응용통계연구 제 **14**권 1호, *2001*년, *pp. 59-70*

새로 육성된 자식계통의 평가를 위해 사용되는 두 군간 교배의 블록화 설계 및 효율 계산

김공순[1] 배종성[2] 김 진[3]

요 약

이면교배 실험은 식물이나 동물의 교배를 통해 자식계통의 유전적인 성질을 조사하는데 중요한 역할을 한다. 이면교배에 관한 기존의 연구에서는 p개의 자식계통은 하나의 집합에 속하는 것으로 간주하였다. 이와 달리 새로 육성된 자식계통의 유전적 성질을 평가하고자 하는 경우에는, p개의 자식계통이 각각 p_1과 p_2개의 자식계통을 갖는 두 개의 집합으로 분리되는 형태의 교배실험을 사용한다(단, $p = p_1 + p_2$). 이에 본 연구에서는 자식계통이 두 집단으로 분리된 경우에 대해서 Kempthorne의 합동식을 이용하여 두 군간 교배에 대한 블록디자인을 설계하고, 이에 대한 평균효율인자를 계산하는 방법을 제안하고자 한다.

주요용어: 부분이면교배, 두 군간 교배, 평균효율인자.

1. 서론

이면교배(diallel cross)실험은 동물이나 식물, 특히 식물의 동계교배(inbreeding)실험에서 자식 대(off spring)의 자식계통(inbred lines)의 유전적인 성질을 분석하여 어미 대의 유전적인 성질을 연구하는데 사용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 여기서 자식계통이란 동일한 혈통을 갖는 생물학적 집단을 일컫는다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는 p개의 자식계통에서 i번 자식계통과 j번 자식계통의 교배(cross)를 $(i \times j)$, $i, j = 1, 2, \cdots, p$로 나타내고, 실험에서 사용되는 교배의 수를 n이라 하자. Griffing(1956)은 사용 가능한 종류의 자식계통쌍을 교배로 이용한다는 의미에서, 사용되는 교배의 종류에 따라 $n = p^2$, $n = p(p+1)/2$, $n = p(p-1)$, $n = p(p-1)/2$ 일 경우 각각 타입 I,II,III,IV라 하였다. Griffing의 타입 IV에서 p가 증가하면 실험할 교배의 수가 급격히 증가하여 실제로 실험하기 힘든 경우가 발생한다. 이 경우에는 타입 IV에서 일부분의 교배($n = ps/2$, $s < p-1$, s는 각 자식계통이 다른 계통과 만나는 횟수)만 사용하는 이면교배실험을 사용하게 되는데, 이를 부분이면교배(partial diallel cross)실험이라 한다. 부분이면교배 실험에 대응된다는 의미에서 통계학자들은 타입 IV를 완전이면교배(complete diallel cross)실험이라 한다.

1) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 정보통신연구소, 연구원
E-mail: gong@chonnam.chonnam.ac.kr
2) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 자연과학대학 통계학과, 교수
E-mail: jsbae@chonnam.chonnam.ac.kr
3) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 자연과학대학 통계학과, 박사과정

지금까지 연구된 이면교배는 p개의 자식계통은 하나의 집단에 속한다고 간주하여 가능한 모든 교배를 실험의 대상으로 삼았다. 그러나 이러한 방법 외에도 때때로 새로 육성된 자식계통을 평가하고자 하는 경우에는, p개의 자식계통을 포함하는 전체 집단을 p_1개의 자식계통을 갖는 집단과 p_2개의 자식계통을 갖는 집단으로 분리하여, 한 집단의 자식계통을 검정계통(test line)으로 사용하기도 한다. 이러한 경우에는 같은 집단에 속하는 자식계통끼리는 교배를 하지 않고, 다른 집단에 속하는 자식계통끼리만 교배를 하는 실험 방법을 사용한다. 여기서 검정계통이란 매년 육성되는 새로운 자식계통을 평가하기 위해 미리 선정해 둔 몇 개의 우수한 자식계통을 의미한다. 이러한 방법을 본 연구에서는 자식계통이 두 개의 집단으로 분리된다는 의미에서 두 군간 교배(crosses between two classes)라 부르기로 한다. 두 군간 교배에서 실험의 수가 많거나 공간적, 시간적 제약조건 때문에 동일한 실험조건 하에서 모든 교배를 할 수 없는 경우에는 블록화를 실시하게 된다. 그러나 두 군간 교배에서는 검정계통끼리(표 2.1의 A 집단)는 교배를 하지 않고, 새로 육성된 자식계통끼리(표 2.1의 B 집단)도 교배를 하지 않기 때문에 모든 교배가 실험 대상이 되었던 이면교배의 블록화 방법을 두 군간 교배에 적용하기는 어렵다. 따라서 본 논문에서는 두 군간 교배에 대한 새로운 블록화 방법을 제안하고, 평균효율인자를 구하고자 한다.

