구상의 볼록 다각형의 교차 계산을 위한 새로운 간선 전진 기법의 선형 시간 알고리즘

(A Linear-Time Algorithm with a New Edge Advancing Mechanism for Intersecting Spherical Convex Polygons)

하 종 성 †

(Jong-Sung Ha)

요 약 본 논문에서는 먼저 평면상에서 볼록 다각형의 교차를 계산하는 새로운 알고리즘을 제시한다. 이 알고리즘은 O'Rourke[5]의 알고리즘과는 다른 간선의 전진 규칙을 사용하여 구상으로 확장되는데 모호함이 제거되어 구상에서도 선형적인 시간에 볼록 다각형의 교차를 계산할 수 있도록 확장하였다.

Abstract In this paper, we firstly propose a new algorithm for intersecting a pair of convex polygons in the plane. This algorithm uses another rule of advancing edges, which is different to the one of O'Rourke[5], in order to remove ambiguities when being extended into the spherical case. Finally, the algorithm is extended for computing the intersection of a pair of spherical convex polygons in time linear to the number of their edges.

1. 서 론

컴퓨터그래픽스, CAD/CAM, 로보틱스 분야등에서 어떠한 기준에 의하여 방향을 찾거나 계산하는 것은 필수적인 기본 연산중의 하나이다. 방향과 관련된 문제를 해결하고자 할 때 방향 벡터의 크기는 의미가 없으므로 하나의 방향을 단위구상의 하나의 점으로 사상시켜서 구상의 기하적 문제로 변환하여 해결하는 방법이 사용되는 경우가 많이 있다.

예를 들어 거푸집의 자동적인 설계[2,11]에서 설계된 모형의 두 거푸집이 분리될 수 있는 방향을 찾거나 여러 환경의 수치제어기계가공[1,3,4,9]에서 설계된 모형의 표면을 가공할 수 있는 공구의 방향을 찾기 위하여 설계된 면의 수직벡터를 변환하여 얻은 여러 구볼록다각형의 교차를 계산하고 교차된 영역을 검사하는 방법들이 제안되어 있다.

본 논문에서는 이와 같은 구상의 기하적 알고리즘에 이용되는 가장 중요한 기초 연산중의 하나인 두 볼록 다각형의 교차를 효율적이면서도 견고하게 계산하는 방법을 제시한다.

이차원에서 두 볼록 다각형의 경우에는 볼록 특성을 이용하여 선형 시간에 그 교차를 계산하는 알고리즘들[5,7,8,10]이 제안되어 있다. 이 평면상의 알고리즘을 구상에 적용시키기 위하여 이론적으로는 구볼록다각형을 두 평면에 중심투상[6]시킬 수 있는 방법이 있으나 실제적으로는 한정되지 않은 값과 같은 수치적 문제를 가지고 있으므로 이러한 방식으로 구현하기는 어렵다. 그러므로 본 논문에서는 구상에서 직접 이들 알고리즘을 적용하는 방법을 고려해본다.

Shamos와 Hoy[7,8]의 알고리즘은 평면의 알고리즘과 유사하게 구상의 임의의 점으로부터 다각형의 각 정점을 지나는 대원을 만들고 이 대원들로 나누어지는 각 스트립에서 교차를 계산하는 방법으로 쉽게 구성에도 적응될 수 있다. Toussanit[10]의 알고리즘은 볼록헐과 삼각화를 계산하는 알려진 두 알고리즘을 결합하고 있는데 두 구볼록다각형이 반구안에 포함되지 않으면 볼록헐이 정의되지 않으므로 그런 경우 적용시키는 것이 가능해보이지 않는다.

