단순 다각형에서의 경비 가능 충분 집합
(Guard Sufficiency Set for Simple Polygons)

양 태 천 † 신 찬 수 ††
(Tae-Cheon Yang) (Chan-Su Shin)

요 약 단순 다각형 P에 대한 새로운 화랑문제인 경비가능충분집합(Guard Sufficiency Set:GSS)에 대하여 소개하고 정의하였다. 집합 $S \subset P$가 P의 **경비가능집합**이라는 의미는 P의 각 점들이 최소한 S에 있는 한 점으로부터 보인다는 것을 의미한다. 집합 $G \subset P$가 P의 **경비가능충분집합**이라는 의미는 G를 경비 가능한 임의의 집합 $S \subset P$가 P 역시 경비 가능하다는 것을 의미한다. 본 논문에서는 꼭지점에 대한 GSS가 다각형 전체에 대한 GSS가 되는 다각형 부류를 제시하고, 또한 에지에 대한 GSS가 다각형 전체에 대한 GSS가 되는 다각형 부류를 제시한다. 그리고, P의 꼭지점에 대한 GSS의 크기에 대한 하한과 상한을 제시하고, 기하학적 요소에 특정 제약조건을 주어 대체 GSS을 정의할 수 있음을 보인다. 이 외에도 다양한 GSS 문제들을 소개하고, 기하학적 요소에 제약을 가한 **대체** GSS를 정의하고 그와 관련된 가설을 하나 제시한다.

Abstract Let P be a simple polygon of n vertices. A point $p \in P$ "sees" another point $q \in P$ if an open segment connecting p and q does not intersect the boundary of P. A Guard Sufficiency Set(GSS) for P is defined to be a set of points("viewpoints"), $S \subset P$, such that if a subset $G \subset P$ sees every point of S, then G sees every point of P. This GSS problem is a variant of well-investigated classical Art Gallery problems. In this paper, we introduce several GSS characterization problems for polygons, and present some solutions of them.

1. 서 론

1.1 화랑 문제

고전적으로 화랑 문제(Art Gallery Problem)는 화랑에 전시된 작품의 보호를 위해 화랑 전체를 감시할 수 있는 경비원의 최소 인원수를 결정하는 문제로부터 출발하였다. 다시 말하면, 이차원 평면에 n개의 꼭지점으로 구성된 단순 다각형(simple polygon) P의 내부나 경계에 최소 인원의 경비원을 배치하여 다각형의 전체를 '보는' (감시하는) 문제이다. 여기서, 다각형 P의 내부나 경계에 주어진 두 점이 서로 **보인다**는 것은 두 점을 연결한 선분이 다각형의 외부와 만나지 않음을 의미한다.

· 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(981-0925-133-1) 지원으로 수행되었음.
† 종신회원 : 경성대학교 정보과학부 교수
tcyang@star.kyungsung.ac.kr
†† 정 회 원 : 한국과학기술원 전자전산학과 BK21 연구교수
cssin@jupiter.kaist.ac.kr
논문접수 : 2000년 9월 22일
심사완료 : 2000년 11월 15일

이러한 화랑문제는 경비원이 움직이느냐 그렇지 않느냐에 따라, 경비원이 볼 수 있는 범위가 고정되어 있느냐 그렇지 않느냐에 따라, 그밖에 다른 여러 조건에 따라 매우 다양한 화랑 문제가 정의되고, 30여년 동안 많은 연구가 진행되었다 [1].

이 논문에서는 새로운 화랑 문제를 정의하고 그 가운데 세 가지 문제에 대한 결과를 제시한다.

1.2 문제 정의

이 논문에서 다각형 P는 다각형의 경계만을 의미하지 않고, 경계와 그 내부를 포함한 영역으로 정의한다.

집합 $S \subset P$가 P의 **경비가능집합**이라는 의미는 P의 각 점들이 최소한 S에 있는 한 점으로부터 보인다는 것이다. (또는 S가 P를 "볼 수 있다" 라고 말한다.) 예를 들어, 그림 1에서 $S = \{ v_1, v_3, v_5 \}$은 P에 대한 경비가능집합이며, P의 모든 점은 S의 세 점 가운데 적어도 하나 이상의 점으로부터 보인다.