2. 두 군간 교배 모형과 평균효율인자

자식계통의 수가 p인 두 군간 교배 실험에서 집단 A에 속하는 자식계통의 수를 p_1이라 하고, 집단 B에 속하는 자식계통의 수를 p_2라 하자. 예를 들어 $p = 7$, $p_1 = 4$, $p_2 = 3$, $n = p_1 \times p_2$인 두 군간 교배는 표 2.1과 같다.

표 2.1: $p_1 = 4$, $p_2 = 3$인 두 군간 교배

집단 B	집단 A						
	1	2	3	4	**5**	**6**	**7**
1					*	*	*
2					*	*	*
3					*	*	*
4					*	*	*
5							
6							
7							

표 2.1에서 집단 A에 속한 p_1개의 자식계통은 각각 p_2번씩 반복이 되고, 집단 B에 속한 p_2개의 자식계통은 각각 p_1번씩 반복이 일어난다.

두 군간 교배의 블록디자인은 다음과 같이 가정한다.

$$\mathbf{Y} = \mu\mathbf{1_n} + \triangle_1\mathbf{g} + \triangle_2\beta + \epsilon \ . \tag{2.1}$$

여기서, $\mathbf{Y}$는 크기 $n \times 1$인 관측치 벡터, μ는 전체 평균효과, 크기 $n \times 1$인 $\mathbf{1_n}$은 모든 원소가 1인 벡터를 나타내고, b는 블록 수를 나타낸다. $\mathbf{g}$와 β는 각각 크기 $p \times 1$과 $b \times 1$인 일반조합능력(general combining ability : gca)효과와 블록 효과를 나타내는 벡터이다. 크기 $n \times p$인 $\triangle_1$은 $\mathbf{g}$에 대응하는 빈도행렬이고, 크기 $n \times b$인 $\triangle_2$는 β에 대응하는 빈도행렬이다. $\triangle_1$의 (a, c)원소는 a번째 교배가 c번째 자식계통을 포함하면 1, 아니면 0이고, $\triangle_2$의 (a, b)원소는 a번째 교배가 b번째 블록에서 나타나면 1, 아니면 0이다. ϵ은 평균 0, 분산 σ^2인 정규분포를 따르는 오차항으로 이루어진 $n \times 1$ 벡터이다. 식(2.1)에서 일반조합능력효과 $\mathbf{g}$를 추정하기 위한 축소된 정규방정식(reduced normal equation)은 다음과 같다.

$$C\mathbf{g} = Q, \quad Q = T - k^{-1}\Gamma B \ .$$

이때 $T' = (T_1, T_2, \cdots, T_p)$이고, T_i는 i번째 자식계통이 포함된 교배 특성치의 합, $B' = (B_1, B_2, \cdots, B_b)$이고, B_j는 j번째 블록에 포함된 교배 특성치의 합을 나타내고, $\Gamma = (n_{il})$는 크기가 $p \times b$ 빈도행렬로 n_{il}은 i번째 자식계통이 l번째 블록에 나타나는 횟수, k는 블록 크기를 나타낸다. $\mathbf{g}$의 추정치 $\hat{\mathrm{g}}$를 구하기 위한 정보행렬 C는 다음과 같다(Mukerjee, 1997).

