내용은 학교 현장의 초, 중등학교 수학교사들이 현장에서 수학수업을 행하게 될 때 구체적으로 활용될 수 있다. 학생들은 기하판을 이용한 문제해결경험을 통해 학교수학에서 다루어지는 여러 가지 수학적 개념을 구체화된 상황 속에서 다루게 되면서 공간감각 및 수학적 문제해결능력을 기르는데 큰 도움을 얻을 수 있게 될 것이다.

Ⅱ. 기하판과 수학 학습-지도

1. 기하판

기하판[2]은 [그림 1]에 제시된 바와 같이 격자 모양으로 못이 박힌 나무(또는 플라스틱)로 된 판으로서 못에 고무줄을 걸어 여러 가지 도형을 만들 수 있게 되어 있는 구체적 조작물이다. 원모양이 되도록 못을 박은 원형기하판(circular geoboard)도 있다.

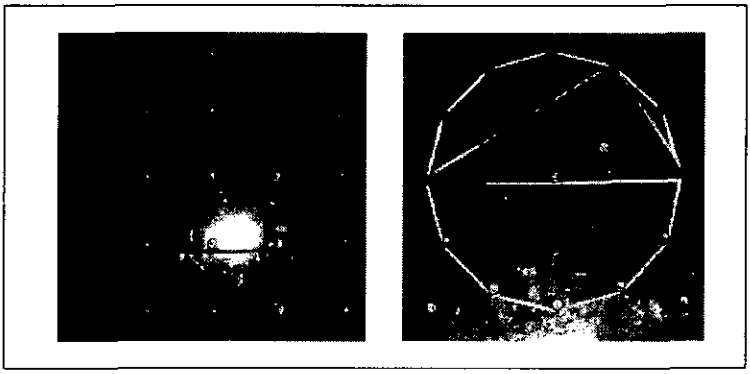


[그림 1] 기하판과 원형 기하판

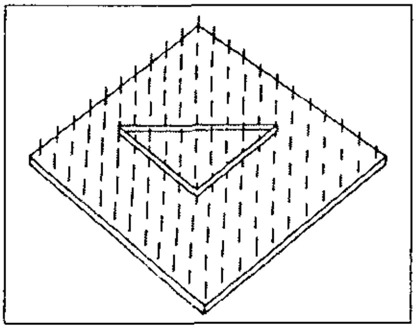
하는 '수학적 힘의 육성'을 그 목적으로 하고 있다. 여기서 수학적인 힘이란 창의적 사고력, 논리적 사고력, 비판적 사고력, 문제해결능력, 추론능력, 의사소통능력, 수학에 대한 자신감과 태도, 수학과 인접 학문과의 관련성 및 수학의 유용성 인식 등을 포함하는 포괄적인 개념이다(이준열 외 4인, 2000, p.29)

2) 기하판을 뜻하는 영어 지오보드(Geoboard)의 사전적 의미는 '토지(지구), 판자'이다.

널빤지에 못을 박아 고무줄이나 실을 걸쳐 여러 가지 도형을 구성할 수 있도록 고안된 기하판[3]은 체험 수학을 위한 수학과 교구로서 이미 우리 나라에서도 상품화되어 판매되고 있다([그림 2] 참조).



[그림 2] 우리 나라에 상품화되어 있는 기하판과 원형기하판의 예



[그림 3] 페그보드의 예 (Copeland, 1970, p.278)

영어로 지오보드(Geoboard) 또는 페그보드(Pegboard)[4]라고 불리우는 기하판은 고무줄을 나무 못이나 못에 꼭 맞게 걸어서 여러 가지 모양 또는 기본 도형을 구성하면서 둘레의 개념이나 면적관계 등을 탐구할 수 있게 한다(Copeland, 1970, p.278).

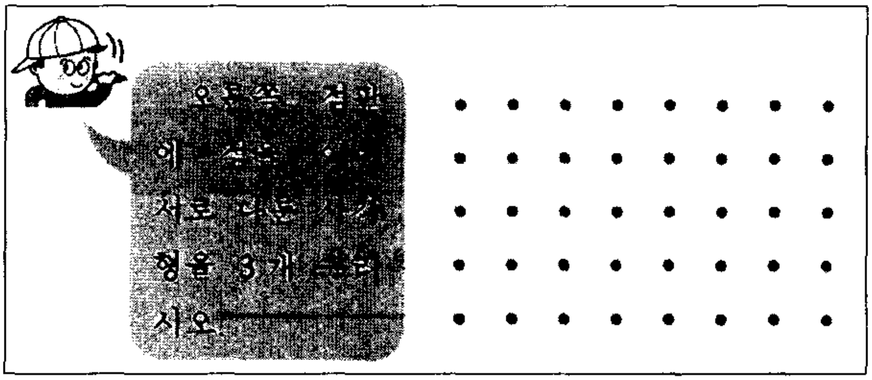
기하판과 고무줄이 준비되지 않았을 경우에는 학생들에게 격자로 점이 찍혀있는 종이를 주고 점을 펜으로 연결하는 작업을 하게 함으로써 기하판 위에서와 동일한 활동을 행하게 할 수 있다. 격자로 점이 찍혀있는 종이는 '점판'이라는 용어로 불리고 있다(강문봉 외 18인, 1999, p.466)[5]. 우리 나라 제 7 차 교육과정에 따른 초등학교 수학과 교

3) 기하판의 색상은 보통 검은색으로 되어있는데 이는 색깔있는 고무밴드를 사용할 경우 잘 보이기 위한 것이다. 보통 한 세트에는 다섯 개의 기하판과 100개 이상의 고무밴드가 들어있다. 5개의 기하판은 나란히 놓으면 하나의 큰 기하판이 되도록 연결되어있다(김용태 외 3인, 1998, p.67).

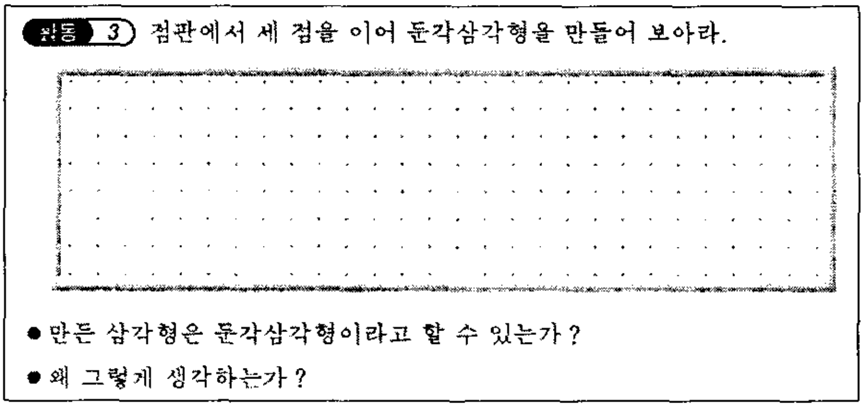
4) Pegboard의 사전적 의미는 '못박이 판(일종의 놀이기구)'이다.

5) 점이 찍힌 종이가 아니라도 보통의 기하판을 '점판'이라는 용어로 부르기도 한다(강완, 백석윤, 1998, p.227)

과서에도 '점판'을 이용한 도형지도의 예를 찾아볼 수 있다([그림 4, 5] 참조). 격자 모양으로 점이 배열된 점판이 외에도 모눈종이를 기하판 대신 사용할 수 있다([그림 10] 참조).



[그림 4] 점판을 이용하여 사각형 알아보기(교육부, 2000, 수학 익힘책 2-가, p.32)



[그림 5] 점판을 이용하여 둔각삼각형 그리기 (교육부, 2001, 수학 4-가, p.55)

"기하판이 무엇인가?"에 대한 물음에 가장 일반적으로 할 수 있는 대답은 '학교수학에서 기하를 탐구하기 위해 사용될 수 있는 매우 흥미로운 구체적 조작물'이라는 것이다. 기하판은 수학 학습을 위한 활동을 유발하는 활동주의적 수학교육과 교구중의 하나로서 여러 가지 기하학적인 관계와 공간적인 관계들을 탐구하는데 있어서 매우 유용하게 사용될 수 있다.

기하판을 통해 교사는 기하영역에서의 수학적 개념이나 원리를 지도할 수 있을 뿐 만 아니라 나아가 기하 영역이외의 수학내용에도 기하판을 다양하게 활용할 수 있다(본 장의 4

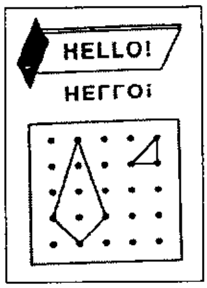
절 참조).

2. 기하판과 수학교육

1) 추상화 이전의 구체화 활동

피아제(Piaget)의 발생적 인식론에 근거한 수학 학습-지도원리 중 "구체적인 내용에서 추상적인 내용으로 나아가야 한다"는 내용은 기하판을 이용한 수학학습에 함의하는 바가 있다. 학생들은 청년기에는 어느 정도 형식적이고 추상적인 조작능력을 갖추게 된다. 피아제도 약 12-13세이면 형식적 조작기에 들어간다고 주장하고 있다. 따라서 중·고등학교 이하의 학생들을 위한 수학학습은 구체물을 이용하거나 구체적인 장면을 통해 시작될 필요가 있다. '학교수학'의 기획란을 통해 소개되었던 퀴즈네어막대, 딘즈블럭, 탱그램, 대수타일 등의 교구와 더불어 본 고에서 다루고 있는 기하판 교구는 수학의 개념을 구체적이고 실제적인 활동을 통해 다룰 수 있게 하는 훌륭한 수학학습도구이다(김남희, 1999a; 1999b; 2000a; 2000b; 2000c).