그림 1에서 P의 세 개의 꼭지점 v_1, v_3, v_5를 고려하자. 만약 어떤 집합 $S \subset P$가 이들 세 개의 꼭지점을 볼 수 있다면 P 역시 S가 볼 수 있다. 즉 S가 P 전체

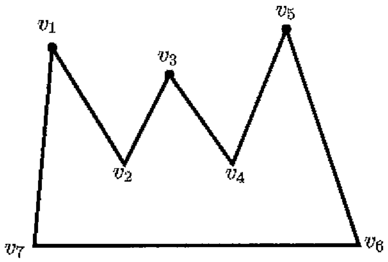


그림 1 GSS = { v_1, v_3, v_5 }

가 아닌 P의 부분집합 G = { v_1, v_3, v_5 }만 보면 P의 모든 점을 보았다 라고 확신할 수 있음을 의미한다. 이처럼, 집합 $G \subset P$만 보면 P 전체를 보았다는 것을 보장하는 집합 G를 P의 **경비가능충분집합** (Guard Sufficiency Set, 줄여서 GSS라 표기)이라고 정의한다.

그림 1에서 GSS는 P의 꼭지점 v_1, v_3, v_5가 된다. 그러나 그림 2에서는 꼭지점 v_1, v_3, v_5에 경비원이 있다면 다각형의 모든 경계를 볼 수 있다. 그렇지만 다각형의 가운데 삼각형 $\triangle(a,b,c)$ 부분은 그 경비원들이 볼 수 없다. 즉, GSS = { v_1, v_3, v_5 }이 될 수 없다. 이 경우에 GSS = { v_1, v_3, v_5, $\triangle(a,b,c)$ }가 된다. 여기서 알 수 있는 중요한 사실은 GSS가 무한개의 점으로 구성된 무한집합이 될 수 있다는 것이다. 또한 꼭지점 v_1, v_3, v_5의 각이 매우 작다면 GSS는 다각형의 전체 영역에 가까워질 수도 있다.

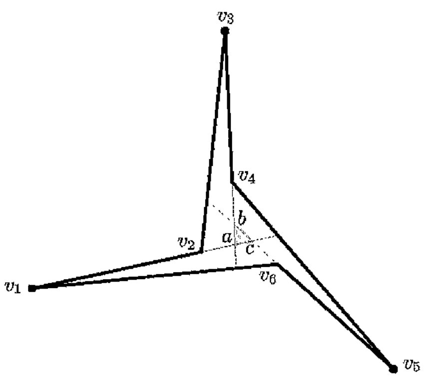


그림 2 GSS가 무한집합인 경우

이러한 다각형에 대한 GSS 문제는 J. B. Mitchell[2]에 의해 1995년에 처음으로 정의되었으며, 그동안 어떠한 GSS 관련 결과도 공식적으로 발표된 바 없다. 실제로 여러 가지 조건들을 고려하면 매우 다양한 GSS 관련 문제들을 정의할 수 있는데, 대표적으로 생각할 수 있는 문제들은 다음과 같다.

1. 주어진 다각형 P의 GSS가 유한집합인지 무한집합인지를 판별하는 문제.
2. P의 GSS가 유한한 집합이 되기 위한 필요충분조건을 구하는 문제.
3. P의 GSS가 유한한 경우에 GSS 중에서 크기가 가장 작은 GSS의 크기를 $\sigma(P)$라 표기하자.

$$\sigma_n = \max_{\forall P:|P| = n} \sigma(P)$$

이라 하자. 이때, σ_n 상한과 하한을 구하는 문제.

또한, P의 (경계와 내부의) 모든 점을 보기 위한 GSS를 고려하는 문제 이외에도 P의 에지들에 대한 GSS와 P의 꼭지점들에 대한 GSS 문제들도 위에서와 같은 방법으로 정의할 수 있다.

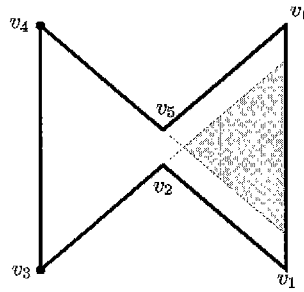


그림 3 v_3, v_4에 경비원을 배치하면 모든 꼭지점을 볼 수 있지만 빗금 친 영역 안의 에지 부분은 보질 못한다.

어떤 집합 $S \subset P$이 다각형의 꼭지점을 모두 볼 수 있다면 S가 P의 모든 에지를 볼 수 있다고 말할 수 없다 (예: 그림 3). 또한, S가 P의 모든 에지를 볼 수 있다고 해서 P의 내부 전체를 볼 수 있는 것도 아니다 (예: 그림 2). 반면에 어떤 특정 부류(class)에 따라서, 모든 꼭지점을 볼 수 있으면 에지들 또한 모두 볼 수 있는 다각형 부류도 존재하고, 모든 에지를 볼 수 있으면 다각형 내부를 볼 수 있는 다각형 부류도 존재한다. 따라서 다음과 같은 문제를 생각해 볼 수 있다. 다시 말하면, 다각형 부류에 따라서 꼭지점에 대한 GSS가 에지에 대한 GSS가 될 수도 있고, 에지에 대한 GSS가 다각형 전체에 대한 GSS가 될 수도 있다. 그래서 다음과 같은 문제를 고려해 볼 수 있다.