$$C = G - \frac{1}{k}\Gamma\Gamma' \ . \tag{2.2}$$

여기서 $G = (g_{ij})$는 반복행렬로, G의 비대각선 원소는 자식계통 i와 j가 만나는 횟수를 나타내고, 대각선 원소는 각 자식계통의 반복 수를 나타낸다. 이제 식(2.2)의 행렬 C의 정보를 이용하여 두 군간 교배의 블록디자인에서 평균효율인자를 정의해 보자. 평균효율인자는 추정된 일반조합능력효과 쌍의 차인 $\hat{\mathrm{g}}_\mathrm{i} - \hat{\mathrm{g}}_\mathrm{j}$의 분산의 평균을 이용하여 구할 수 있다.

이면교배의 블록디자인에서 가장 좋은 디자인은 완전이면교배의 블록디자인이므로, 완전이면교배의 블록디자인에 대한 두 군간 교배의 블록디자인의 평균효율인자를 E_b라 하면

$$E_b = \frac{\text{완전이면교배의 블록디자인에서 } \hat{\mathrm{g}}_\mathrm{i} - \hat{\mathrm{g}}_\mathrm{j}\text{에 대한 분산의 평균}}{\text{두 군간 교배의 블록디자인에서 } \hat{\mathrm{g}}_\mathrm{i} - \hat{\mathrm{g}}_\mathrm{j}\text{에 대한 분산의 평균}}$$

과 같이 정의한다. 이때 두 군간 교배의 블록디자인에서 $\hat{\mathrm{g}}_\mathrm{i} - \hat{\mathrm{g}}_\mathrm{j}$의 분산을 구하기 위해 정보행렬 C의 고유값을 $\theta_j (j = 1, 2, \cdots, p)$ 라 하고, 이에 대응하는 정규직교 고유벡터(orthonormal eigenvector)를 ξ_j라 하자. 그런데 두 군간 교배에서는 두 자식계통 집단 중에서 같은 집단에 속하는 자식계통끼리는 교배를 하지 않기 때문에 정보행렬 C는 $p_1 - 1$개의 서로 독립인 열 또는 행을 갖는 행렬과 $p_2 - 1$개의 서로 독립인 열 또는 행을 갖는 행렬로 구성된다. 즉, C의 계수(rank)는 $p - 2$이다. 이때 C의 0인 두 개의 고유값을 θ_1, θ_2라 하면, 두 고유값에 대응하는 정규직교 벡터는 $\xi_i = 1/\sqrt{p}\mathbf{1}_i (i = 1, 2)$이다. 여기서 $\mathbf{1}$은 모든 원소가 1인 벡터이다. 나머지 $p - 2$개의 0이 아닌 고유값 θ_j, $j = 3, 4, \cdots, p$에 대응하는 정규직교 고유벡터를 ξ_j라 하면, $\xi_j{'}\xi_k = 0 (j \neq k)$이므로 $\xi_j\mathbf{g}$는 $p - 2$개의 일반조합능력효과들간의 선형독립인 대비를

나타낸다. 따라서 Singh 과 Hinkelmann(1995)에 의하면 일반조합능력효과 쌍의 차이에 대한 분산을 $Var(\xi_j'\hat{\mathbf{g}})$라 하면

$$Var(\xi_j'\hat{\mathbf{g}}) = \xi_j C^- \xi_j \sigma^2 = \tfrac{1}{\theta_j}\sigma^2$$

이고, 분산의 평균을 $aveVar(\xi_j'\hat{\mathbf{g}})$이라 하면

$$aveVar(\xi_j'\hat{\mathbf{g}}) = \frac{1}{p-2}\sum_{j=3}^{p}\frac{1}{\theta_j}\sigma^2 \tag{2.3}$$

이다. 블록 수가 b인 완전이면교배의 블록디자인에서 일반조합능력효과 쌍의 차이에 대한 분산의 평균은 다음과 같다(Singh 과 Hinkelmann, 1995).

$$aveVar(\xi_j'\hat{\mathbf{g}}) = \frac{2\sigma^2}{b(p-2)} \quad . \tag{2.4}$$

따라서 식(2.3)과 식(2.4)에 의해 평균효율인자는 다음과 같다.