어떤 수학교육자들은 학생들이 촉각, 청각, 시각적인 교수양식에서 특히 손으로 조작하는 활동들에 잘 반응한다는 것을 주장한다. "기하학습은 수학적 개념이 추상화되는 근원인 실제 세계를 여러 가지 방식으로 관찰하면서 시작되는 것이다. 따라서 학생들이 기하의 아이디어들을 탐구할 때에는 물리적인 모델을 사용하여야만 하며 구체적 조작물을 가지고 잘 고안된 여러 가지 활동을 해야 만 한다"라고 하면서 기하학습과 관련된 교구의 예로 <그림 6>과 같은 거울(Plexigals mirror)과 기하판을 권장하고 있다(Geddes, D. & Fortunato, I., 1993, pp.216-217).



[그림 6]
기하교구의 예:
거울과 기하판

2) 초등수준에서의 '구성하기'

'구성하기(Constructing)'에는 다양한 의미가 부여되며 그 학습에 있어서도 다양한 수준이 존재한다. 유클리드 기하에서 구성하기(Constructing; 작도)는 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 가지고 도형을 그리는 것을 의미한다. 그러나 초등수준에서 가장 자연스러운 구성은 특별한 조건하에서 어떤 모양이나 도형을 결합하거나 만드는 것이다. 이러한 활동의 시작단계에서는 구체적인 자료(예를 들면, 블록과 같은)로 활동을 하고 나중에는 정신적으로 그 활동을

재구성하는 단계가 진행된다(대한수학교육학회, 2000, p.146).

기하판은 블록, 퍼즐, 탱그램 등과 함께 구체적인 활동기 동안에 사용될 수 있는 활동주의적 수학학습자료이다. 유클리드 기하에서는 공리적인 작도 기구로서 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 언급하였지만 자와 컴퍼스를 이용하지 않고도 초등수준에서 기하개념을 지도하기 위해 사용할 수 있는 작도기구가 바로 기하판과 고무줄이다. 이 교구는 도형의 구성, 도형의 관찰, 도형의 면적, 도형의 둘레, 측정 등에 사용될 수 있는 훌륭한 교구인 것이다(김용태 외 3인, 1998, p.67).

3) 현실적 수학교육에서의 기하

네델란드의 프로이덴탈(Freudenthal)을 중심으로 창시된 현실적 수학교육(RME; Realistic Mathematics Education)에서는 학교수학교육과정에서 기하교육에 포함되어야 할 주요 항목들로서 다음을 제시한다. 보기와 투영하기(Sighting and projecting), 방향 정하기와 위치 정하기(Orienting and locating), 공간추론(Spatial reasoning), 변환(Transforming), 그리기와 구성하기(Drawing and constructing), 측정하기와 계산하기(Measuring and calculating)가 그것들이다. 실제로 현실적 기하의 내용이 포함되어 있는 네델란드의 수학교과서에는 위의 항목들이 구체적 조작물과 함께 다양한 기하문제들 속에서 예시되고 있다.

현실적 기하의 내용을 자세히 살펴보면 '수학화'라는 개념과 강하게 연결되어 있음을 알 수 있는데, 특히 블록, 기하판, 수직선, 그래프 등의 여러 가지 자료를 활용함으로써 구체를 통해 문제들을 시각화하여 다룰 수 있도록 권고하고 있다. 아래의 인용문은 본 고의 논의 대상인 기하판의 활용에 대한 수학교육적 가치에 대해 시사하는 바가 있다.

> 기하문제는 동기를 유발하는데 유용하다. 기하문제를 해결하기 위해서는 직관, 착오, 그리기, 추론 등을 혼합하여 활용하여야 하는 바, 알고리즘만으로는 기하문제를 해결할 수 없다. 또한 문제를 해결하기 위한 추론은 항상 시각적 보조도구의 뒷받침을 필요로 한다(대한수학교육학회, 2000, pp.131-154).

기하판 교구는 기하의 문제해결에 있어서 유용한 시각적 보조도구의 역할을 할 수 있다. 초등교육에서 기하의 도입과 관련하여 명심할 것 다음의 두 가지이다. 첫째는 기하를 새로운 관점에서 다루어야 한다는 것이고 둘째는 교사들이 자신들이 학교에서 배워왔던 기하학습방법(즉, 증명를 포함한 기하의 내용을 어떻게 암기할 것인가 하는 암기방법으로서의 기하학습)과는 전적으로 다른 방식으로 기하를 아이들에게 가르쳐야 한다는 것이다.

결론적으로 현실적 기하는 종이와 연필만을 가지고 하는 공부가 아니며, 또 교사는 내용을 설명하고 학생은 교사가 설명하는 것을 모방하는 방식으로 학습을 하는 것이 아니다. 현실적 기하 교수-학습과정의 핵심은 탐구, 실험, 논의, 반성이다(대한수학교육학회, 2000, p.150). 이러한 관점에서 보았을 때 기하판을 활용한 학습은 학생들에게 기하학습에 대한 동기유발을 시킬 수 있고, 시각화, 모델링, 추론, 반성, 적용과 같은 수학 학습의 다양한 측면에 대한 경험을 제공할 수 있는 것이다.

4) 활동주의 수학교육과 수학화

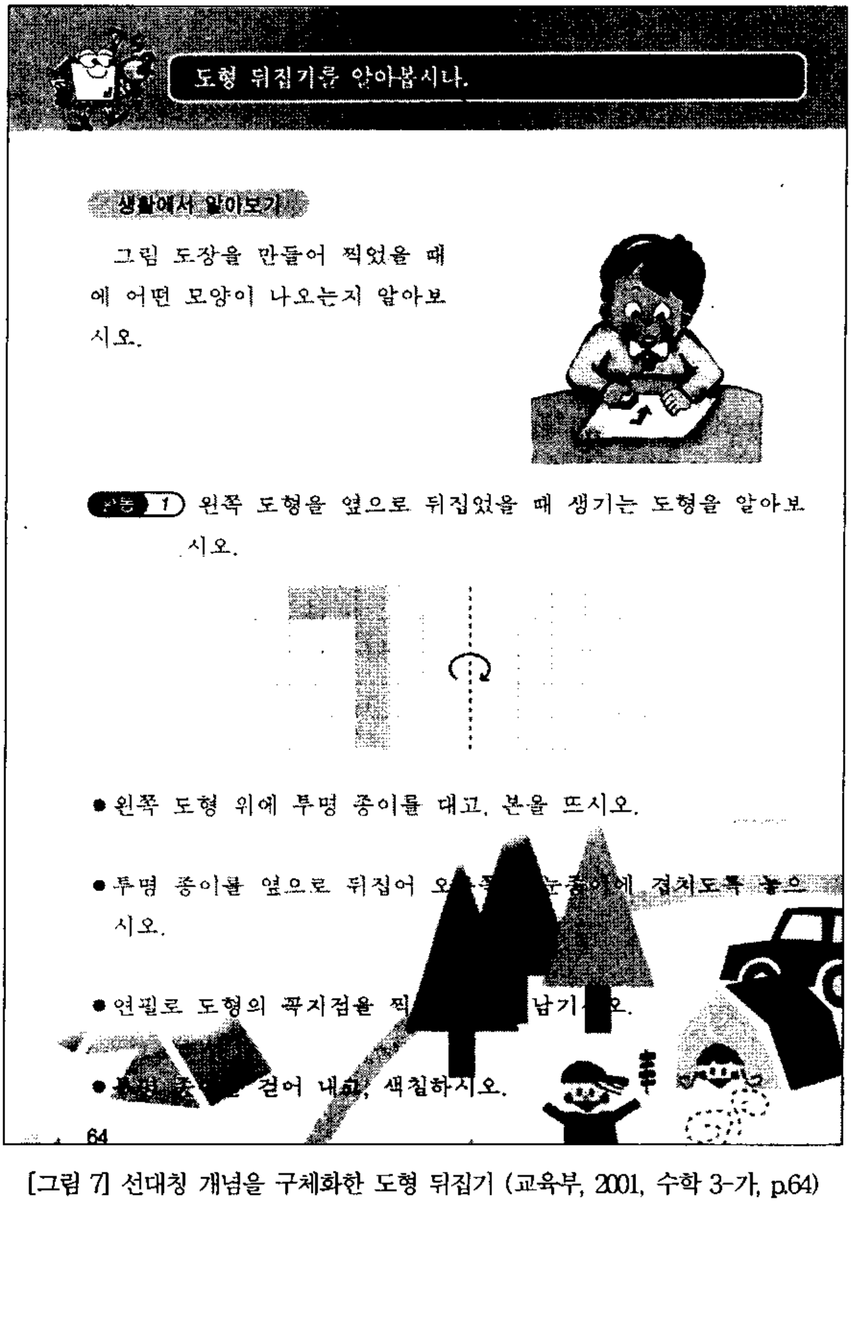
기하는 '시각적 수학'이라고 불릴 수 있는 분야이다. 심상을 수반하는 시각적 기호를 구사하는 기하학적 사고는 수학의 학습과 연구에 없어서는 안 되는 자산이다(우정호, 1998, p.305).

수학에는 기성산물인 지식의 기록으로서의 수학과 발생중인 사고활동으로서의 수학이 있다. 활동주의 수학교육은 전통적인 수학교육의 결함을 기성지식의 전달에서 비롯되는 것으로 보고 수학교육의 개선방안을 사고활동으로서의 수학 곧, 수학화를 경험시키는 방안에서 찾고 있는 것이 특징이다. 여기서 수학화란 수학을 수학 내적, 외적인 상황이나 문제와 관련지어 창안해 나가는 과정을 말한다.