가장 우아하고 구현하기 간단한 알고리즘으로 알려진 O'Rourke의 알고리즘[5]은 다각형의 경계를 구성하는 간선을 전진시켜 나가며 교차를 검사할 수 있도록 간선의 전

† 종신회원 : 우석대학교 정보통신 컴퓨터공학부 교수
jsha@core.woosuk.ac.kr
논문접수 : 1999년 11월 29일
심사완료 : 2001년 1월 10일

진 규칙을 적용하는 것이다. 이차원상에서 간선의 전진은 두 다각형의 간선이 서로 상대방을 추적하는 관계와 상대적 좌우 위치에 근거한다. 그러나 구상에서는 원위치(orientation)가 없고 항상 서로 추적하는 관계가 성립하므로 이차원상의 규칙을 유사하게 확장할 수 없다. 중심투상의 수치적 문제는 별개로 친다 하더라도 두 볼록다각형이 하나의 평면에 투상되지 않는다면, 즉 두 볼록다각형이 어느 반구안에 포함되지 않는다면 평면에 투상시켜도 간선의 전진 규칙을 적용시킬 수 없다는 것이 논문의 가장 큰 동기이다.

따라서 본 논문에서는 [5]에서와 같이 구상에서 직접 간선의 전진 규칙을 정하여 교차를 계산하는 선형 시간 알고리즘을 제시한다. 2 장에서는 이차원상에서 간선의 전진 원리를 살펴보고 구상으로 확장할 수 있는 새로운 전진 규칙을 제시하고 그 정확성을 설명한다. 3 장에서는 제안된 규칙을 구상으로 확장시키기 위하여 구상에서 간선과 교차 영역의 특성을 살피고 간선의 전진 규칙을 제시한다. 그리고 4 장에서 결론을 맺는다.

2. 이차원상에서 간선의 전진 규칙

2.1 O'Rourke의 추적 관계에 의한 간선 전진

[5]의 전진 규칙과 정확성의 증명을 먼저 간략히 설명한다.

앞으로 본 논문에서 두 다각형을 $P=\{p_1, \ldots, p_m\}$와 $Q=\{q_1, \ldots, q_n\}$로 나타내며 정점은 반시계 방향으로 되어 있고 간선 $\overline{p_{i-1}p_i}$는 간단히 $\overline{p_i}$로 나타낸다. 또한 간선 $\overline{p_i}$를 지나는 직선으로 나뉘어지는 왼쪽 및 오른쪽 반평면을 각각 $LHP(\overline{p_i})$와 $RHP(\overline{p_i})$로 나타낸다.

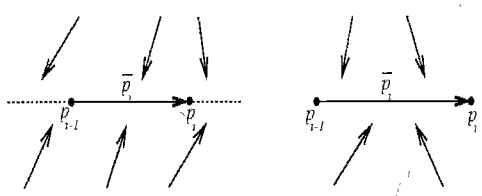

그림 1 간선의 추적과 직면

그림 1(a)에서와 같이 간선 $\overline{p}$를 지나는 직선을 향하고 있는 모든 간선 $\overline{q}$는 $\overline{p}$를 **추적(chasing)**하고 있다고 한다. 이러한 추적 관계를 수식으로 나타내면 다음과 같다. 표기중에서 ¬, ∧, ∨는 각각 논리부정, 논리곱, 논리합이고 ×는 벡터의 외적 결과의 z 값이다.

정의 1.

$Chase(\overline{q_j}, \overline{p_i})$: $(\overline{p_i} \times \overline{q_j} > 0 \wedge q_j \in RHP(\overline{p_i})) \vee (\overline{p_i} \times \overline{q_j} < 0 \wedge q_j \in LHP(\overline{p_i}))$

그러면 이 추적 관계를 이용한 간선의 전진 규칙은 다음과 같다.

표 1 추적 관계에서 간선의 전진 규칙

	$Chase(\overline{p}, \overline{q})$	$\neg Chase(\overline{p}, \overline{q})$
$Chase(\overline{q}, \overline{p})$	advance $\overline{p}$, if $p \in RHP(\overline{q})$, advance $\overline{q}$, otherwise	advance $\overline{q}$
$\neg Chase(\overline{q}, \overline{p})$	advance $\overline{p}$	advance $\overline{p}$, if $p \in RHP(\overline{q})$, advance $\overline{q}$, otherwise