4. 꼭지점에 대한 GSS가 에지에 대한 GSS가 되는

다각형 부류를 파악하는 문제.

5. 에지에 대한 GSS가 다각형 전체에 대한 GSS가 되는 다각형 부류를 파악하는 문제.

이제, P의 꼭지점에 대한 GSS를 고려해보자. P의 꼭지점 집합 자체가 하나의 GSS가 된다. 즉, $\sigma_n \leq n$. 여기서 다음의 문제를 생각해 볼 수 있다.

6. P의 꼭지점에 대한 σ_n의 상한과 하한을 구하는 문제.

본 논문의 2절과 3절에서는 각각 문제 4, 5, 6에 대한 결과를 제시하고, 4절에서는 다른 종류의 GSS문제를 제시한다. 문제 1, 2, 3과 4절에서 제시하는 문제는 모두 미해결 문제이며, 향후 연구 주제이다.

2. 다각형 부류에 따른 경비 가능 충분 집합

본 논문에서는 다각형을 다음과 같이 일곱 가지로 분류한다.

- **볼록 다각형 (Convex polygon)**: 볼록 꼭지점들로만 구성된 다각형.
- **별모양 다각형 (Star-shaped polygon)**: 다각형 내부의 한 점에서 다각형 전체를 볼 수 있는 다각형.
- **소용돌이 다각형 (Spiral polygon)**: 볼록 꼭지점들로만 구성된 하나의 **볼록체인**과 오목 꼭지점들로만 구성된 다른 하나의 **오목체인**으로 구성된 다각형.
- **단변단조 다각형 (Unimodal polygon)**: 하나의 선분 s와 s의 양 끝점을 연결하는 s에 단조한 체인으로 구성된 다각형. (여기서 하나의 체인이 s에 단조하다는 것은 s에 직교한 직선이 체인과 오직 한 점에서만 만난다는 것을 의미한다.)
- **직교 다각형 (Rectilinear polygon)**: 각 에지가 수평선분이나 수직선분인 단순 다각형.
- **단조 다각형 (Monotone polygon)**: 하나의 축 (예를 들어, x-축)에 단조한 두개의 체인으로 구성된 다각형.
- **단순 다각형 (Simple polygon)**: 서로 교차하지 않는 다각형.

앞의 모든 부류는 단순 다각형에 속하며, 볼록 다각형은 별모양 다각형에 포함되고, 단변단조 다각형은 단조 다각형의 특수한 경우이다.

정리 1 *볼록 다각형, 별모양 다각형, 소용돌이 다각형, 단변단조 다각형 부류에 속하는 다각형 P에서 에지에 대한 GSS는 P 전체에 대한 GSS이다. 그 이외의 다각형 부류에 대해선, 성립하지 않는다.*

증명: 이 정리를 증명하는 것은, GSS 정의에 의해, 어떤 경비가능집합 $S = \{g_1, \ldots, g_k\} \subset P$가 P의 에지 전체를 볼 수 있다면 S가 P 내부 또한 볼 수 있음을 증명하는 것과 같다. 다각형 P의 에지들은 시계방향으로 구성되어 있다고 가정한다.

볼록 다각형: 다각형 정의에 의해 당연히 성립.

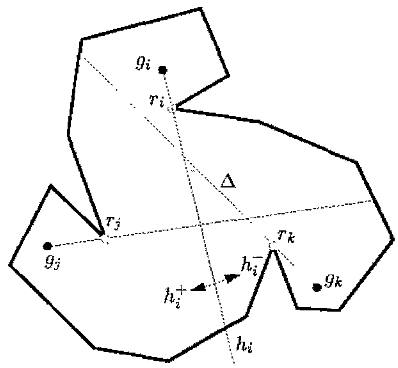


그림 4 별모양 다각형

별모양 다각형: P의 내부를 모두 볼 수 있는 P의 점들의 집합을 K 이라 하자. 각 에지 e에 대해, e를 포함하는 직선 h_e를 정의하고, h_e의 오른쪽 반평면 (half-space)을 h_e^+, 왼쪽 반평면을 h_e^-라고 정의하자. (여기서 h_e^+와 h_e^-는 모두 h_e를 포함한 반평면으로 정의된다.) 그러면, $K = \bigcap \forall_e \, h_e^+$로 정의된다.