기하학은 공간을 수학화하는 것이다. 공간적인 형태를 도형으로 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이며, 평행사변형의 여러 가지 성질을 정리하여 평행사변형을 정의하는 것은 평행사변형의 개념을 수학화하는 것이다. 평행사변형의 여러 가지 성질을 논리적 관계에 따라 구조화하는 것도 수학화이다. 수학화 없는 수학은 있을 수 없는 바, 수학화 활동을 통한 재발명 과정으로 기성수학을 지도하고 학습하는 것이 진정한 의미의 수학교육이 될 것이다. Freudenthal(1973)은 기하의 학습은 공간에 대한 경험을 조직화하는 수학화 활동이어야 하며 기하가 기성의 논리체계로서 학생들에게 부과될 것이 아니라 공간내의 현상을 수학적으로 조직화하는 것으로부터 시작되어야 하며 그러한 활동의 형태가 도형이 되어야 함을 이야기하고 있다. 학생이 도형을 기하의 내용으로 파악하게 되면 그는 다양한 조직화를 시작할 수 있게 된다. 일단 많은 평행사변형을 관찰한 학생은 평행사변형이 무엇인가를 파악할 수 있을 것이다. 그러나 통상적인 지도과정에서 교사가 평행사변형의 형식적인 정의를 전달하는 것은 학생에게 의미를 주기 어렵다. 수학화되어 있는 지식의 기록을 그대로 해설하는 것은 영원한 교육적인 어리석음이며 활동으로서의 수학이 학습자에게 교육되어야 한다(우정호, 1998, pp.308-309).

Freudenthal은 기하학적 사고를 개발하기 위한 진정한 방식은 학생들에게 기하화활동을

경험하도록 하는 것이라고 주장한다. 간단한 예로 기하의 '선대칭 도형'의 개념은 생활 속의 예([그림 7] 참조)를 통해 실질적인 의미로 취급하고 [그림 8~9]와 같이 기하판 활동 속에서 선대칭도형의 이미지를 다룰 수 있게 한 후, 선대칭도형에 대한 형식적인 정의가 학습되는 것이 바람직하다는 것이다.


도형 뒤집기를 알아봅시다.

생활에서 알아보기

그림 도장을 만들어 찍었을 때에 어떤 모양이 나오는지 알아보시오.

활동 1 왼쪽 도형을 옆으로 뒤집었을 때 생기는 도형을 알아보시오.

● 왼쪽 도형 위에 투명 종이를 대고, 본을 뜨시오.

● 투명 종이를 옆으로 뒤집어 오 … 에 겹치도록 놓으시오.

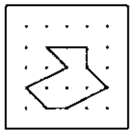
● 연필로 도형의 꼭지점을 찍 … 남기시오.

● … 걸어 내고, 색칠하시오.

64

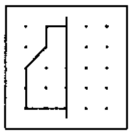
[그림 7] 선대칭 개념을 구체화한 도형 뒤집기 (교육부, 2001, 수학 3-가, p.64)

2. 오른쪽 도형을 거울에 비춰보면 어떤 모양 일지 그려보아라



[그림 8] 기하판을 이용한 도형 뒤집기 활동 (수학사랑, 2000, 통권23호, p.72)

(2) 대칭 - 기하판 두 개를 이용하여 대칭을 스스로 알게 한다.

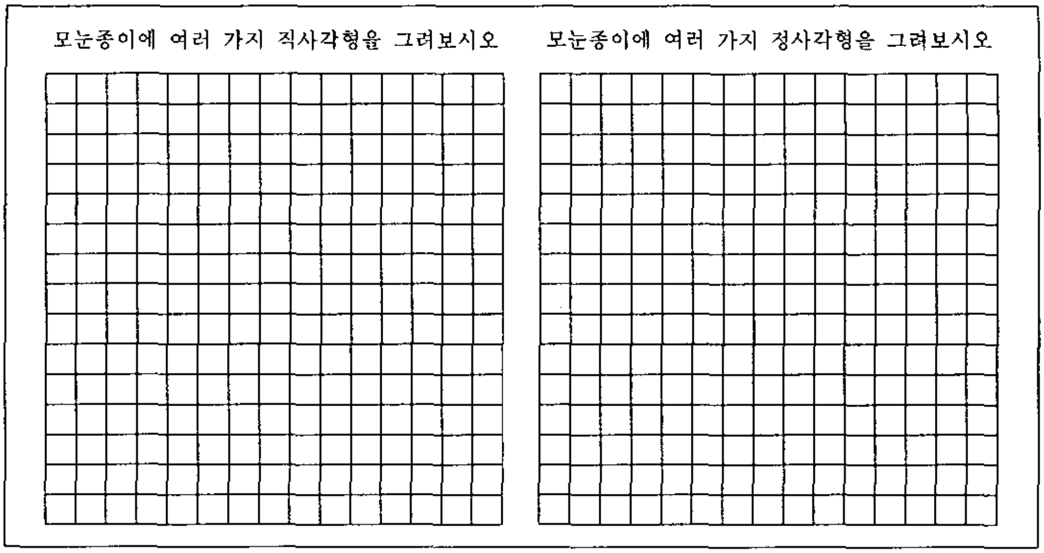


[그림 9] 선대칭 개념을 다루는 기하판 활동 (수학사랑, 1999, 통권16호, p.61)

[그림 8~9]와 같은 활동은 학생들로 하여금 기하판이나 거울을 가지고 반사(reflection)의 개념이 떠오르는 탐구활동을 할 수 있게 한다(강문봉 외 18인, 1999, p.463). 한 직선에 대하여 반사가 이루어지면 즉, 반사된 도형이 원래의 도형과 일치하면 그 도형은 선대칭도형이 됨을 활동 속에서 익힐 수 있게 하는 것이다. 이러한 활동을 통한 학습은 현실적 수학교육(RME)이 기하교육에서 강조하는 보기와 투영하기, 방향 정하기와 위치 정하기, 공간추론, 변환, 그리기와 구성하기의 여러 측면이 복합되어 진행된다.

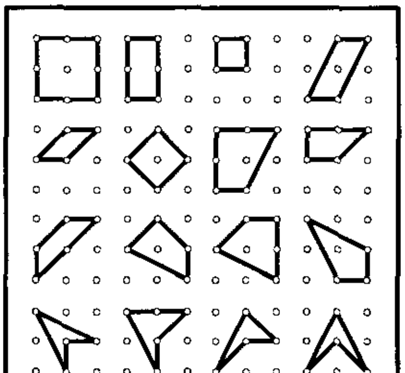
위와 같은 활동의 예 이외에도 기하판은 도형의 관찰, 도형의 면적, 도형의 둘레, 측정 등을 포함한 학교수학의 여러 학습에 널리 활용될 수 있으며 교사나 학생들은 기하판을 통해 기성의 지식을 활동과 더불어 풍부하게 다룰 수 있게 된다.

또 다른 예를 들어보자. 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에 따른 3-가 단계 수학의 지도 내용인 [그림 10]은 기하판 아이디어를 모눈종이 위에서 구현한 예로써 도형의 구별, 도형의 구성, 도형의 시각화, 도형의 특성을 탐구하는 학습활동을 제공한다. 이러한 학습활동을 통해 일단 많은 종류의 직사각형, 정사각형을 구성하고 관찰한 학생들은 통상적인 지도과정에서 도형의 형식적인 정의만을 접한 학생들보다 직사각형이 무엇인가, 정사각형이 무엇인가, 직사각형과 정사각형과의 관계가 어떠한가를 파악하는데 훨씬 더 유리한 입장에 서게 되는 것이다.



[그림 10] 기하판 활동과 유사한 모눈종이 위에서의 도형 학습
- 도형의 구별, 도형의 구성, 도형의 시각화, 도형의 특성을 탐구할 수 있는 학습활동 -
(교육부, 2001, 수학 3-가, p36-38)

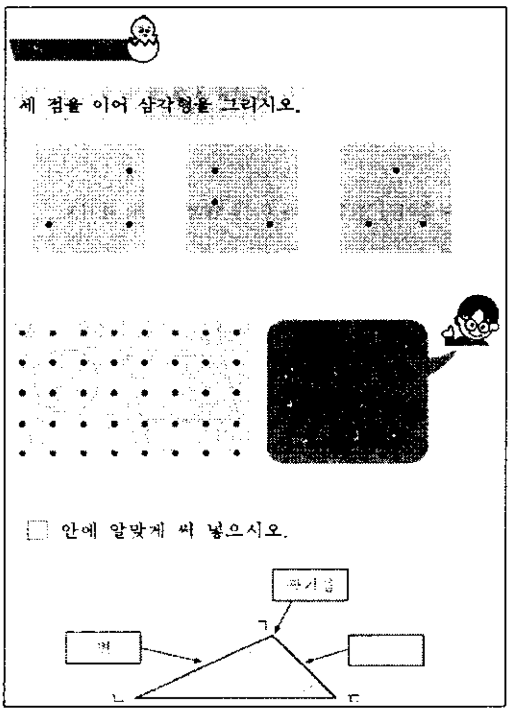
[그림 11]은 학생들로 하여금 합동이 되지 않는 다양한 사각형을 찾아서 기하판 위에 구성하게 하는 것이다. 사각형의 구성 단계에서 발전하여 오목사각형과 볼록사각형을 분류하게 해 볼 수도 있다. 기하판 위에서 다각형을 구성하고 이들을 적절한 기준에 의해 분류하는 활동을 시킨다면 그것 또한 의미 있는 수학화 활동이 될 수 있다. 학생들은 다양한 사각형의 기본적인 특성을 탐구하고, 시각화를 통해 합동이 되지 않은 도형의 모양을 관찰할 수 있으며 오목과 볼록의 의미, 특히 사각형 중에서 어떠한 특성을 같은 것들을 마름모, 평행사변형, 정사각형, 직사각형으로 부르게 되는지를 탐구할 수 있게 되는 것이다.