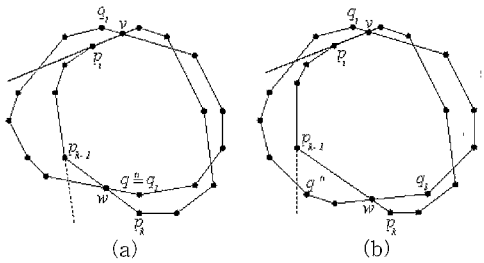

그림 2 두 볼록 다각형의 교차

위 그림에서와 같이 다각형 P^*를 두 다각형 P와 Q의 교집합 $P \cap Q$라고 하자. 그러면 P^*는 P와 Q의 경계 부분이 연속적으로 번갈아 나오며 구성된다. 또한 $(P \cup Q) - (P \cap Q)$는 **낫(sickle)** 모양의 다각형들로 구성되며 각 낫은 P와 Q의 경계로 구성된다. 각 낫의 시작점과 끝점은 P와 Q의 두 교차점으로 정의된다. 그러면 표 1의 전진 규칙은 두 볼록 다각형 P와 Q의 교차를 $O(m+n)$ 시간에 정확히 찾아냄을 보이기 위해서 다음 두 개의 증명을 하였다.

첫 번째, 어느 낫의 시작점이 찾아진 경우 끝점은 반드시 찾아진다. 그런데 그 낫의 끝점은 다른 낫의 시작점이므로 모든 낫은 그 때부터 정확히 $m+n$의 반복 후에 찾아진다. 따라서 두 번째로, $O(m+n)$ 시간에 어느 낫의 시작점이 하나 찾아짐을 또한 증명한다.

2.2 직면 관계에 의한 새로운 간선 진행

2.1 절에서 설명한 간선의 전진 규칙을 구상에 유사하게 확장할 수 없다. 그 이유는 첫 번째로 평면상에서 두 간선은 서로 추적하거나, 하나가 상대방을 추적하거나, 서로 추적하지 않는 세 가지의 추적 상태를 정의할 수 있다. 그러나 구상에서는 이러한 추적 관계를 명확히 정의할 수 없다. 각 간선을 지나는 대원을 평면상에서 각 간선을 지나는 직선으로 대응시키면 두 간선이 항상 서로 추적하는 관

계이며 두 개의 교차점이 존재하기 때문이다. 두 볼록 다각형이 어느 반구 안에 포함되지 않을 때 두 다각형을 이 차원상에 중심투상시킨다면 그림 3의 (a)와 같이 어느 평면에 투상시키느냐에 따라 추적 관계가 반대로 바뀌어 모호하게 된다.

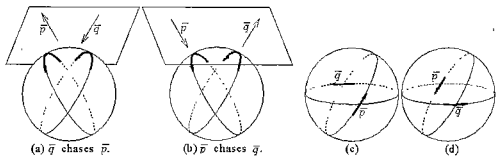

그림 3 구상에 간선 추적 관계의 모호함

두 번째로 평면상에서 두 간선의 추적 관계 및 상대적 위치는 대칭적인 경우가 없으나 구상의 두 간선은 대칭적일 수 있다. 예를 들어 두 간선이 서로 추적하거나 추적하지 않으면 어느 하나는 다른 간선의 오른쪽에 있으며 다른 것은 상대방의 왼쪽에 있다. 그러나 그림 3의 (b)처럼 서로 추적하면서 서로 동시에 오른쪽 또는 왼쪽에 있는 대칭적인 경우가 있다.

따라서 표 1과 같이 추적 관계와 상대적 위치에 따른 추적 관계를 정의하는 것은 불가능하므로 여기에서는 단위 구상에 확장시킬 수 있도록 고려하여 새로운 간선의 전진 규칙을 제시하고 3장에서 이를 구상으로 확장한다.

그림 1(b)에서와 같이 간선 $\bar{p}$를 향하고 있는 모든 간선 $\bar{q}$는 $\bar{p}$를 **직면(facing)**하고 있다고 한다. 이러한 직면 관계를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

정의 2.

$$Face(\bar{q}_j, \bar{p}_i): \quad p_{i-1} \in LHP(\bar{q}_j) \wedge p_i \in RHP(\bar{q}_j) \wedge q_j \in RHP(\bar{p}_i) \vee p_{i-1} \in RHP(\bar{q}_j) \wedge p_i \in LHP(\bar{q}_j)) \wedge q_j \in LHP(\bar{p}_i)$$

그러면 이 직면 관계를 이용한 간선의 전진 규칙은 다음과 같다.