$$E_b = \frac{2}{b\sum_{j=3}^{p}\frac{1}{\theta_j}} \quad . \tag{2.5}$$

3. 두 군간 교배의 블록화 및 평균효율인자

본 절에서는 Kempthorne의 합동식을 이용하여 두 군간 교배의 블록디자인을 설계하는 방법을 설명하고, 이렇게 설계된 블록디자인의 평균효율인자를 구하고자 한다. 블록디자인의 평균효율인자를 구하기 위해서는 각 디자인의 정보행렬에 대한 고유값이 필요하다. 이 고유값을 구하기 위해서는 각 디자인에 대한 빈도행렬인 $\triangle_1$과 $\triangle_2$를 구성해야 하는 번거러움이 있다. 따라서 고유값을 구하지 않고, 두 집단에 포함된 자식계통의 수 p_1과 p_2만을 이용하여 평균효율인자를 계산하는 식을 유도하고자 한다.

Kempthorne의 합동식을 이용하기 위해 두 군간 교배의 블록디자인에서 집단 A를 수준이 p_1인 요인 A라 하고, 집단 B를 수준이 p_2인 요인 B라 하자. 이때 블록의 크기는 $k = p_1$, 블록 수는 $b = p_2$이다. 요인실험 설계에서 둘 이상의 블록으로 분할하는 경우, 완전한 랜덤화를 못하고 제한된 랜덤화를 하게 되므로 일부 정보의 손실은 피할 수가 없다. 따라서 별로 관심이 적은 고차의 교호작용을 블록과 교락시키는 방법을 주로 사용한다. 두 군간 교배의 블록디자인에서는 2차 교호작용을 블록과 교락시키는 방법을 사용한다. 교호작용 $A \times B$를 블록과 교락(confounding)되도록 하는 Kempthorne의 합동식은 다음과 같이 표현된다(Raghavaro, 1971).

$$L = x_1 + x_2 (mod\ p_2), \quad x_1 = 1, 2, \cdots, p_1, \ x_2 = p_1+1, p_1+2, \cdots, p_1+p_2 \ . \tag{3.1}$$

두 군간 교배의 블록디자인에서 자식계통끼리의 교호작용은 특정조합능력에 해당되고, 특정조합능력은 블록요인과 교락되었기 때문에 구할수 없다. 예를 들어 $p_1 = 4, \ p_2 = 3$인 경우, 가능한 교배는 $(1\times5), (1\times6), (1\times7), (2\times5), (2\times6), (2\times7), (3\times5), (3\times6), (3\times$

$7),(4\times 5),(4\times 6),(4\times 7)$이고, $L=0,1,2$와 같이 세 가지로 분류된다. 이때 $L=0\rightarrow$블록 1, $L=1\rightarrow$블록 2, $L=2\rightarrow$블록 3으로 대응시키면 표 3.1과 같이 3개의 블록을 갖는 블록 디자인을 설계할 수 있다.

표 3.1: 두 군간 교배의 블록디자인

$L=0$	$L=1$	$L=2$
1×5	1×6	1×7
2×7	2×5	2×6
3×6	3×7	3×5
4×5	4×6	4×7
블록 1	블록 2	블록 3

이렇게 설계된 두 군간 교배의 블록디자인에서 평균효율인자는 두 집단에 포함된 자식계통 수의 차이에 따라 계산하는 식이 다르게 표현된다. 따라서 p_1과 p_2의 관계식을 이용하여 (경우 1), (경우 2), (경우 3)과 같이 3가지로 나누고, 각 경우에 대해 다음의 정리 3.1과 정리 3.2를 이용하여 평균효율인자 계산식을 유도해 보자.

정리 3.1 $n\times n$인 행렬 X가 $k_1\times k_1$인 행렬 X_1과 $k_2\times k_2$인 행렬 X_2인 다음과 같은 형태로 나타날때 X에 대해서 두 가지 성질이 성립한다(Searle, 1971).