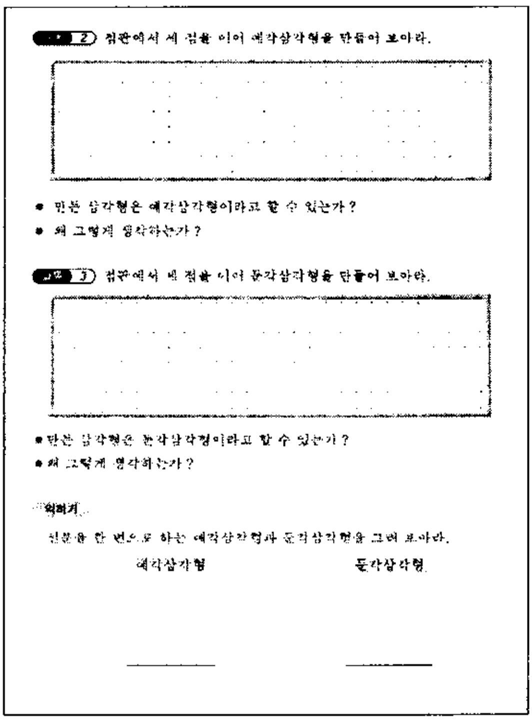
[그림 11] 사각형의 구성 및 분류

3. 제 7차 수학과 교육과정과 기하판

우리 나라 제 7차 수학과 교육과정 개정의 방향은 수학적 사고력을 신장시키는 방향으로 무게중심을 옮기고 다양한 정보를 수집하고, 수학적으로 분석하여 종합적으로 판단하는 능력을 배양하고, 학습한 수학적 개념을 다른 교과나 삶의 여러 장면에서 적절하게 활용할 수 있는 능력을 배양한다는 것이다. 이를 위한 구체적인 지침으로 '교수-학습의 다양화'를 명시하고 있는데 이는 학생들의 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해를 돕기 위하여 다양한 수업 방법을 동원할 필요가 있음을 강조하는 것이다. 학생 스스로 수학을 탐구하고 발견하는 능력을 길러주려면 교사의 설명식 수업 이외에 토론식 수업과 협력학습 등 다양한 수업방법을 도입할 필요가 있다는 것이다. 이와 관련하여 특히 국민공통기본교육과정에서는 구체적 조작물의 폭넓은 이용과 교육공학적인 도구의 적극적인 활용을 권장하고 있다(이준열 외 4인, 2000, pp.29-30).



[그림 12] 점판을 이용한 삼각형 구성활동
(교육부, 2000, 수학2-가 익힘책, p.33)



[그림 13] 점판을 이용한 예각, 둔각삼각형의 구성과 분류 (교육부, 2001, 수학 4-가, p.55)

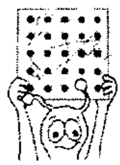
본 고의 논의의 대상인 기하판도 학교수학의 지도에 적극 활용될 수 있는 구체적 조작물

의 하나로서 실제로 제 7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에는 기하판을 다루는 활동과 관련된 구체적인 지도자료가 제시되고 있는 상황이다([그림 12~13]참조). 제 7 차 수학과 교육과정에 따른 수학 교과서 또는 수학 익힘책에는 기하판에서와 동일한 활동을 행할 수 있는 격자로 점이 찍혀있는 종이 즉 '점판'을 이용하여 도형학습의 활동을 권장하고 있다. [그림 14]에 제시된 활동은 외국에서 소개되는 기하판 활동의 지도사례이다. 점판에 도형을 단순히 만드는 단계에서 나아가 주어진 변의 길이에 따라 도형을 구성하는 보다 진보된 학습활동을 제시하고 있다. 가장 긴 변을 가진 도형을 찾아보거나, 주어진 도형의 가장 짧은 변을 찾거나, 변의 길이를 재어보게 함으로써 학생들이 변의 길이에 초점을 두어 문제를 해결할 수 있도록 고안한 학습자료이다. 이 문제는 도형의 정의를 다루는 상황에서 도형에 대한 분류, 구조 뿐 만 아니라 변의 길이에 대한 고려가 많이 이루어지고 있음을 의식하여 제작한 문제라고 할 수 있다.

변을 그려라

▶ **다음 도형을 만들기 위해 점판을 사용하여라.**

1. 변이 4개이고 그 중 두 변의 길이가 같은 도형을 만들 수 있는가?
2. 변이 12개이고 모든 변의 길이가 같은 도형을 만들 수 있는가?
3. 변이 3개이고 모든 변의 길이가 같은 도형을 만들 수 있는가?
4. 변이 8개이고 그 중 네 변의 길이가 같고, 다른 네 변의 길이가 서로 같은 도형을 만들 수 있는가?
5. 변이 5개이고, 그 중 네 변의 길이가 같은 도형을 만들 수 있는가?
6. 두 쌍의 변의 길이가 각각 같은 도형 중 평행사변형이 아니면서 네 변을 갖는 도형을 만들 수 있는가?
7. 변이 세 개이고 그 중 두 변의 길이가 같은 도형을 만들 수 있는가?
8. 변이 7개이고, 변의 길이가 모두 다른 도형을 만들 수 있는가?



[그림 14] 점판을 이용해 변의 길이에 초점을 맞추어 도형을 구성하는 활동
(강문봉 외 18인, 1999, p.466)

4. 기하판을 활용한 학교수학 지도의 실제

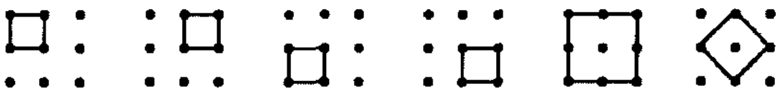
본 절에서는 기하판을 이용하여 기하를 다루는 문제 뿐 만 아니라 기하를 수학의 다른 주제(또는 다른 영역)와 연결시키는 문제 상황을 제시해 보고자 한다. 이를 통해 기하판을 통하여 학생들에게 기하에 대한 이해 나아가 학교수학에서 학습되어야 할 다양한 주제들에 대한 문제해결 경험의 기회를 제공해 보고자 한다.

1) 문제해결전략의 사용

여기서는 실제로 문제의 내용을 실행(acting out)해 보면서 목록이나 표를 만들어 패턴을 찾아가는 문제해결의 경험을 제공해 본다.

기하판 위에서 할 수 있는 아주 재미있는 문제 중의 하나는 “정사각형을 몇 개나 구성할 수 있는가”라는 문제이다. 먼저 기하판 위에서 여러 가지 정사각형을 구성해 나가는 과정에서 학생들은 다양한 크기를 갖는, 다양한 위치에 있는 정사각형을 생각하는 것이 필요함을 인식해야 한다. 그리고 구성되는 정사각형은 기하판의 밑변에 평행하게 또는 평행하지 않게도 구성될 수 있다는 사실을 보고 이러한 사실을 문제해결과정에서 목록이나 표를 구성할 때 활용할 수 있도록 지도해야 한다. 이러한 문제를 일반적인 경우에까지 모두 다루어보기 위해서는 아래와 같이 서로 다른 크기의 기하판에 대해서 문제를 개별적으로, 순차적으로 해결해 나가가야 할 필요성이 있다.

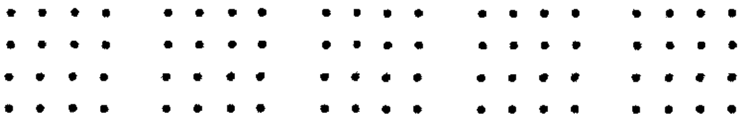
<2×2 기하판의 경우>
2×2 기하판에서는 단 하나의 정사각형이 구성된다. 그리고 이 정사각형은 기하판의 밑변에 평행하다.
<3×3 기하판의 경우>
3×3 기하판에서는 모두 6개의 정사각형이 구성된다. 이 중 5개만이 기하판의 밑변에 평행하다. 정사각형의 종류는 아래에 보는 바와 같이 3종류이다.



<4×4 기하판의 경우 ①>
4×4 기하판 위에 구성될 수 있는 모든 정사각형을 찾아보자.

이 단계에 이르러서는 문제를 좀 더 체계적으로 접근해 가야할 필요성이 생긴다. 기하판의 밑변에 평행하면서 서로 크기가 다른 정사각형을 찾고 그러한 정사각형이 총 몇 개인지를 구하는 것부터 시작해야 한다. 다음에는 기하판의 밑변에 평행하지 않은 정사각형을 찾고 그러한 정사각형의 총 개수 구하는 것을 행할 수 있다. 다음과 같은 제시문제가 문제를 합리적으로 해결하게 하는데 도움을 줄 수 있다.

<4×4 기하판의 경우 ②>
여러 가지 크기의 정사각형을 아래의 점판에 그려보고 그 정사각형이 총 몇 개씩 구성되는지를 기록하여보자.

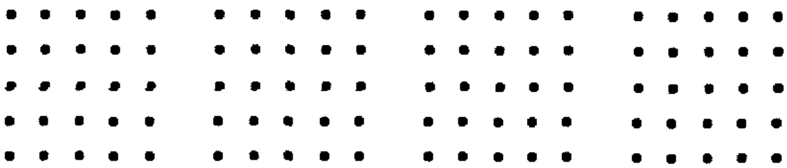


총 개수 = ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___

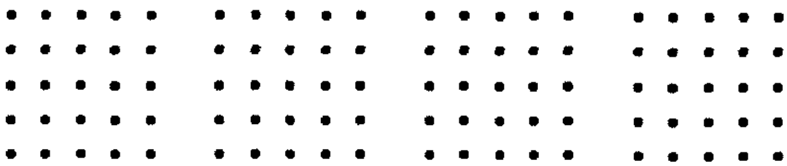
4×4 기하판에서 행했던 해결 방법을 5×5 기하판의 경우에도 그대로 적용해보자.

<5×5 기하판의 경우>

5×5 기하판 위에 구성될 수 있는 모든 정사각형을 찾아보자. 기하판의 밑변에 평행하면서 서로 크기가 다른 정사각형을 찾고 그러한 정사각형이 총 몇 개인지를 구하는 것부터 시작하자. 다음에는 기하판의 밑변에 평행하지 않은 정사각형을 찾고 그러한 정사각형의 총 개수 구하는 것을 해보자. 여러 가지 크기의 정사각형을 아래의 점판에 그려보고 그 정사각형이 총 몇 개씩 구성되는지를 기록하여보자.



총 개수= ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___



총 개수 = ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___ 총 개수 = ___

<문제해결의 방법을 다양한 경우에서 실행>

위에서 조사한 결과를 이용하여 아래의 표를 완성해보자. 표에 나타나는 일정한 패턴을 이용하여 그 결과들을 6×6, 7×7, 8×8, 9×9, 10×10 기하판의 경우에까지 확장하여 보아라.