표 2 직면 관계에서 간선의 전진 규칙

	$Face(\bar{p}, \bar{q})$	$\neg Face(\bar{p}, \bar{q})$
$Face(\bar{q}, \bar{p})$	not occur	(규칙 1) advance $\bar{q}$
$\neg Face(\bar{q}, \bar{p})$	(규칙 2) advance $\bar{p}$	(규칙 3) (1) advance $\bar{p}$, if, $p \in RHP(\bar{q})$, (2) advance $\bar{q}$, else if $q \in RHP(\bar{p})$ (3) advance $\bar{p}$($\bar{q}$), otherwise

위 표의 간선의 전진 규칙이 정확함을 증명하기 위해서는 어느 교차점이 찾아지면 다음 교차점이 찾아짐이 보장되고 어느 교차점 하나는 반드시 찾아짐을 보여야 한다. 간선이 서로 평행하다던지 아니면 간선의 끝점이 다른 간선상에 존재하는 degeneracy는 [5]과 같은 방법으로 처리될 수 있으므로 이 논문에서는 언급하지 않는다.

소정리 1. P와 Q가 교차할 때 하나의 교차점이 찾아지면 다음 교차점은 반드시 찾아진다.

(증명) 그림 2에서와 같이 교차점 v와 w사이의 낫에서 간선이 오목하게 연결된 체인은 P의 경계 일부분이고 볼록 체인을 Q의 경계 일부분이라고 하자. 그리고 교차점 v에서 간선 $\bar{p}_i$와 $\bar{q}_j$이 전진될 상태이고 다음 교차점 w에서 만나는 간선을 $\bar{p}_k$와 $\bar{q}_l$이라 하자. 그러면 $\bar{p}_i$가 직면하는 간선 $\bar{q}'$이 나타날 때까지 규칙 3-2에 의하여 Q상의 간선들이 전진한다. 그리고 $\bar{q}' \in RHP(\bar{p}')$인 $\bar{p}'$이 나타날 때까지 규칙 2에 의하여 $\bar{p}_i$가 전진한다. 이러한 전진은 $\bar{p}_{k-1}$이 직면하는 $\bar{q}''$까지 반복된다. 만약 그림 2(a)와 같이 $\bar{q}'' = \bar{q}_l$라면 규칙 2에 의하여 $\bar{p}_{k-1}$가 전진하여 교차점 w가 바로 찾아진다. 그림 2(b)와 같이 $\bar{q}'' \neq \bar{q}_l$라면 $\bar{p}_{k-1}$가 전진한 후 $\bar{p}_k$가 교차하는 $\bar{q}_l$까지 규칙 3-2에 의하여 Q상의 간선들이 모두 전진하여 교차점 w가 찾아진다.□

우리는 소정리 1과 같이 하나의 낫 안에 두 간선이 있을 때 다음 교차점이 반드시 찾아지도록 두 간선이 전진되고 있는 상태라면 기어가 맞물려 돌아가듯이 P와 Q상의 간선이 전진되면서 모든 교차점이 찾아지므로 이 상태를 다음과 같이 정의한다.

정의 3. 하나의 낫 안에 있는 P와 Q상의 두 간선 $\bar{p}$와 $\bar{q}$가 각각 오목 체인과 볼록 체인에 존재하고 $\bar{q} \in RHP(\bar{p}) \vee Face(\bar{p}, \bar{q})$라면 P와 Q가 **맞물림 상태(geared state)**에 있다고 하고 $\bar{p}$와 $\bar{q}$가 서로 맞물렸다고 한다.

이제 P와 Q가 교차하면 하나의 교차점은 반드시 찾아짐을 보이기 위해서는 맞물리지 않은 상태는 표 2의 전진 규칙에 의하여 반드시 맞물림 상태에 도달함을 보이면 된다.