만약, S가 모든 에지를 볼 수 있지만, P 내부의 일부분 $\Delta \subset P$은 보지 못한다고 가정하자. Δ는 P의 내부에 완전히 포함되므로 Δ는 적어도 세 개 이상의 변들로 구성된 다각영역이 된다. 논의를 간단히 하기 위해, Δ가 세 변으로 구성된 삼각형이라 가정하자. (Δ가 네 개 이상의 변으로 구성된 경우에도 비슷한 방법으로 해결할 수 있다.) 각 변은 그림 4에서 처럼 S의 세 경비원 g_i, g_j, g_k로부터 보이지 않는다고 가정하자. 이것은 g_i와 오목 꼭지점 r_i를 연결하는 직선 h_i에 대해, Δ는 h_i^-에 포함됨을 의미한다. 그러나 r_i에 인접한 P의 두 에지는 모두 h_i^+에 포함됨을 주의하자. 같은 이유로, Δ는 h_j^-와 h_k^-에 포함되어야 한다. 결국 $\Delta = h_i^- \cap h_j^- \cap h_k^- \neq \emptyset$. 반면에 $h_i^+ \cap h_j^+ \cap h_k^+ = \emptyset$이 된다. 그러나 K 의 정의에 의해, $K \subseteq h_i^+ \cap h_j^+ \cap h_k^+$ 이므로 $K \neq \emptyset$이라는 가정에 어긋난다.

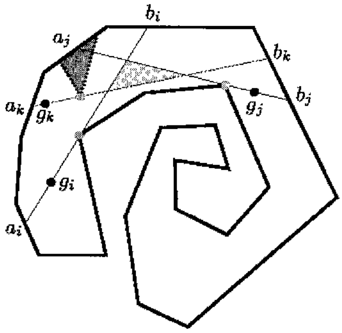


그림 5 소용돌이 다각형

소용돌이 다각형: 별모양 다각형에 대한 증명처럼 △를 정의하자. 그림 5처럼 g_i, g_j와 r_i, r_j를 각각 지나는 직선 h_i, h_j를 생각해보자. r_i에서 한쪽 방향으로 h_i를 따라가서 P의 에지와 처음으로 만나는 점을 a_i라 하고 다른 방향으로 따라가서 처음으로 만나는 점을 b_i라 하자. 단, a_i는 b_i보다 시계방향순서로 먼저 온다고 가정하자. 이와 같은 방법으로 r_j에 대해서도 a_j, b_j를 정의할 수 있다. 이제 a_i와 b_i사이의 P의 경계부분을 P_i라 하면 P_i는 당연히 볼록체인의 일부분임을 알 수 있다. P_j또한 볼록체인의 일부분이다. 마지막으로 g_k와 r_k를 지나는 h_k를 고려하자. $\triangle = h_i^- \cap h_j^- \cap h_k^- \neq \emptyset$ 이기 때문에, h_k는 h_i, h_j와 모두 교차하여야 하며 r_k에 인접한 P의 두 에지는 h_k^+에 속해야 한다. 그러나 $a_k \in P_i$이고 $b_k \in P_j$이므로 그러한 r_k는 존재하지 않는다. 모순 발생.

단변단조 다각형: 단변단조 다각형 P는 하나의 선분 s와 s의 양 끝 점을 연결한 s에 단조한 체인 C로 구성된다. 여기선 s가 x축과 평행하고 C가 s의 위쪽에 온다고 가정한다. s의 왼쪽 끝 꼭지점을 v_1라 하고 오른쪽 꼭지점을 v_n이라 하면, C의 꼭지점들은 왼쪽에서 오른쪽으로 $v_2, \ldots, v_{n-1}$로 배열된다. 여기서 $x(v_i)$가 꼭지점 v_i의 x좌표를 나타낸다면,

$x(v_1) < x(v_2) < \ldots < x(v_n)$이 성립한다.

체인 C의 오목 꼭지점 r을 지나는 직선들 중에서 r에 인접한 두 에지가 직선의 한쪽 반평면에 오는 직선 ℓ을 고려하자. 그러면 단변단조 성질에 의해 두 인접 에지들은 모두 ℓ의 위쪽 반평면에 와야 한다.

논의를 간단히 하기 위해, △를 정의하는 세 경비원 g_i, g_j, g_k의 x-좌표값이 $x(g_i) < x(g_j) < x(g_k)$라고 가정하자. 그러면, $\triangle \subset h_i^- \cap h_j^-$이고, r_i, r_j에 인접한 두 에지들은 각각 h_i와 h_j의 위쪽 반평면 (즉 h_i^-와 h_j^-)에 완전히 포함된다. $\triangle \neq \emptyset$을 보장하기 위해선 반드시 r_k의 두 인접 에지들은 h_k의 아래쪽 반평면에 와야 한다. (그렇지 않다면 △는 P의 경계의 일부분을 포함하게 된다.) 이것은 두 인접 에지들이 h_k의 위쪽 평면에 와야 한다는 사실에 모순이다.