	기하판의 밑변에 평행		기하판의 밑변에 평행아님		
기하판의 크기	정사각형 종류	정사각형 개수	정사각형 종류	정사각형 개수	총합계
1×1	0	0	0	0	0
2×2	1	1	0	0	1
3×3	2	5	1	1	6
4×4					
5×5					
6×6					
7×7					
8×8					
9×9					
10×10					

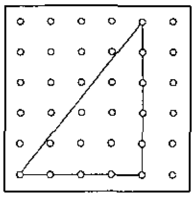
2) 규칙성과 관계

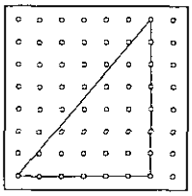
규칙성은 어느 곳에나 존재한다. 규칙성을 찾고 그것을 수학적으로 표현하도록 격려 받은 학생들은 자신이 살고있는 세계에 어떻게 수학을 적용시키는지를 이해하기 시작한다. 다양한 규칙성을 확인하고, 기술하는 것은 정보를 분류하여 체계적으로 조직하는 능력을 향상시키는데 도움을 준다(구광조 외 2인, 1992, p.92).

여기서 소개되는 예들은 기하의 내용에 규칙성을 관련짓는 것으로써 이는 수학의 주제들 사이의 관계를 이해하는 데에 많은 도움이 된다. 이러한 학습은 나중에 학습하게 될 추상적인 개념의 기초가 되는 수학적 사고를 증진시킨다. 기하판을 이용하여 학생들에게 규칙(패턴)에 대한 인식을 요구하는 문제 상황을 제시하여 학생들이 다양한 규칙성을 인식하고, 이를 기술하고, 확장하고, 구성할 수 있도록 지도해보자.

(1)도형 내부의 점의 수

<제시문제>
기하판(또는 점판) 위에 고무줄로 높이가 밑변 보다 1이 큰 직각삼각형을 구성해 보아라. 구성된 직각삼각형 내부에 있는 점의 수를 모두 합하여보자. 어떤 규칙이 있는지 알아보고 높이가 밑변 보다 1이 큰 직각삼각형의 내부에 있는 점의 총수를 구하는 식을 만들어 보자.





위의 그림에서 도형 내부의 점의 총수는 왼쪽부터 차례로, 3+2+1=5(개), 5+4+3+2+1=15(개)이다. 중학교 단계에 이르면 학생들은 위와 같은 문제상황에서 몇 개의 사례를 확인한 후 귀납적인 방법에 따라 자연수의 합에 대한 공식 즉, $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 을 발견할 수 있다.

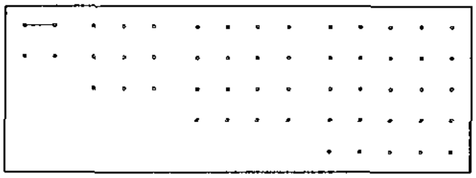
(2)패턴의 일반화

기하판 위에서의 간단한 선분의 구성활동으로 규칙적인 패턴을 일반화하는 학습을 제공할 수 있다.

<제시문제 1>

① 기하판 위에서 인접한 두 점 사이의 길이 중 가장 짧은 길이를 1이라고 하자. 길이가 1인 선분을 몇 개나 그릴 수 있을까? 예를 들어, 기하판 크기가 4×4 이라고 하면 몇 개가 그려질까? 기하판의 크기에 따라 길이가 1인 선분을 몇 개 그릴 수 있는지 아래의 표에 기록해 보아라.

기하판의 크기	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	....
길이가 1인 선분의 개수										....

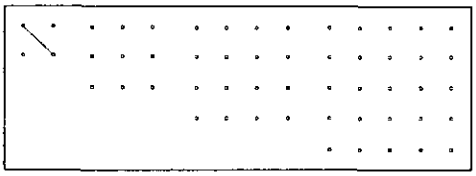


② n×n 기하판 위에는 길이가 1인 선분을 몇 개나 그릴 수 있을까?

<제시문제 2>

①  왼쪽의 그림과 같은 길이의 대각선 선분을 생각하자. 기하판의 크기에 따라 위의 길이와 같은 선분을 몇 개 그릴 수 있는지 아래의 표에 기록해 보아라.

기하판의 크기	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	....
선분의 개수										....

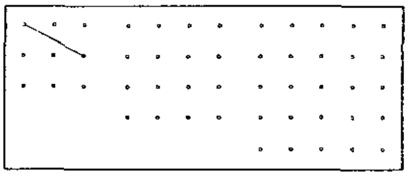


② n×n 기하판 위에서는 몇 개나 그릴 수 있을까?

<제시문제 3>

①  왼쪽의 그림과 같은 길이의 대각선 선분을 생각하자. 기하판의 크기에 따라 위의 길이와 같은 선분을 몇 개 그릴 수 있는지 아래의 표에 기록해 보아라.

기하판의 크기	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10	....
선분의 개수										....



② n×n 기하판 위에서는 몇 개나 그릴 수 있을까?

기하판에서 어떠한 길이의 선분에 대해서도 위와 같은 형태의 문제를 계속 제시해 볼 수

있다. 학생들은 패턴을 관찰하는 해결과정 속에서 일반화된 문제상황을 만들 수 있고 일반화된 해를 귀납적으로 탐구해 나갈 수 있다. 따라서 문제해결의 과정에서 학생들은 자연스럽게 귀납적 사고, 일반화의 사고를 경험하게 된다. 나아가 비슷한 유형의 문제를 계속 접해나가면서 바로 전에 사용했던 해결방법을 이용하려하는 유추적 사고 또한 경험할 수 있게 된다.

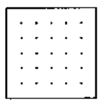
3) 기하와 공간감각

기하의 학습에서 학생들은 도형을 기술하고, 도형을 그리고, 분류할 수 있어야 한다. 도형의 특징에 대한 직관과 통찰, 도형 사이의 상호관계, 그리고 도형의 변화는 공간감각의 습득을 위한 중요한 측면이다. 기하를 학습하는데 있어서 학생들은 구체적인 자료를 통해서 조사하고, 실험하고, 탐구해 볼 필요가 있다. 기하판을 이용하여 여러 위치에서 도형을 시각화하고 구성해보고 비교해 보게 하는 훈련을 제공해보자.

(1) 도형 사이의 관계

아래의 제시문제는 주어진 도형을 지정한 도형으로 적절히 변형함으로써, 원래의 도형인 직사각형과 평행사변형 및 마름모와의 관계를 탐구할 수 있게 한다.

<제시문제 >
기하판 위에서 직사각형을 이용하여 평행사변형과 마름모를 구성하여라.



앞에서 설명한 [그림 10]의 내용도 도형의 구별, 도형의 구성, 도형의 시각화, 도형의 특성을 탐구하는 학습활동 속에서 직사각형과 정사각형 사이의 관계를 탐색할 수 해 준다.

(2) 도형의 구성

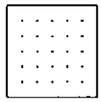
위의 [그림 11]에서 다룬 다각형의 구성 활동이 여기에 해당될 수 있다. 학생들은 다양한 모양의 도형을 구성해 나가는 과정에서 그 도형이 갖는 기본적인 특성을 탐구하게 된다. 마름모, 평행사변형, 정사각형, 직사각형의 개념과 이들 상호간의 관계도 탐색할 수 있다.

도형구성 문제로 아래와 문제는 학생들이 주어진 조건을 이용하여 그에 알맞은 도형을 구성해 나가면서 직각, 예각, 변, 넓이에 대한 개념을 분명하게 이해해야 할 필요성을 느끼게 된다. 그리고 탐구활동 속에서 관련된 수학적 개념들을 확실히 이해한 후 그것을 적용하는 학습과정을 경험할 수 있게 된다. 도형구성문제라고 하지만 넓이를 고려해야 하는 측도의 과정이 개입되는 문제이기도 하다.

<제시문제 >

다음 글에 해당하는 도형을 기하판 위에 구성해 보자.

나는 한 개의 직각과 두 개의 예각을 가지고 있으며 네 개의 변으로 되어있습니다. 나의 넓이는 3이고 내부에는 점이 없습니다. 나를 그려보세요



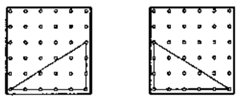
<해답>

(3) 도형의 닮음, 합동, 대칭의 개념

아래의 <제시문제 1>을 해결하는 활동은 닮음의 개념과 서로 닮음인 도형의 성질에 대한 학생들의 이해를 도울 수 있다.

<제시문제 1>

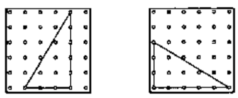
주어진 삼각형과 닮은 삼각형을 두 개만 더 구성하여 각 변의 길이와 넓이를 비교하라.



<제시문제 2>는 합동의 개념에 대한 이해를 심화시킬 수 있는 문제로 합동인 도형이란 도형의 위치 관계에 무관함을 인식시킬 수 있으며 나아가 기하판 위에서의 활동을 통해 좌표에 대한 이해까지도 꾀할 수 있다.

<제시문제 2>

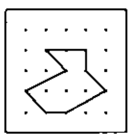
두 도형이 합동임을 설명하라.



<제시문제 3>은 기하판 활동 속에서 선대칭도형의 이미지를 다룰 수 있게 한다.

<제시문제 3>

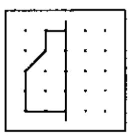
오른쪽 도형을 거울에 비춰보면 어떤 모양일지 그려보아라.



위와 같은 활동 후 선대칭도형에 대한 형식적인 정의를 학습하고 <제시문제 4>와 같이 한 직선에 대하여 반사가 이루어지는 도형을 그려보도록 할 수 있다.