소정리 2. $\bar{p}$와 $\bar{q}$를 각각 현재의 간선으로 하는 P와 Q가 맞물리지 않았다면 표 2에 의한 전진에 의하여 $\bar{q}$를 포함하는 낫에서 맞물린다.

(증명) P와 Q가 맞물리지 않은 상태라는 것은 $\bar{p} \in LHP(\bar{q}) \wedge \bar{q} \in LHP(\bar{p})$인 조건과 동일한 것이다. 그러므로 P와 Q가 맞물릴 때까지 표 2의 규칙 3-3만이 전진 규칙으로 적용된다. 이때 $\bar{q}$는 P상의 간선이 전진될 때 그 자리에 머물러 있으므로 $\bar{q}$를 포함하는 낫에서 맞물림 상태가 얻어진다.□

3. 구상에서 간선의 전진 규칙

2.2 절에서 제시한 간선의 전진 규칙을 구상에 확장하여 적용하기 위하여 먼저 구상에서 필요한 표현을 정의한다.

카테션 좌표계의 원점에 중심이 위치한 단위구상의 공간을 S^2로 나타낸다. 즉 $S^2=\{p \mid \|p\|=1,\ p=(x,y,z) \in E^3\}$이다. 여기서 E^3는 삼차원 유클리드 공간이다. 다각형 $P=\{p_1,\ldots,p_m\}$와 $Q=\{q_1,\ldots,q_n\}$의 정점은 평면에서와 같이 반시계 방향으로 되어있고 간선 $\overline{p_{i-1}p_i}$는 간단히 $\overline{p_i}$로 나타낸다. 또한 간선 $\overline{p_i}$를 지나는 대원으로 나뉘어지는 왼쪽 및 오른쪽 반구를 각각 $LHS(\overline{p_i})$와 $RHS(\overline{p_i})$로 나타낸다.

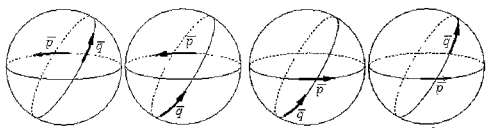

그림 4 S^2상에서 간선의 직면과 비직면

S^2상의 어느 반구안에서 간선 $\overline{p}$를 향하고 있는 모든 간선 $\overline{q}$는 $\overline{p}$를 직면하고 있다고 정의된다. 그림 4(a)와 (c)의 경우 $\overline{q}$가 $\overline{p}$를 직면하고 있지만 (b)와 (d)의 경우는 그렇지 않다. 이러한 관계는 어느 평면에 중심 투상시켜도 변함이 없음을 주목하라. S^2상에서 두 간선의 직면을 형식적으로 표현하면 다음과 같다.

정의 4.

$$Face(\overline{q_j},\overline{p_i}):\ p_{i-1}\in LHS(\overline{q_j}) \wedge p_i \in RHS(\overline{q_j}) \wedge q_j \in RHS(\overline{p_i}) \vee p_{i-1}\in RHS(\overline{q_j}) \wedge p_i \in LHS(\overline{q_j})) \wedge q_j \in LHS(\overline{p_i})$$

이러한 S^2상에서 간선 직면 관계는 평면에서와 다르다. 평면에서는 서로 직면하는 경우는 존재하지 않는다. 그러나 S^2상에서는 서로 꼬리를 물려는 뱀처럼 서로 직면하는 경우가 발생한다. 이렇게 서로 직면하는 것을 **상면(meeting)**이라 하며 이를 위한 추가적인 규칙이 다음 표 3의 규칙 0과 같이 필요하다.