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} X_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_2 \end{pmatrix}.$$

(1) $|X|=|X_1||X_2|$.
(2) $|X_1|=\Pi_{i=1}^{k_1}\theta_i$, X_1이 대칭행렬이고 고유값이 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{k_1}$이다.

정리 3.2 $n\times n$인 행렬 X가 $(\mathrm{b}\mathbf{I}+\mathrm{a}\mathbf{J})$의 형태이면 행렬식은 다음과 같다(Searle, 1971).

$$|X|=(na+b)b^{n-1}\ .$$

여기서, a,b는 0이 아닌 정수이고, $\mathbf{I}$는 항등행렬, $\mathbf{J}$는 모든 원소가 1인 행렬이다.

(경우 1). $p_1=tp_2\pm 1$, t는 자연수, 인 경우

식(2.2)에 의한 두 군간 교배의 블록디자인에 대한 정보행렬은

$$\begin{aligned} C &= G-\frac{1}{k}\Gamma\Gamma' \\ &= \begin{pmatrix} p_2 I_{p_1\times p_1} & J_{p_1\times p_2} \\ J_{p_2\times p_1} & p_1 I_{p_2\times p_2} \end{pmatrix}-\frac{1}{p_1}\begin{pmatrix} p_2 J_{p_1\times p_1} & p_1 J_{p_1\times p_2} \\ p_1 J_{p_2\times p_1} & I_{p_2\times p_2}+((t+1)p_1-tp_2\pm(t-1))J_{p_2\times p_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 여기서, $B_1 = p_2 I_{p_1\times p_1} - \frac{p_2}{p_1} J_{p_1\times p_1}$, $B_2 = (p_1 - \frac{1}{p_1}) I_{p_2\times p_2} - \{\frac{(t+1)p_1 - tp_2 \pm (t-1)}{p_1}\} J_{p_2\times p_2}$ 이고, 정리 3.1과 정리 3.2에 의해 정보행렬 C의 행렬식은 다음과 같은 형식으로 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
|C| &= |B_1||B_2| \\
&= \left|p_2 I_{p_1\times p_1} - \frac{p_2}{p_1} J_{p_1\times p_1}\right| \cdot \left|(p_1 - \frac{1}{p_1}) I_{p_2\times p_2} - \frac{(t+1)p_1 - tp_2 \pm (t-1)}{p_1} J_{p_2\times p_2}\right| \\
&= \left\{-p_1 \frac{p_2}{p_1} + p_2\right\} p_2^{p_1-1} \cdot \left\{-p_2 \frac{(t+1)p_1 - tp_2 \pm (t-1)}{p_1} + (p_1 - \frac{1}{p_1})\right\} \left\{p_1 - \frac{1}{p_1}\right\}^{p_2-1} \\
&= 0 \cdot p_2^{p_1-1} \cdot 0 \cdot \left\{p_1 - \frac{1}{p_1}\right\}^{p_2-1} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

이때 C의 0이 아닌 고유값은 $\theta_1^* = \frac{p_1^2-1}{p_1}$과 $\theta_2^* = p_2$로, 각각 $n_1 = p_2 - 1$, $n_2 = p_1 - 1$개의 중근을 갖는다. 이 고유값을 식(2.3)에 대입하면 두 군간 교배의 블록디자인에서 일반조합능력효과 쌍의 차이에 대한 분산의 평균은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
aveVar(\xi_j'\hat{\mathbf{g}}) &= \frac{1}{p-2}\sum_{i=1}^{2} n_i \theta_i^{*-1}\sigma^2 \\
&= \frac{1}{p-2}\left\{\frac{p_2-1}{\frac{p_1^2-1}{p_1}} + \frac{p_1-1}{p_2}\right\}\sigma^2 \\
&= \frac{p_1p_2(p_2-1) + (p_1-1)(p_1^2-1)}{p_2(p_1^2-1)(p-2)}\sigma^2\,.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

또한 두 군간 교배의 블록디자인에서 $b = p_2$이므로, 완전이면교배의 블록디자인에서 일반조합능력효과 쌍의 차이에 대한 분산의 평균은 식(2.4)에 의해

$$
aveVar(\xi_j'\hat{\mathbf{g}}) = \frac{2\sigma^2}{p_2(p-2)} \tag{3.3}
$$

이다. 따라서 식(3.2)와 식(3.3)에 의해 완전이면교배의 블록디자인에 대한 두 군간 교배의 블록디자인의 평균효율인자는 다음과 같다.