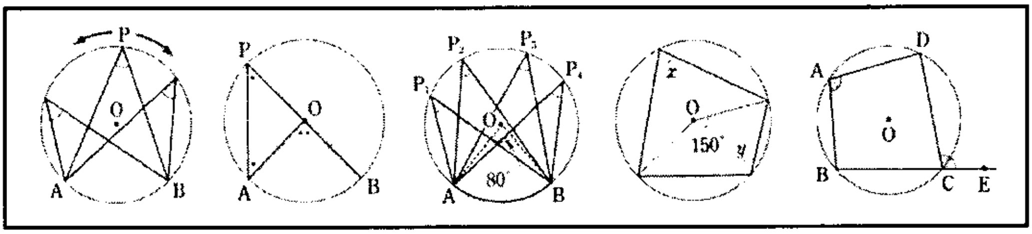
<제시문제 2>

기하판을 이용하여 선대칭 도형을 그려보자.



(4) 원과 관련된 도형 학습

이제까지 다룬 기하판은 못이 격자모양으로만 배열된 것들이었지만 원형으로 못을 배열한 원형기하판을 사용하면 원과 관련된 기하개념을 지도하는데 도움을 얻을 수 있다. <그림 15>와 같이 우리 나라 수학교육과정의 중학교 3학년 수준에서 다루어지는 도형의 학습에 기하판을 활용해 보자.



<그림 15>
중학교 3학년의 '원과 각', '원과 직선'의 지도내용(김연식, 김흥기, 1999, pp.226-240)

<그림 16> 원과 관련된 기하 개념의 구체화(원형기하판 사용)

원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 탐구하거나, 한 호에 대한 원주각의 크기가 모두 같음을 학습해야하는 상황에서, 원에 내접하는 사각형이 갖는 성질을 탐구하는 과정에서, 원형 기하판 위에서의 구체화 작업이 유용하게 활용될 수 있을 것이다. [그림 16]은 원과 관련된 기하적 개념을 원형기하판 위에서 구체화하여 제시해 본 것이다.

4) 측정

측정은 여러 가지 수학적 개념에 대한 이해와 기능의 발달에 도움을 주기 때문에 교육과정에서 아주 중요하다. 기하는 측정개념의 발달에도 기여할 수 있다. 기하판을 이용하여 기하적 아이디어를 측정과 관련 지우면서 측정 개념을 발달시켜보자.

(1) 기하적 아이디어와 측정

<제시문제 1>을 해결하려면 학생들은 도형을 결합하고 쪼개며, 변화시킨 결과를 탐구하고 예측할 수 있는 기하적 능력이 있어야 한다. 또한 단위를 결정해서 측정해야 할 대상의 넓이를 생각하고 넓이의 단위와 도형의 단위수를 생각해서 원하는 도형으로 변환하게 된다.

<제시문제1 >

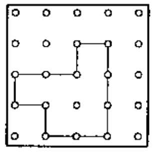
오른쪽 도형을 다음과 같이 바꾸어 보아라

① 같은 넓이에 둘레는 더 길게

② 같은 넓이에 둘레는 더 작게

③ 둘레는 같고 넓이는 더 크게

④ 둘레는 같고 넓이는 더 작게



<제시문제 1>에 대한 해답은 다음과 같다.

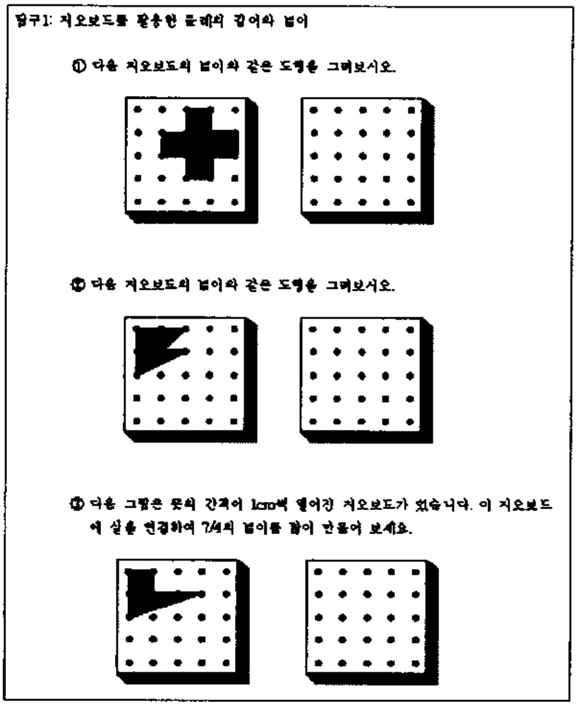
① ② ③ ④

[그림 17]의 탐구활동 역시 기하적 아이디어를 이용해 측정활동을 관련지은 문제라고 할 수 있다. 이와 같은 문제해결 활동은 기하와 공간감각, 측정 개념에 대한 이해 이외에도 연산능력 및 추론능력을 필요로 하며 창의적인 사고 역시 요구된다.

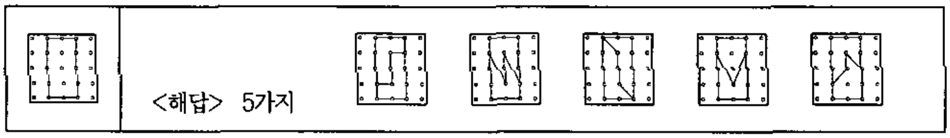
아래의 <제시문제 2>를 해결하는 활동도 도형을 쪼개어, 변화시킨 결과를 탐구하고 예측할 수 있는 기하적 능력 뿐 만 아니라 적당한 임의 단위를 이용하여 도형의 넓이를 판단하는 능력을 요구하고 있다.

<제시문제 2>

아래의 사각형의 넓이를 반으로 나누는 방법은 모두 몇 가지일까?



[그림 17] 기하판활동: 도형의 둘레의 길이와 넓이

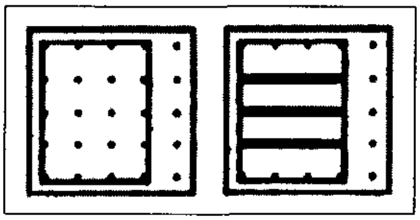


5) 수 개념과 연산

기하가 수 개념과 측정 개념의 발달에 기여하는 것을 이용하면 여타의 간접적인 측정의 개념 및 약수와 배수, 비율의 개념 등에 대한 이해를 발달시킬 수 있다. 기하판 위에서의 활동을 연산 영역의 지도에 연결지어 다루어보자. 기하의 아이디어와 측정의 개념을 이용하여 여러 가지 수의 개념과 연산을 학습할 수 있는 자연스러운 문제 상황을 제공해 보자.

(1) 기하의 아이디어를 통한 수 개념과 연산

기하판은 2차원의 영역을 합동인 몇 개의 부분으로 나누어 분수 개념이나 소수 개념을 구체화하여 지도할 수 있게 한다. [그림 18]은 $\frac{1}{4}$, 0.25의 개념을 구체화한 것이다. 분수의 초기활동은 무엇을 똑같이 분할하는 경험에서 유도된다. 단위의 개념과 그 단위를 똑같은 부분으로 나누는 활동은 분수와 소수의 이해에 기본이다. 이러한 활동을 기하판 위에서도 구현해 볼 수 있는 것이다.

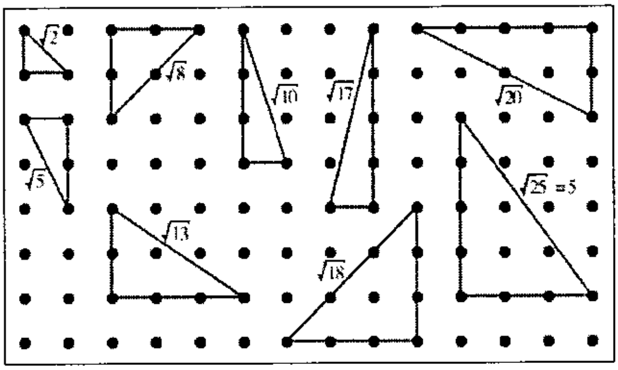


[그림 18] 기하판 위에서의 도형 분할 $\frac{1}{4}$, 0.25 개념의 구체화

[그림 18]과 같이 수를 도형의 넓이와 관련지어 구체화하는 활동은 학생들에게 수가 사용되는 방식을 의미 있게 받아들일 수 기회를 제공해준다. 또한 위와 같은 분할의 활동은 3×4=12, 12÷4=3이라는 곱셈과 나눗셈의 연산으로 해석될 수도 있다(김효정, 1995, p.31). 그리고 이를 약수와 배수 지도를 위한 도입 단계의 활동으로 연결할 수도 있다. 조작을 사용하여 수를 탐구하는 것 예를 들어, 대상의 분해 및 결합의 활동은 학생들로 하여금 수의 표현에 대한 이해와 표현된 수의 상대적인 크기에 대한 직관을 개발시켜준다.

(2) 피타고라스의 정리와 무리수

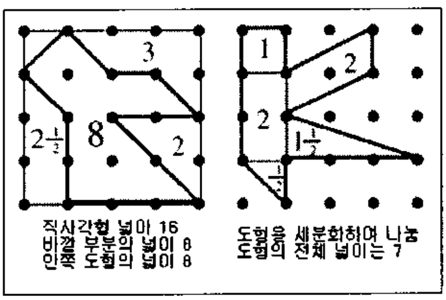
[그림 19]와 같이 기하판 위에 구성된 직각삼각형에서 빗변의 길이를 구하는 문제상황은 학생들에게 $a^2+b^2=c^2$의 연산 과정 즉, 피타고라스의 정리의 실행을 필요로 하며, 선분의 길이로서 무리수를 다루는 경험을 제공한다.



[그림 19] 직각삼각형의 빗변의 길이

6) 도형의 넓이: 부분영역의 합

기하판 위의 도형의 넓이는 그 도형을 에워싸고 있는 직사각형을 이용하여 구할 수 있다. 도형의 넓이를 구하는 첫 번째 방법은 도형을 에워싸고 있는 큰 직사각형의 넓이를 구하여 그것에서 그려진 도형에 속하지 않는 부분의 넓이를 빼는 것이다. 도형의 넓이를 구하는 두 번째 방법은 도형을 작은 영역으로 분할하여 분할된 각 영역의 넓이를 구해 합하는 것이다([그림 20] 참조).