표 3 S^2상의 직면 관계에서 간선의 전진 규칙

	$Face(\overline{p},\overline{q})$	$\neg Face(\overline{p},\overline{q})$
$Face(\overline{q},\overline{p})$	(규칙 0) advance the one that has not recently advanced, if geared advance $\overline{p}$, if ungeared	(규칙 1) advance $\overline{q}$
$\neg Face(\overline{q},$	(규칙 2) advance $\overline{p}$	(규칙 3) (1) advance $\overline{p}$, if $p\in RHS(\overline{q})$ (2) advance $\overline{q}$, else if $q\in RHS(\overline{p})$ (3) advance $\overline{p}$, otherwise

위 표의 간선 전진 규칙을 바탕으로 구상의 두 볼록 다각형의 교차를 구하는 알고리즘을 표현하면 다음과 같다.

procedure SphercalConvexIntersection
input: $P=\{p_1,\ldots,p_m\}$ and $Q=\{q_1,\ldots,q_n\}$
output: A polygon of $P \cap Q$
begin
  Choose $\overline{p_i}$ and $\overline{q_j}$ arbitrarily.
while ($\overline{p_i}\in LHS(\overline{q_j}) \wedge \overline{q_j}\in LHS(\overline{p_i}) \vee Face(\overline{p_i},\overline{q_j}) \wedge Face(\overline{q_j},\overline{p_i})$)
do
Advance $\overline{p_i}$.
  endwhile
  do
    if $\overline{p_i}$ intersects with $\overline{q_j}$ **then**
      if the first intersection **then** Initialize advancing counters into 0.
      Output the intersection point of $\overline{p_i}$ and $\overline{q_j}$.
    endif
    if $Face(\overline{p_i},\overline{q_j})$ **and** $Face(\overline{q_j},\overline{p_i})$ **then**
      Advance either of $\overline{p_i}$ or $\overline{q_j}$, which has not recently advanced.
    else if $Face(\overline{q_j},\overline{p_i})$ **then**
      Advance $\overline{q_j}$.
    else if $Face(\overline{p_i},\overline{q_j})$ **then**
      Advance $\overline{p_i}$.
    else if $q_j\in RHS(\overline{p_i})$ **then**
      Advance $\overline{q_j}$.
    else
      Advance $\overline{p_i}$.
    endif
  while advancing counters have not reached
    (m of $P \wedge n$ of $Q \vee 2m$ of $P \vee 2n$ of Q).
  if then Output P.
  else if $Q\subset P$ **then** Output Q.
endprocedure

위의 알고리즘이 정확함을 증명하기 위하여 소정리 1과 2에서 상면이 발생할 때 추가된 규칙을 적용하여 정확함을 보이면 된다

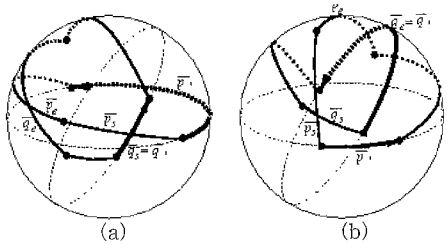

그림 5 낫에서 상면하는 간선

계 1. S^2상에서 P와 Q가 교차할 때 하나의 교차점이 찾아지면 다음 교차점은 반드시 찾아진다.

(증명) 처음 상면한 두 간선을 $\overline{p_i}$와 $\overline{q_j}$라 하자. 그러면 $(p_i \in LHS(\overline{q_j})) \wedge (q_i \in LHS(\overline{p_i}))$ (그림 4(c))와 $(p_i \in RHS(\overline{q_j})) \wedge (q_i \in RHS(\overline{p_i}))$ (그림4(ㅇ))의 두 경우가 있다. 후자의 경우 $(p_{i-1} \in LHS(\overline{q_j})) \wedge (q_{j-1} \in LHS(\overline{p_i}))$ 이므로 $Face(\overline{p_{i-1}}, \overline{q_j})$ 또는 $Face(\overline{q_{i-1}}, \overline{p_j})$중 하나가 참이다. 만약 $Face(\overline{p_{i-1}}, \overline{q_j})$가 참이라면 p_i와의 교차점이 발견될 때까지 Q의 간선이 전진할 것이고 반대여도 대칭적이다. 이것은 $\overline{p_i}$와 $\overline{q_j}$가 하나의 낫안에 있다는 것을 의미한다.