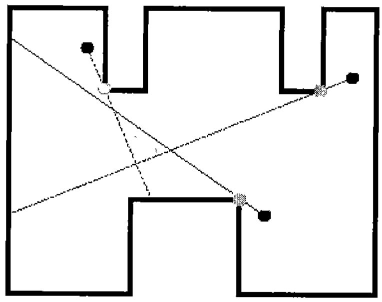


그림 6 직교다각형

직교 다각형: 그림 6에서 세 명의 경비원이 모든 에지를 볼 수 있지만 빗금친 삼각영역은 보지 못한다.

단조 다각형: 그림 2는 단조다각형이다. 경비원을 v_1, v_3, v_5에 놓아 P의 전체 에지를 볼 수 있지만 $\triangle(a,b,c)$를 보지 못 한다. 그러므로 단조 다각형을 포함한 모든 다각형 부류들은 에지를 모두 볼 수 있는 것이 다각형 내부 전체를 볼 수 있다는 것을 의미하지 않는다. □.

다음의 정리도 성립한다. 정리 1과 유사한 방법으로 쉽게 증명할 수 있기 때문에 증명은 생략한다.

정리 2 *볼록 다각형과 단변단조 다각형에 대해서, 꼭지점에 대한 GSS는 다각형 전체에 대한 GSS가 된다. 나머지 부류에 대해선 성립하지 않는다.*

3. 꼭지점에 대한 경비 가능 충분 집합의 크기

이 절에선 임의의 단순 다각형 P의 꼭지점에 대한 GSS의 크기 σ_n의 상한과 하한을 제시한다. (σ_n의 정의는 1 절 참조)

그림 7에서 P의 꼭지점수가 짝수라 하자. v_1과 $v_{n/2+1}$ 사이의 간격이 매우 작은 '바늘구멍'을 통해서 왼쪽체인 L (v_2에서 $v_{n/2}$까지 시계방향 체인)에 있는 꼭지점 v_i가 볼 수 있는 오른쪽체인 R ($v_{n/2+2}$에서 v_n까지의 시계방향 체인)에 있는 꼭지점은 $v_{i+n/2}$ 뿐

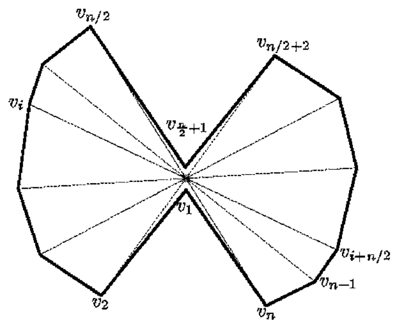


그림 7 σ_n의 하한

이라고 가정하자. 그러면 v_1과 $v_{n/2+1}$을 제외한 다른 꼭지점들은 모두 GSS에 포함되어야 한다. 만약 L에 있는 한 꼭지점 v_i가 GSS에 포함될 필요가 없다고 가정하자. 꼭지점 $v_{i+n/2}$을 제외한 R의 모든 꼭지점에 경비원을 하나씩 배치한다. 그러면 경비원들은 v_i만을 제외한 모든 꼭지점 (즉 GSS에 있는 모든 꼭지점)을 보게 된다. 이것은 GSS에 v_i가 반드시 포함되어야 함을 의미한다. 결국 GSS는 v_1과 $v_{n/2+1}$을 제외한 모든 $(n-2)$개의 꼭지점으로 구성된다.

만약 P의 꼭지점 개수가 홀수라면, L에 있는 한 꼭지점 v_i은 바늘구멍을 통해 보이는
R의 꼭지점이 존재하지 않는다. 짝수 경우와 마찬가지로 v_i는 반드시 GSS에 포함되어야
한다. 그래서,

$$(n-2) \le \sigma_n.$$

이제, n개의 꼭지점을 갖는 임의의 다각형 P에 대해서 $\sigma(P) \le (n-2)$임을 증명하면 된다. 이를 위해, 몇가지 정의가 필요하다.

P의 에지들 중에서 한 쪽 끝 점이 볼록 꼭지점이고 다른 쪽 끝 점이 오목 꼭지점인 에지들의 집합을 E라 한다. 에지 $e \in E$에 대해서, 볼록 꼭지점을 $c(e)$, 오목 꼭지점을 $r(e)$, e를 P의 내부를 향하도록 (볼록 꼭지점에서 오목 꼭지점 방향으로) 연장하여 반직선(ray)을 그려 P의 경계와 처음으로 만나는 교차점 q라 하자. (그림 8 참조) $r(e)$와 q를 잇는 선분을 $s(e)$라 표기하면, $s(e)$에 의해 P는 두 개의 부 다각형(sub-polygon)으로 나뉘는데, e를 포함한 부 다각형을 $P(e)$라 한다.