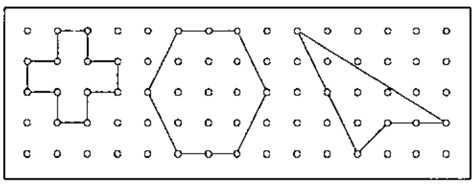


[그림 20] 서로 다른 방법에 의한 도형의 넓이

위의 두 가지 방법으로 넓이를 구하는 방법을 지도한 후 학생들에게 아래와 같은 문제를 제시해 볼 수 있다.

<제시문제 1>
아래에 그려진 도형을 기하판 위에 고무줄로 구성해 보아라. 고무줄 하나로 전체 모양을 만들어도 좋고 여러 개의 고무줄로 도형을 분할하여 만들어도 좋다. 여러 개의 고무줄을 이용하면 그림에 고무줄이 나타나는 선을 표시하여라. 그리고 도형의 넓이와 둘레의 길이를 구하여 보아라.

미국에서 출판된 '중학생들을 위한 수학적인 도전문제'에는 가장 작은 정사각형의 넓이를 1로 하여 [그림 21]에 제시된 도형의 넓이를 구하는 문제가 있다(Jamski, 1990, p.25). 위에서 언급한 두 가지 방법으로 넓이를 구할 수 있으며 답은 왼쪽부터 차례로 5, 12, 6이 된다.

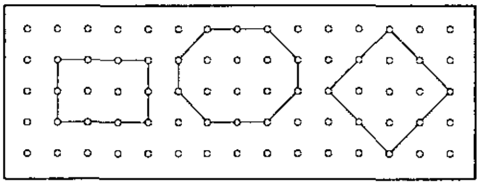


[그림 21] 도형의 넓이 구하기

'중학생들을 위한 수학적인 도전문제' 중에는 아래와 같이 단위 넓이를 이용하여 도형을 구성하는 문제도 있다(Jamski, 1990, p.25).

<중학생들을 위한 수학적인 도전 문제>
다음 도형을 그래프 용지에 그려라(또는 기하판 위에 구성하여라)
(1)넓이가 6인 직사각형 :
(2)넓이가 10인 팔각형
(3)넓이가 8이면서 둘레의 길이가 가장 짧은 다각형
- 점과 점 사이의 길이는 1이다 - (Jamski, 1990, p.25)

[그림 22]는 위 문제에 대한 해답이다.

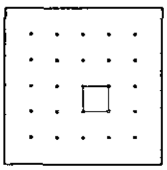


[그림 22] 위 문제의 해답 (Jamski, 1990, p.45)

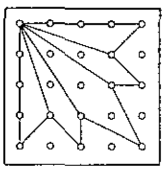
7) Pick의 정리(Pick's Theorem)의 발견

(1) "Pick의 정리"란 무엇인가?

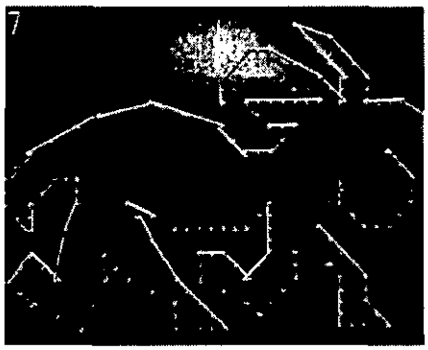
"Pick의 정리"는 격자판을 이용하여 다각형의 면적을 구할 수 있는 방법을 제공한다. 다각형의 변 위의 점의 수를 b라 하고 다각형 내부에 들어있는 점의 수를 i라고 하면 "다각형의 면적은 ($i+\frac{b}{2}-1$)이다"라는 것이 Pick의 정리이다. 이 Pick의 정리를 사용하면 기하판 위에 구성된 다각형의 면적을 쉽게 구할 수 있다.



[그림 23]
도형의 넓이



[그림 24]
도형의 넓이



[그림 25] 'Pick의 정리'를 이용하여
도형의 넓이구하기(수학사랑, 1999, p.92)

[그림 23]에서 기하판의 점과 점 사이의 간격이 1이라면 구성된 정사각형 도형의 넓이는 $0+\frac{4}{2}-1=1$ 이다(b=4, i=0 이므로). Pick의 정리를 이용하면 [그림 24]와 같이 복잡한 도형의 넓이도 쉽게 구할 수 있게 된다. [그림 25]는 우리 나라 수학교사들의 단체인 '수학사

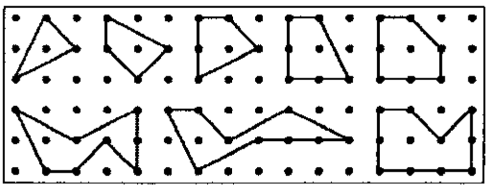
랑'에서 수학을 만지고 보면서 이해하자는 슬로건으로 1999년에 행사했던 "아하! 신기한 체험 수학전"에서 다루어진 것으로 기하판을 이용한 도형의 넓이를 구하는 문제상황이다.

(2) 기하판의 활동을 통한 'Pick의 정리' 발견

기하판(또는 점판)을 이용하여 내부에 포함되는 다각형의 변 위에 놓이는 점의 수와 다각형의 내부에 들어있는 점의 수를 다양하게 변화시켜가며 도형을 구성해보고 그 넓이의 관계에 주목하게 하여 Pick의 정리를 발견하게 할 수 있다. 도형의 넓이를 구하는 방법인 Pick의 정리를 아래와 같은 순서로 발견해 나가보자.

<제시문제 1: 도형 내부에 점 하나가 있는 경우>

먼저 도형 내부에 점 하나가 있는 경우를 다루어보자. 이러한 유형의 도형을 여러 개 그려보고 도형의 선분 위에 놓인 점의 수를 세어보고 각 도형의 넓이를 구하여보자.



결과를 아래의 표에 기록해보자. 여기서 나온 정보를 이용하여 선분 위에 있는 점의 수가 n개인 경우에까지 일반화하여보자.

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

<표 1> 도형 내부에 점이 하나 있을 경우: 넓이 구하기

<제시문제 2 : 도형 내부에 점이 한 개도 없을 경우>

도형 내부에 점이 한 개도 없을 경우를 조사해보자. 도형 위의 점의 개수를 세고 각 도형의 넓이를 기록해보자. 도형 위의 점이 n개인 경우에 넓이를 계산하는 공식을 추측하여 만들어 보아라.

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

<표 2> 도형 내부에 점이 하나도 없을 경우: 넓이 구하기

<제시문제 3 : 도형 내부에 점이 두 개 있을 경우>

도형 내부에 점이 두 개 있을 경우를 조사해보자. 도형 위의 점의 개수를 세고 각 도형의 넓이를 기록해보자. 도형 위의 점이 n개인 경우에 넓이를 계산하는 공식을 추측하여 만들어 보아라.

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

<표 3> 도형 내부에 점이 두 개 있을 경우: 넓이 구하기

<제시문제 4 : 도형 내부에 점이 세 개 있을 경우>

도형 내부에 점이 세 개 있을 경우도 위와 마찬가지로 해 보자.

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

<표 4> 도형 내부에 점이 세 개 있을 경우: 넓이 구하기

<제시문제 5 : 도형 내부에 점이 세 개 있을 경우>

이제까지의 조사결과를 이용하여 도형 위의 점이 n개 있을 때 넓이를 구하는 식을 구성하는 아래의 표를 완성해보자. 여기서 패턴을 발견하고 그것을 도형 내부에 있는 점의 개수가 k일 경우에까지 일반화하여 보아라.

도형 내부의 점의 수	0	1	2	3	4	5	....	k
도형의 넓이 (도형 위의 점이 n개)								

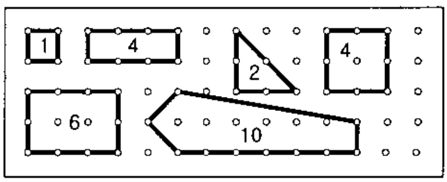
<표 5> 도형 내부에 점이 k 개 있을 경우: 넓이 구하기

이 일반화된 식이 바로 도형 위의 점은 n개이고 도형 내부의 점은 k개인 도형의 넓이를 나타내는 식이 되고 그것이 바로 우리가 Pick의 정리라고 부르는 것이다. Pick의 정리를 나타내는 식을 구성하는 문제는 '중학생들을 위한 수학적인 도전문제' 중의 하나로 제시되기도 한다(Jamski, 1990, p.26).

<중학생들을 위한 수학적인 도전 문제 >

임의의 다각형의 넓이를 A라 하자. 그 다각형 위에 있는 점의 수를 x라 하자. 그리고 다각형의 내부에 있는 점의 수를 y라 하자. A, X, Y 사이의 관계를 나타내는 식을 만들어라.

(답: $A=y+\frac{x-2}{2}=y+\frac{x}{2}-1$ [그림 26] 참조)



[그림26] 도형의 넓이 (Jamski, 1990, p.26)

8) 기하판과 수행평가

우리 나라 제 7차 교육과정의 평가영역에서 부각되고 있는 수행평가와 관련지어 기하판을 활용한 수학과 수행평가 문항의 실례를 살펴보자. [그림 27]은 우리 나라 '초등학교 고학년 수학과 수행평가 문항개발 연구'에서 고안된 수행평가 문항이다(류희찬 외 4인, 1998, pp105-106).

과제 2: 넓이의 규칙찾기
단원: 5-1-7 (평면도형의 넓이)
평가관점: 학생들은 점을 이어 도형을 만들고, 그 넓이를 구한다.
점이 증가함에 따라 넓이가 증가하는 규칙을 찾는다. 이과제를 통하여 도형구성능력과 통찰력 그리고 규칙인지능력을 평가한다.
준비물: 연필, 지우개, 자
문항: 연필, 지우개, 자를 이용하여 다음 물음에 답하여라.
2-1. 아래 그림의 점 사이의 거리는 1㎝이다.
점을 2개, 3개, 4개, … 연결할 때 도형의 넓이를 구하고 표를 완성하여라.
(단, 도형 안에는 연결되지 않은 점은 없다.)