$$
E_b = \frac{2(p_1^2-1)}{p_1p_2(p_2-1) + (p_1-1)(p_1^2-1)}\,. \tag{3.4}
$$

(경우 2). $p_1 = tp_2$, t는 자연수, 인 경우

식(2.2)에 의한 두 군간 교배의 블록디자인에 대한 정보행렬은

$$\begin{aligned} C &= G - \frac{1}{k}\Gamma\Gamma' \\ &= \begin{pmatrix} p_2 I_{p_1\times p_1} - \frac{p_2}{p_1}J_{p_1\times p_1} & \mathbf{0}_{p_1\times p_2} \\ \mathbf{0}_{p_2\times p_1} & p_1 I_{p_2\times p_2} - \frac{tp_1}{p_1}J_{p_2\times p_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이다. 여기서, $B_1 = p_2 I_{p_1\times p_1} - \frac{p_2}{p_1}J_{p_1\times p_1}$, $B_2 = p_1 I_{p_2\times p_2} - \frac{tp_1}{p_1}J_{p_2\times p_2}$ 이고, 정리 3.1과 정리 3.2에 의해 (경우 1)에서와 같은 방법으로 정리하면,

$$\begin{aligned} |C| &= \left|p_2 I_{p_1\times p_1} - \frac{p_2}{p_1}J_{p_1\times p_1}\right| \cdot \left|p_1 I_{p_2\times p_2} - \frac{tp_1}{p_1}J_{p_2\times p_2}\right| \\ &= 0\cdot p_1^{p_2-1}\cdot 0\cdot p_2^{p_1-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다. C의 0이 아닌 고유값은 $\theta_1^* = p_1$과 $\theta_2^* = p_2$이고, 각각은 $n_1 = p_2 - 1$, $n_2 = p_1 - 1$개의 중근을 갖는다. 따라서

$$\begin{aligned} aveVar(\xi_j'\hat{\mathbf{g}}) &= \frac{1}{p-2}\sum_{i=1}^{2} n_i\theta_i^{*-1}\sigma^2 \\ &= \frac{p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)}{p_1p_2(p-2)}\sigma^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

이고, 식(3.3)과 식(3.5)에 의해 평균효율인자는 다음과 같다.

$$E_b = \frac{2p_1}{p_1(p_1-1)+p_2(p_2-1)} \quad . \tag{3.6}$$

(경우 3). (경우 1) 과 (경우 2)를 제외한 경우

(경우 1) 과 (경우 2)를 제외한 경우, p_1과 p_2의 관계에서는 정보행렬 구성이 불규칙적이기 때문에 (경우 1)과 (경우 2)처럼 p_1과 p_2의 함수로 표현할 수 없다. 따라서 평균효율인자는 식(2.5)에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_b = \frac{2}{p_2\sum_{j=3}^{p}\frac{1}{\theta_j}} \quad .$$

표 3.2: 두 군간 교배의 블록디자인에 대한 평균효율인자 ($p \le 20$, $p_1 \ge p_2$)