정의 1

에지 $e \in E$에 대해, $P(e)$의 점 중에서 $c(e)$를 볼 수 있는 점 p가 $r(e)$를 항상 볼 수 있다면, $P(e)$를 블록 포켓이라 정의한다.

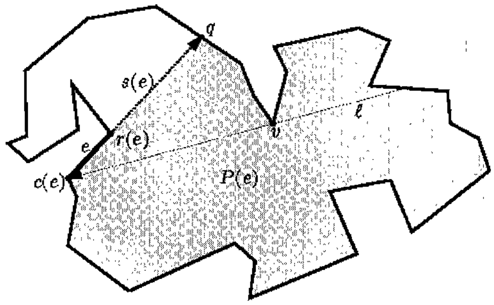


그림 8 몇가지 정의

$P(e)$가 블록 포켓이 아니라면, 점 $p \in P(e)$에서 $c(e)$는 볼 수 있지만 $r(e)$는 $P(e)$에 속하는 다른 오목 꼭지점 v에 의해 가려서 볼 수 없는 경우가 발생해야 한다. $r(e)$가 v에 의해 가려진다는 것은 그림 8처럼 $c(e)$에서 출발하여 v를 지나는 반직선 ℓ에 대해, v에 인접한 두 에지와 $r(e)$ 모두 ℓ의 한 쪽 반평면에 온다는 의미이다. 그러한 오목 꼭지점 v를 e의 **장애** 꼭지점이라 부른다. 그러면 다음과 같은 사실이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

소정리 1 *$P(e)$가 블록 포켓이라면 장애 꼭지점이 존재하지 않아야 한다. 그 역도 성립한다.*

꼭지점 $c(e)$가 GSS에 포함되어 있다고 가정하자. $c(e)$를 보는 경비원 g는, $P(e)$의 정의에 의해, 반드시 $P(e)$의 내부(또는 경계)에 위치해야 한다. 경비원 g에서 보이는 $P(e)$의 점들을 모아 ν 라 정의한다. ν는 $P(e)$에 포함되는 다각형 영역이기 때문에, ν의 경계는 $c(e)$, $r(e)$를 제외한 P의 꼭지점을 최소한 하나 이상 포함해야 한다. 그러한 꼭지점 가운데 하나를 z라 하자. 만약 $P(e)$가 블록 포켓이라면, 그 정의에 의해 g는 $r(e)$도 항상 볼 수 있다. 그리고 g는 $c(e)$, $r(e)$이외의 꼭지점 z 또한 볼 수 있다. 그래서, $r(e)$와 z는 GSS에 포함시킬 필요가 없다. 즉, P에 하나 이상의 블록 포켓이 항상 존재한다고 증명하면

$\sigma_n \le (n-2)$임이 증명된다.

소정리 2 *P에는 언제나 하나 이상의 블록 포켓이 존재한다.*

증명: P에 오목 꼭지점이 없다면, P는 블록 다각형이 되어 한명의 경비원으로 GSS가 구성된다. 그래서 P는 하나 이상의 오목 꼭지점을 갖고 있다고 가정한다. 이것은 $|E| \ge 1$임을 의미한다.

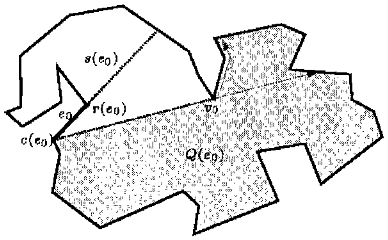
E에 속하는 임의의 에지 e_0에 대해, 선분 $s(e_0)$를 찾아 $P(e_0)$를 정의한다. 만약 $P(e_0)$가 블록 포켓이면

증명이 되므로 볼록 포켓이 아니라고 가정하자. 소정리 2에 의해 e의 장애 꼭지점 v가 존재한다. (그림 9의 위쪽 다각형 참조) $c(e_0)$와 v_0를 잇는 선분에 의해 $P(e_0)$가 다시 두 부 다각형으로 나뉜다. 그 중에서 $r(e_0)$를 포함하지 않는 부 다각형을 $Q(e_0)$라 표기한다.