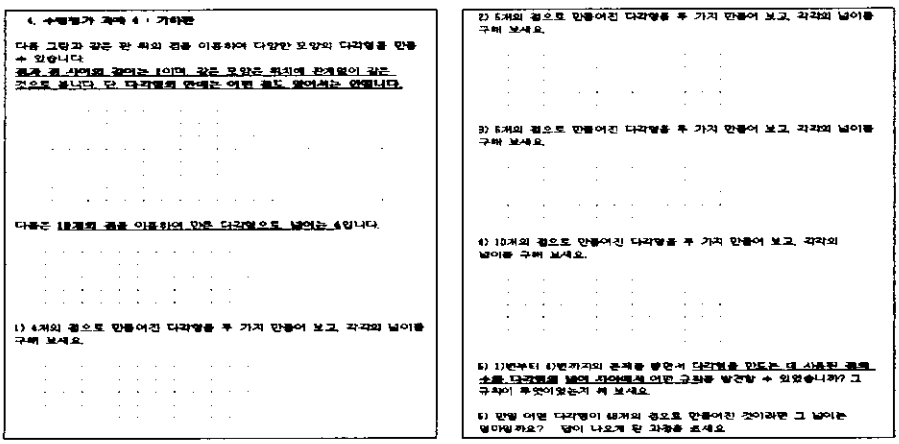
점의 수	도형의 넓이
3	
4	
5	
6	
7	
8	

2-2. 100개의 점을 연결하여 이루어진 도형의 넓이를 구하고 그 이유를 설명하여라.

[그림 27] 기하판을 이용한 수행평가: 넓이의 규칙찾기

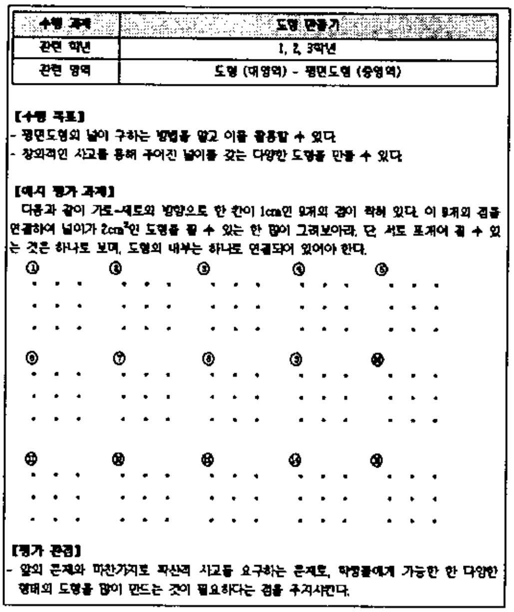
이 문항은 그 소재가 5학년 1학기 평면도형의 넓이에 제한되어 있지만, 그 단원에 해당되는 지식(삼각형, 정사각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴)을 이용하여 기하판 위에 도형을 그려보도록 요구하고 있다. 그 뿐 아니라, 도형을 그리는데 필요한 점의 수와 도형의 넓이를 기록하게 하여 점의 수의 변화에 따르는 도형의 넓이의 변화를 인식하는 능력, 자신이 기록한 표로부터 추론하는 능력을 평가하고 있다. 이로 볼 때 수행평가 문항으로 적절해 보인다.

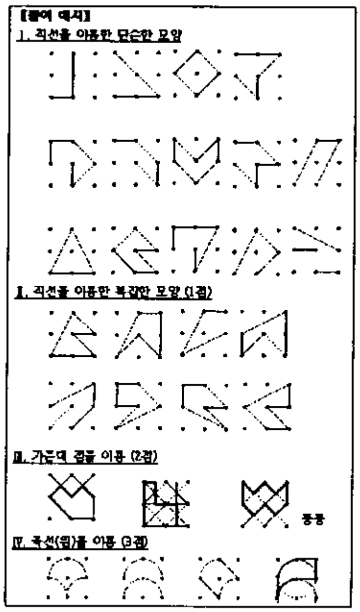
[그림 28]은 "수행평가 과제 제작의 모형 및 준거에 관한 연구(유현주, 1999)"에서 제시하고 있는 기하판을 이용한 수행평가 문항이다.



[그림 28] 기하판을 이용한 수행평가 문항: 다각형 구성

[그림 29]는 한국교육과정평가원에서 제시한 서술형 주관식 검사 예시평가과제이다. 중학교 단계의 도형단원에서 기하판을 활용한 수행과제이다.





【채점 기준】

- 답안에 예시된 도형 중 II의 유형에 대해서는 독창성 점수를 1점, III의 유형에 대해서는 독창성 점수를 2점, IV의 유형에 대해서는 독창성 점수를 3점 부여하였으며, 이 점수 역시 대상 학생들에 따라 가변적일 수 있다.
- 앞의 집합 문제와 마찬가지로 반응의 개수만 고려하는 방안, 반응의 개수와 유형을 고려하는 방안, 반응의 개수, 유형, 독창성을 모두 고려하는 세 가지 방식의 채점이 가능하다.

[그림 29] 중학교 도형단원의 수행과제

서술형 주관식 검사 예시평가과제(한국교육과정평가원, 1998, pp.258-261)

Ⅲ. 맺음말

본 고에서는 현재 학교수학의 기하 개념 지도의 내실을 기하고 더불어 현장의 수학교사들에게 학교수학지도의 개선을 꾀하는 데 도움을 주기 위하여 기하판을 활용한 구체적인 지도 자료를 제공하고자 하였다. 이러한 목적아래 기하판을 도형의 지도뿐만 아니라 수학적 사고교육을 포함한 학교수학의 다양한 영역에서 활용하는 방법을 소개하였다. 이를 위해 먼저 수학교육자들이 밝히고 있는 기하판 활동의 수학교육적 효과를 분석하고 학교수학의 내

용과 관련지어서 기하판 활동의 구체적인 예를 제시하였다. 또한 우리나라 제 7차 수학과 교육과정의 평가영역에서 부각되고 있는 수행평가와 관련지어 기하판을 활용한 수학과 수행평가 문항의 실례를 살펴보았다.

기하판은 기하와 공간 감각 나아가 학교수학의 여러 내용을 학습하는데 도움을 줄 수 있는 유용한 학습도구이다. 기하판 위에서의 학습활동은 탐구를 위한 끝없는 가능성과 체험을 제공함으로써 도형을 구성하는 과정에서 공간 지각력의 향상 나아가 문제해결력의 향상을 꾀하게 한다. 본 고에서 제시한 기하판 활동들이 학교수학 지도의 실제에 적극 반영되기를 기대한다. 학생들이 수학의 학습에서 기하판을 통해 기하 개념 및 여러 가지 수학적 지식에 대한 구체화 활동을 경험할 수 있다면 도형에 대한 흥미와 관심, 친숙감을 갖게 됨과 동시에 수, 측도, 연산 감각이나 다양한 문제 해결에 이르기까지 폭넓은 영역의 수학 학습에 도움을 얻을 수 있게 될 것이다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤(1998), 초등수학교육론, 동명사

강문봉 외 18인(1999), 초등수학학습지도의 이해, 양서원

교육부(2000), 수학 2-가, 대한교과서주식회사

교육부(2000), 수학 익힘책 2-가, 대한교과서주식회사

교육부(2001), 수학 3-가, 대한교과서주식회사

교육부(2001), 수학 익힘책 3-가, 대한교과서주식회사

교육부(2001), 수학 4-가, 대한교과서주식회사

구광조, 오병승, 류희찬(1992), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 경문사

김남희(1999a), 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블럭, 대한수학교육학회지 학교수학 제 1 권 제 1 호, pp.305-324

김남희(1999b), 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용, 대한수학교육학회지 학교수학 제 1 권 제 2 호, pp.699-721

김남희(2000a), 대수타일을 이용한 수학학습, 대한수학교육학회지 학교수학 제 2 권 제 1 호, pp.259-281

김남희(2000b), 교구이용에 대한 교수학적 논의, 대한수학교육학회지 학교수학 제 2

권 제 1 호, pp.259-281
김남희(2000c), 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화, 대한수학교육학회지 학교수학 제 2 권 제 2 호, pp.563-587
김용태, 황우형, 이중권, 안병곤(1998), 진단과 처방수학, 경문사, p.72
김연식, 김홍기(1999), 중학교 수학 3, (주)두산
김응태, 박한식, 우정호(1985), 증보 수학교육학개론, 서울대학교 출판부
김효정(1995), 구체적 조작물을 이용한 활동 지향적 수학 수업에 관한 연구, 교육학 석사 학위 논문, 이화여자 대학교 교육대학원
대한수학교육학회(2000), Realistic Mathematics Education, 2000년도 하계 집중세미나(제 30회)자료집, pp.131-154
류희찬 외 4인(1998), 초등학교 고학년 수학과 수행평가 문항개발 연구, 청람수학교육, pp.85-142
수학사랑(1999), 수학사랑 1999년 여름호. 통권 16호
수학사랑(2000), 수학사랑 2000년 10월호, 통권 23호
우정호(1998), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부
유현주(1999), 수행평가 과제 제작의 모형 및 준거에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 수학교육학연구 제 9 권 제 2 호
이준열 외 4인(2000), 중학교 7-가 교사용 지도서, (주)도서출판 디딤돌
한국교육과정평가원(1998), 중학교 수학과 수행평가 시행방안 및 자료개발 연구 참고자료집, 한국교육과정평가원 수학교육연구실, pp.239-295
Copeland, R., W.(1970), How Children Learn Mathematics: Teaching Implications of Piaget's Research, The Macmillan Company
Freudenthal(1973), Mathematics as an Educational task, D. Reidel Publishing Company
Geddes, D. & Fortunato, I.(1993), Geometry: Research and Classroom Activities, In Research Ideas for the classroom: Middle Grades mathematics(NCTM), pp.199-222
Jamski, W., D.(1990), Mathematical Challenges For The Middle Grades From The Arithmetic Teacher, NCTM