p	$k=$ p_1	$b=$ p_2	ave $Var(\xi_j'\hat{\mathbf{g}})$	E_b		p	$k=$ p_1	$b=$ p_2	ave $Var(\xi_j'\hat{\mathbf{g}})$	E_b	
4	2	2	0.5000	1.0000	2	12	8	4	0.2125	0.1905	2
5	3	2	0.4583	0.7272	1	12	9	3	0.2888	0.1875	2
6	3	3	0.3333	0.5000	2	12	10	2	0.4600	0.1852	2
6	4	2	0.4375	0.4444	2	12	7	6	0.1572	0.1928	1
7	4	3	0.3066	0.4348	1	13	8	5	0.1738	0.2092	3
7	5	2	0.4416	0.4528	1	13	9	4	0.2125	0.2139	1
8	4	4	0.2500	0.3333	2	13	10	3	0.2910	0.2082	1
8	5	3	0.2916	0.3810	1	14	7	7	0.1428	0.1667	2
8	6	2	0.4444	0.3000	2	14	8	6	0.1506	0.1844	3
9	5	4	0.2312	0.3077	1	14	9	5	0.1708	0.1951	1
9	6	3	0.2857	0.2667	2	14	10	4	0.2128	0.1958	3
9	7	2	0.4494	0.3179	1	15	8	7	0.1355	0.1622	1
10	5	5	0.2000	0.2500	2	15	9	6	0.1462	0.1753	3
10	6	4	0.2212	0.2826	3	15	10	5	0.1692	0.1482	2
10	7	3	0.2864	0.2909	1	16	8	8	0.1250	0.1429	2
10	8	2	0.4531	0.2286	2	16	9	7	0.1302	0.1567	3
11	6	5	0.1873	0.2373	1	16	10	6	0.1434	0.1660	3
11	7	4	0.2152	0.2581	1	17	9	8	0.1191	0.1399	1
11	8	3	0.2874	0.2577	1	17	10	7	0.1265	0.1505	3
11	9	2	0.4569	0.2432	1	18	9	9	0.1111	0.1250	2
12	6	6	0.1666	0.2000	2	18	10	8	0.1148	0.1361	3
12	7	5	0.1789	0.2235	3	19	10	9	0.1063	0.1229	1
						20	10	10	0.1000	01111	2

표 3.2는 $p_1 \le 10, p_2 \le 10$인 경우의 평균효율인자를 계산한 것이다. 그런데 두 군간 교배의 블록디자인에서 블록 수가 블록 크기보다 크면, 블록에 나타나는 자식계통의 반복이 불규칙적이거나 어떤 자식계통은 임의의 블록에 한번도 나타나지 않은 경우도 있기 때문에 평균효율이 떨어진다. 따라서 본 논문에서는 $p_1 \ge p_2$인 경우만을 고려하였다. 표 3.2에서 자식계통의 수가 같을 때

1) (경우 1)에서는 블록 수가 크고, 두 집단의 자식계통 수의 차이가 가장 적은 경우에 평균효율이 가장 낮고, 나머지에서는 자식계통 수의 차이가 적을수록 평균효율이 높았다.

2) (경우 2)에서는 두 집단에 포함된 각 자식계통의 수가 같으면 평균효율이 가장 낮고, 자식계통의 차이가 적을수록 평균효율이 높다.

3) (경우 3)에서는 블록 수가 작을수록 평균효율이 높게 나타났다.

4. 예 제

웅성불임성을 지닌 단간종 종실용 수수계통을 종자친으로 하고, 줄기 내에 당함량이 높은 단수수 계통을 화분친으로 사용하여 1대 잡종계통을 육성하고, 그들의 조합능력을 검정함으로써 수수류 청예용 일대잡종 품종육성을 위한 자료이다(강정훈과 이호진, 1997). 수수는 4종류(p_1), 단수수는 3종류(p_2)의 자식계통을 사용하였다. 이때 수수끼리 또는 단수수끼리의 교배는 하지 않고 수수와 단수수만 교배를 한다. 수수의 자식계통을 1, 2, 3, 4 라 하고, 단수수의 자식계통을 5, 6, 7이라 하자. 강정훈과 이호진(1997)의 자료에서는 두 군간 교배에 대한 완전 확률화 디자인을 사용하였다. 따라서 본 논문에서 제시한 교락법에 의한 블록화 방법을 설명하기 위해 이 예제를 표 4.1과 같이 $k = p_1 = 4$, $b = p_2 = 3$인 두 군간 교배의 블록디자인 형태로 다시 설계하였다.