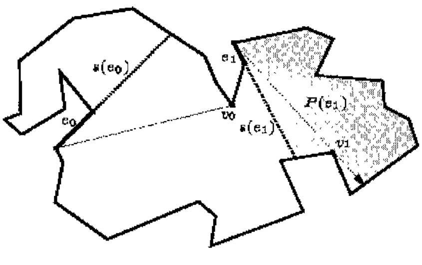
이젠, v_0에서 e가 보이지 않는 방향으로 $Q(e_0)$의 에지를 차례로 따라가면서 **가장 처음에** 나타나는 $e_1 \in$ E을 찾는다. (그림 9 가운데 다각형 참조) 이렇게 하면 $s(e_1)$은 $Q(e_0)$안에 완전히 포함된다. 다시 말하면, $s(e_0)$와 $s(e_1)$은 서로 교차하지 않는다. $s(e_1)$에 의해 $P(e_1)$이 정의되면, $P(e_1) \subset Q(e_0) \subset P(e_0)$이다. 에지 e_0는 더 이상 $P(e_1)$에 포함되지 않으므로 $|P(e_1)| < |P(e_0)|$이 성립한다. 여기서 $|P(e)|$는 $P(e)$에 속하는 P의 꼭지점의 개수로 정의된다. $P(e_1)$이 볼록 포켓이라면 증명은 끝난다. 만약 볼록 포켓이 아니라면 위에서와 같은 방법으로 e_1의 장애 꼭지점 v_1을 찾아서 v_1에서 $Q(e_1)$의 에지를 따라가면서 가장 처음에 나타나는 $e_2 \in E$를 찾는다. 그러면 $s(e_2)$은 $s(e_0)$, $s(e_1)$와 교차하지 않고, 역시 $P(e_2) \subset Q(e_1) \subset P(e_1)$과 $|P(e_2)| < |P(e_1)|$이 성립한다.

이런 방법으로 볼록 포켓이 발견될 때까지 진행한다. 모든 $i \geq 0$에 대해서 $|P(e_{i+1})| < |P(e_i)|$ 이므로 최대 n 단계 이상 진행될 수 없다. $P(e_i)$가 볼록 포켓이 아니라면 항상 장애 꼭지점 v_i이 $P(e_i)$ 내부에 존재해야 한다. 그러나 v_i는 $P(e_{i+1})$에 더 이상 포함되지 않으므로, 어떤 k ($\leq n$)번째 단계에 이르면 $P(e_k)$ 내부엔 더이상 장애 꼭지점이 존재하지 않게 된다. 즉, $P(e_k)$가 볼록 포켓이 되어야 한다. 그림 9에서는 $P(e_2)$가 볼록 포켓으로 정의되었다. (즉, $k = 2$) □.

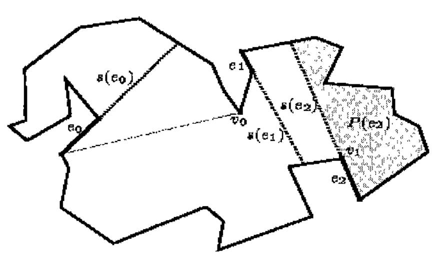
정리 3 *다각형 꼭지점에 대한 GSS의 크기* $\sigma_n = (n - 2)$.



(a)



(b)



(c)

(a) $Q(e_0)$를 구하는 과정

(b) $P(e_1)$를 구하는 과정

(c) $P(e_2)$를 구하는 과정

그림 9 소정리 2의 증명

4. 대체 경비 가능 충분 집합

서론에서의 그림 2에서 꼭지점 v_1, v_3, v_5의 각도가 0도에 가까워지면 거의 모든 다각형의 영역이 GSS가 된다. 이처럼 다각형의 GSS를 구하는 문제는 큰 의미가 없을 수 있다. 본절에서는 GSS의 역할을 할 수 있는 대체(alternate) GSS에 대해 살펴보고자 한다. 즉, 다각형내의 기하학적인 요소에 특정한 조건을 주어 GSS의 역할을 할 수 있도록 하는것이다. 이러한 대체 GSS가 되는 몇가지 기하학적인 요소와 조건을 고려해 볼 수 있으나, 본 절에서는 다각형을 삼각화(triangulation)하는 대각선분(diagonal)에 대해서 생각해 보겠다.

다각형을 삼각화하는 각 각의 대각선분들을 완전 가시성(compelete visibility)으로 선분의 양면을 본다고 하자. 하나의 대각 선분을 완전 가시성으로 본다는 것은 한 명의 경비원이 고정된 위치에서 그 대각 선분전체를 보는 것을 의미한다. 그림 10(a)에서 꼭지점 v_6와 v_3위에 있는 경비원은 대각선분 f의 양면을 완전 가시성으로