전자의 경우 $p_i \in LHS(\overline{q_{j-1}})$ 또는 $q_j \in LHS(\overline{p_{i-1}})$가 참일 수 있기 때문에 $\overline{p_i}$와 $\overline{q_j}$가 하나의 낫안에 있지 않을 수도 있다. 그러나 P와 Q의 간선이 모두 $LHS(\overline{p_i}) \wedge LHS(\overline{q_j})$에 있기 때문에, 즉 반구안에 포함되기 때문에 첫 교차점이 발견될 때까지는 상면이 발생하지 않는다. 상하는 두 간선은 어느 반구에도 포함되지 않는다.

더구나 교차점이 한번 발견되면 간선이 진행되는 동안 두 간선은 항상 하나의 낫안에 존재한다. 따라서 현재 상면하는 두 간선 $\overline{p'}$와 $\overline{q'}$가 하나의 낫 L안에 있을 때 규칙 0이 적용되면 맞물림 상태가 지속된다는 것을 보이면 충분하다.

일반성을 잃지 않고 낫 L의 교차점을 생성하는 두 간선 중에 볼록 체인에 있는 간선을 $\overline{p^s}$, 오목 체인에 있는 간선을 $\overline{q^s}$라 하고 다음 교차점을 생성하는 두 간선을 유사하게 각각 $\overline{p^e}$, $\overline{q^e}$라 하자. 그러면 다음과 같이 항상 $\overline{q'} = \overline{q^s} \vee \overline{q'} = \overline{q^e}$ 이다.

만약에 그림 5(a)와 같이 $q' \in LHS(\overline{p'})$이라면 $\overline{p'}$ 이전의 모든 간선은 $RHS(\overline{p'})$에 있을 수 없고 반드시 $LHS(\overline{p'})$에 있으므로 $\overline{q'}$과 교차하는 간선이 존재한다. 즉 $\overline{q'} = \overline{q^s}$이다. 그림 5(b)와 같이 $q' \in RHS(\overline{p'})$이라면 $\overline{p'}$ 이후의 모든 간선이 $RHS(\overline{p'})$에 있을 수 없고 반드시 $LHS(\overline{p'})$에 있으므로 $\overline{q'}$과 교차하는 간선이 존재한다. 즉 $\overline{q'} = \overline{q^e}$이다.

$\overline{q'} = \overline{q^s}$인 경우에는 $\overline{p'}$ 이전의 간선은 $RHS(\overline{q'})$에 있으므로 그 간선이 전진하여 $\overline{p'}$이 최근에 도착한다. 그러면 전에 전진되지 않은 $\overline{q'}$이 표 3의 규칙 0에 의하여 전진하므로 맞물림 상태가 계속 유지된다. $\overline{q'} = \overline{q^e}$인 경우에는 $\overline{p'}$ 이전의 간선은 $LHS(\overline{q'})$에 있으므로 $\overline{p'}$이 최근에 도착했다면 맞물림 상태에서 출발했다는 가정에 모순이므로 $\overline{q'}$이 최근에 도착된 간선이다. 이 때에는 $\overline{p'}$가 전진되어 맞물림 상태가 계속 유지된다.

결과적으로 하나의 낫에서 상면은 많아야 두 가지이며 간선의 전진 규칙 0에 의하여 맞물림 상태가 계속 유지되므로 다음 교차점이 반드시 찾아진다.□

계 2. S^2상에서 P와 Q가 교차하면 하나의 교차점은 반드시 찾아진다.

(증명) 소정리 2와 동일하다.□

증명을 끝내기 전에 맞물리지 않은 상태에서는 상면이 발생했을 때 왜 전에 전진하지 않은 간선을 전진시키는 대칭적인 규칙을 적용하지 않는가를 설명한다. 만약에 P와 Q의 간선이 순환적인 관계에 있으면 무한한 전진이 발생할 수 있기 때문이다. 예를 들어 $i=1,\ldots,n$에 대하여 $\overline{p_{2i}}$와 $\overline{q_i}$가 상면할 때 이러한 대칭적인 규칙을 적용하면 (규칙 0, 규칙 3-3, 규칙 0)이 계속적으로 적용되어 $\{(\overline{q_1}, \overline{p_1}, \overline{p_2}), (\overline{q_2}, \overline{p_3}, \overline{p_4}), \ldots, (\overline{q_n}, \overline{p_{2n-1}}, \overline{p_{2n}})\}$ 순서로 전진은 무한히 진행될 것이다.