표 4.1: 소화 가능한 건초 수량

블록	교배 : 특성치			
1	$1 \times 5 : 169$	$2 \times 7 : 453$	$3 \times 6 : 694$	$4 \times 5 : 302$
2	$1 \times 6 : 509$	$2 \times 5 : 326$	$3 \times 7 : 664$	$4 \times 6 : 454$
3	$1 \times 7 : 507$	$2 \times 6 : 523$	$3 \times 5 : 474$	$4 \times 7 : 424$

이 블록디자인에 대한 반복행렬은

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

이고, $\Gamma\Gamma'$행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Gamma\Gamma'} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6. \end{pmatrix}.$$

따라서 정보행렬은

$$C = \begin{pmatrix} 2.250 & -.750 & -.750 & -.750 & 0 & 0 & 0 \\ -.750 & 2.250 & -.750 & -.750 & 0 & 0 & 0 \\ -.750 & -.750 & 2.250 & -.750 & 0 & 0 & 0 \\ -.750 & -.750 & -.750 & 2.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.500 & -1.25 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 2.500 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & -1.25 & 2.500 \end{pmatrix}$$

이고, 식(3.4)에 의해 평균효율인자 $E_b = 0.4348$이다.

5. 요약 및 논의

자식계통이 두 집단으로 분리된 경우에 대해 블록디자인을 설계하고, 이러한 두 군간 교배의 블록디자인의 정보행렬이 갖는 특성을 이용하여 평균효율인자를 구하는 방법에 대해서 기술하였다. 같은 집단에 포함된 자식계통끼리는 교배를 하지 않기 때문에 발생하는 정보행렬의 구조적 특성을 이용하여, (경우 1)과 (경우 2)에 대해 두 집단이 포함하는 자식계통의 수 p_1과 p_2의 함수관계식을 도출하고, 이 함수식을 사용하여 각 디자인에 대한 고유값을 구하지 않고 p_1과 p_2만을 이용해서 평균효율인자를 구하는 식을 유도하였다.

본 논문에서는 $p_1 \leq 10$, $p_2 \leq 10$인 경우에 대해서 p_1과 p_2의 관계를 세 가지 형태로 나누어 평균효율인자를 구하였는데 p를 20이상으로 늘려서 p_1과 p_2의 관계를 도출한다면 평균효율인자에 대해 더 일반화할 수 있을 것이다. 또한 (경우 1), (경우 2), (경우 3) 각각의 특성을 알아내어 실험 환경에 적절한 모형을 제안하는 것이 앞으로의 연구과제이다.

참고문헌

[1] 강정훈, 이호진. (1997). 수수별 청예용 일대잡종의 조합능력. *한국육종학회지*. Vol. 29. 190-199.

[2] Griffing, B. (1956). Concept of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences.* Vol. 9. 463-493.

[3] Mukerjee, R. (1997). Optimal partial diallel cross. *Biometrika.* Vol. 84. 939-948.

[4] Raghavarao, D. (1971). *Construction and combinatorial problems in design of experiments* (New York : Wiley).

[5] Searle. (1971). *Matrix Algebra useful for statistics.* Wiley.

[6] Singh, M. and Hinkelman, K. (1995). Partial diallel crosses in incomplete blocks. *Biometrics.* Vol. 51. 1302-1314.

[2000년 7월 접수, 2000년 11월 채택]

Blocked Designs and Efficiency Factor Evaluation of Crosses Between Two Classes for Investigation of New Inbred Lines

Gong Sun Kim[1) Jong Sung Bae[2) Jin Kim[3)

ABSTRACT

Diallel crosses experiments play an important role in evaluating the breeding potential of genetic material in plant and animal breeding. In the previous studies of diallel crosses, we suppose p lines are included in one set. But we used p inbred lines divided into two sets with p_1, p_2. Here p_1, p_2 denote the number of lines of each set($p = p_1 + p_2$). This experiments is mating design which evaluate genetic property of new inbred lines. In this paper we proposed a method of constructing block designs for crosses between two classes using defining contrast and provided average efficient factor.

Keywords: Partial diallel cross; Cross between two classes; Average efficiency factor.

1) Researcher, Information and Telecommunication Research Institute, Chonnam University. E-mail: gong@chonnam.chonnam.ac.kr
2) Professor, Dept. of Statistics, Chonnam University. E-mail: jsbae@chonnam.chonnam.ac.kr
3) Graduate Student, Dept. of Statistics, Chonnam University.