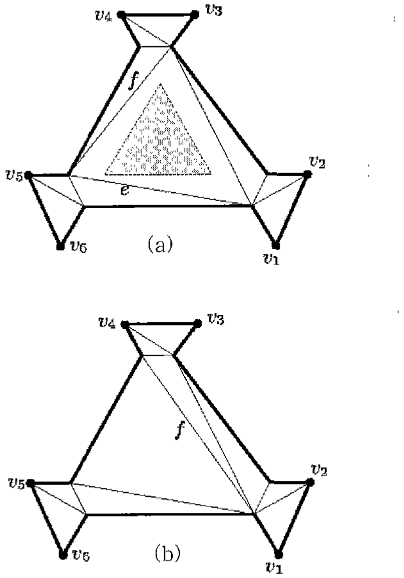


그림 10 삼각화의 대각선분이 (a) 대체 GSS로 정의될 수 없는 경우 (b) 대체 GSS로 정의될 수 있는 경우

볼 수 있다. (여기서 v_3는 f의 위쪽 면을 완전가시성으로 보고, v_6는 f의 아래쪽 면을 완전가시성으로 본다.) 그러나, 꼭지점 v_6에 있는 경비원은 대각선분 e의 한 면의 일부는 볼 수 있으나 전체를 보지 못하기 때문에 v_3와 v_6는 완전가시성으로 e의 양면을 보지 못한다.

그림 10(a)에서 다각형의 경우 꼭지점 v_1 부터 v_6 까지 6개의 꼭지점에 경비원이 배치되어 있다면 대각선분 모두의 양면을 완전가시성으로 볼 수 있으나 다각형의 내부에 경비원이 볼 수 없는 영역(빗금친 영역)이 존재한다. 그러므로 이 경우에는 다각형의 모든 대각선분의 양면을 완전가시성으로 본다고 해도 다각형 전체를 볼 수 없기 때문에 대각선분의 양면을 완전가시성으로 본다는 것이 GSS가 되지 못한다. 그러나, 다른 형태의 삼각화를 한 그림 10(b)의 경우에는 대각선분 모두의 양면을 완전가시성으로 보기 위한 경비원의 배치는 다각형 내부 모두를 볼 수 있게된다. f의 아래쪽 면을 보기 위해선 v_5, v_6가 아닌 f의 아래쪽 어딘가에 경비원이 위치해야 한다. 그 경비원은 그림 10(a)의 빗금 친 영역을 언제나 볼 수 있게 된다. 결국, 이 경우는 대각선분의 양면을 완전가시성으로 보는 것이 다각형 내부 전체를 보게 되므로 GSS가 된다.

그림 10의 예에서 보듯이 삼각화의 방법에 따라 대각선분의 양면을 완전가시성으로 보는 것이 GSS가 되기도 하고 되지 않기도 한다. 그러나, 모든 가능한 삼각화 중 적어도 하나는 대각선분 모두의 양면을 완전 가시성으로 보면 GSS가 될 것이라 생각한다.

가설 1 *대각선분 모두의 양면을 완전 가시성으로 보면 GSS가 되는 삼각화가 존재한다.*

5. 결 론

본 논문에서는 새로운 화랑문제인 경비 가능 충분 집합(GSS)을 정의하였고 이와 관련된 여러가지 문제들을 제시하였다. 제시한 문제들 중에서 꼭지점에 대한 GSS가 다각형에 대한 GSS가 되는 다각형의 부류가 볼록 다각형과 단조 다각형뿐임을 보였고, 또한 에지에 대한 GSS가 다각형 전체에 대한 GSS가 되는 다각형 부류가 볼록 다각형, 별 모양 다각형, 소용돌이 다각형, 그리고 단순변조 다각형임을 보였다. 또한, P의 꼭지점에 대한 σ_n이 n-2임을 보였다. 마지막으로 기하학적 요소에 제약을 가한 대체 GSS를 소개하였고, 앞으로의 연구과제로 하나의 가설을 제시하였다.

참 고 문 헌

[1] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, New Yor, 1987.
[2] J. S. B. Mitchell, Private communication, 1995.


양 태 천
1982년 경북대학교 전자공학과(학사). 1982년 3월 ~ 1984년 2월 한국과학기술원 전산학과(석사). 1988년 3월 ~ 1994년 2월 한국과학기술원 전산학과(박사). 1984년 3월 ~ 현재 경성대학교 정보과학부 교수. 1995년 1월 ~ 1995년 12월 SUNY at Stony Brook 연구교수(교육부파견). 관심분야는 계산기하학, 컴퓨터 그래픽스


신 찬 수
1991년 서울대학교 계산통계학과(학사). 1993년 한국과학기술원 전산학과(석사). 1998년 한국과학기술원 전산학과(박사). 1999년 3월 ~ 2000년 3월 홍콩과기대 전산학과 Post-Doc. 2000년 3월 ~ 2000년 6월 한국과학기술원 전자전산학과 BK21 Post-Doc. 2000년 7월 ~ 현재 한국과학기술원 전자전산학과 BK21 연구교수. 관심분야는 계산기하학, 그래프 드로잉, 컴퓨터그래픽스.