정리 1. S^2상에서 P와 Q의 교차는 $O(m+n)$ 시간에 찾아진다.

(증명) 알고리즘 SphericalConvexIntersection에서 맞물림 상태에 도달하기 위한 while 루프는 P상의 간선이 모두 한번 순환되기 전에 수행된다. 그리고 맞물림 상태에서 시작되는 do 루프는 P와 Q가 교차하는 경우 상수 시간안에 첫 시작점을 찾은 후 정확히 $m+n$ 번 반복한다. 만약 P와 Q가 교차하지 않으면 $2m+2n$ 번안에 반복이 멈춘다. 따라서 두 개의 볼록 구다각형의 교차는 $O(m+n)$ 시간에 찾아진다.□

4. 결 론

본 논문에서는 평면에서 두 볼록 다각형의 교차를 구하기 위하여 직면 관계에 의하여 간선을 전진시키는 새로운 규칙을 제시하고 구상으로 확장하였다. 이 규칙은 이차원에서 첫 교차점을 찾을 때 종전의 추적 관계에 의한 전진 규칙보다 보다 더 많은 전진이 필요한 경우도 있다. 그러나 [5]와는 달리 구상의 볼록 다각형으로 확장할 수 있는 범용성이 있다는 의의가 있으며 여전히 선형 시간에 처리됨에는 변함이 없다.

참 고 문 헌

[1] L. L. Chen, S. Y. Chou, and T. C. Woo, "Separating and intersecting spherical polygons: computing machinability on three- four- and five-axis

numerically controlled machines," *ACM Tr. on Graphics,* Vol. 12, No. 14, pp. 305-326, 1993.
[2] L. L. Chen, S. Y. Chou, and T. C. Woo, "Paring directions for mould and die design," *Computer-ided Design*, Vol. 25, No. 12, pp. 762-768, 1993.
[3] L. L. Chen and T. C. Woo, "Computational geometry on the sphere with application to automated machining," *Tr. ASME, J. of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 288-295, 1992.
[4] P. Gupta *et al.*, "Efficient geometric algorithms for workpiece orientation in 4- and 5-axis NC machining,", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 8, pp. 577-587, 1996.
[5] J. O'Rourke, C. B. Chien, T. Olson, and D. Naddor, "A new linear algorithm for intersecting convex polygons," *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 19, pp. 384-391, 1982.
[6] F. P. Preparata and M. I. Shamos, Computational Geometry: An Introduction, Springer-Verlag, 1985.
[7] M. I. Shamos, "Geometric complexity,", *Pr. of Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 224-233, 1975.
[8] M. I. Shamos and D. Hoey, "Geometric intersection problems," *Seventeenth Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 208-215, 1976.
[9] K. Tang, T. Woo, and J. Gan, "Maximum intersection of spherical polygons and workpiece orientation for 4- and 5-axis machining," *Tr. ASME, J. of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 477-485, 1992.
[10] G. T. Toussaint, "A simple linear algorithm for intersecting convex polygons," *The Visual Computer*, Vol. 1, pp. 118-123, 1985.
[11] 하종성, 신성용, "삼차원 제조성에 응용할 수 있는 다면체 단조성의 특성화", *한국정보과학회논문지(A),* Vol. 24, No. 11, pp 1051-1058, 1997.

하 종 성
1984년 서울대학교 컴퓨터공학과 졸업(공학사). 1986년 한국과학기술원 전산학과 졸업(공학석사). 1996년 한국과학기술원 전산학과 졸업(공학박사). 1986년 ~ 1989년 현대전자산업(주) 근무. 1990년 ~ 현재 우석대학교 정보통신컴퓨터 공학부 부교수. 관심분야는 계산기하학, 컴퓨터그래픽스, CAD/CAM등임