

섭동법을 이용한 만곡 리블릿에 관한 이론적 연구

김진호, 김호영[†], 강병하^{*}, 이재현^{**}

한국과학기술연구원 열·유동제어연구센터, ^{*}국민대학교 기계·자동차공학부, ^{**}한양대학교 공과대학 기계공학부

Perturbation Analysis of a Meandering Rivulet

Jin-Ho Kim, Ho-Young Kim[†], Byung Ha Kang^{*}, Jae-Heon Lee^{**}

Thermal/Flow Control Research Center, KIST, Seoul 136-791, Korea

^{*}School of Mechanical and Automotive Engineering, Kookmin University, Seoul 136-702, Korea

^{**}Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea

(Received September 6, 2001; revision received October 15, 2001)

ABSTRACT: The rivulet is a narrow stream of liquid flowing down a solid surface. When the rivulet's flow rate exceeds a certain limit, it tends to meander exhibiting the instability of its interface. This analysis performs a perturbation analysis of this meandering rivulet assuming an inviscid flow possessing contact angle hysteresis at the contact line. The analysis reveals that the contact angle hysteresis as well as the velocity difference across the interface, strongly induces the instability of the liquid interface. Moreover, when the rivulet velocity is low, it is predicted that the axisymmetric disturbance amplifies more rapidly than the anti-axisymmetric disturbance, which explains the emergence of the droplet flow at the low velocity regime.

Key words: Meandering rivulet(만곡 리블릿), Contact angle hysteresis(접촉각 히스테리시스), Perturbation method(섭동법), Kelvin-Helmholtz instability(Kelvin-Helmholtz 불안정성)

기 호 설 명

a : 리블릿 폭의 반 [m]

A : 상수

B : 상수

C_1 : 보정된 선형 비례상수

C_h : 접촉각 히스테리시스 ($\cos \theta_R - \cos \theta_A$)

Ca : Capillary number, $\mu v/T$

k : 진동수 [Hz]

l : 접촉선

L : 교란의 진폭 [m]

ΔP : 압력교란 [N/m^2]

R : 곡률 반경 [m]

t : 시간 [s]

T : 표면장력 [N/m]

u : 리블릿의 축방향 속도 [m/s]

v : 리블릿의 횡방향 속도 [m/s]

V : 축방향 평균속도 [m/s]

v_1 : 전진 접촉각에서의 접촉선 속도 [m/s]

x, y, z : 좌표축

[†] Corresponding author

Tel.: +82-2-958-5673; fax: +82-2-958-6709

E-mail address: hoyoung@kist.re.kr

그리스 문자

- ϕ : 위상차 [°]
- Φ : 속도 포텐셜 [m²/s]
- γ : 밀도비
- λ : 파장 [m]
- θ : 접촉각 [°]
- ρ : 밀도 [kg/m³]
- ω : 교란 주파수 [rad/s]

하첨자

- a* : 외기
- ax* : 축방향
- A* : 전진
- C* : 접촉각 히스테리시스
- CL* : 접촉선
- e* : 평형
- exp* : 실험적
- max* : 최대
- min* : 최소
- r* : 리블릿
- R* : 후퇴

1. 서 론

리블릿(rivulet)이란 고체 표면을 흘러내리는 액체의 가느다란 유동을 뜻하며, 이러한 리블릿은 자연계 및 공업현장에서 흔히 발견되는 현상이다. 특히, 창문에 부딪히는 빗물, 지하수의 침출, 원유채굴, 코팅 과정, 증발 열교환기, 냉각탑의

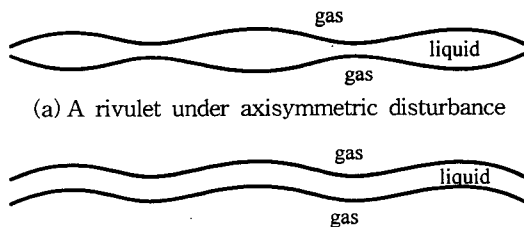


Fig. 1 Shapes of disturbed rivulets on a solid surface.

층전재 및 흡수기 등에서 쉽게 관찰될 수 있다.

액체가 고체 표면 위에서 운동할 경우, 표면의 젖음성(wettability)에 따라 그 형태가 결정된다. 친수성이 강한 표면 위에서는 필름유동이 관찰되는 반면에, 그 외의 표면 위에서는 리블릿이나 액적유동이 관찰된다. Kern^(1,2)은 소수성 표면을 이용한 실험을 통하여 리블릿을 유동의 형태에 따라 네 영역으로 구분하였으며, Schmuki and Laso⁽³⁾는 기울어진 표면에서 리블릿 유동을 실험적으로 연구하여, 리블릿의 형태를 동일한 기울기에서 유량의 증가에 따라, 액적유동(droplet flow), 선형 리블릿(linear rivulet), 만곡 리블릿(meandering rivulet) 및 왕복 리블릿(oscillating rivulet)의 4가지 영역으로 구분하였다.

리블릿에 관한 이론적인 연구는 각 리블릿 유동의 불안정성과 각 유동영역간 천이 메커니즘의 규명이 주를 이루어 왔다. 선형 리블릿에서 액적 유동으로의 천이과정은 액체 제트의 Rayleigh 불안정성⁽⁴⁾ 이론에 근거를 두고 있다. 이는 리블릿의 절단 과정이 기체에 둘러싸인 액체 제트의 Rayleigh 불안정성에 따른 절단과 유사하기 때문이다. 이에 따라 리블릿 유동의 안정성에 관한 많은 연구들⁽⁵⁻⁸⁾도 Rayleigh 불안정성에 기초를 두고 있다. 그러나 리블릿은 고체면과 접촉한 접촉선에서 고전적인 점착(no-slip) 경계조건에 의하면 전단응력과 에너지 소산의 특이점이 존재하기 때문에 해석상에 많은 어려움이 있다.⁽⁹⁾ 또한, 공기에 완전히 둘러싸인 액체 제트는 축 교란(axial disturbance)에 대하여 안정하기⁽¹⁰⁾ 때문에 고체면과 부분적으로 접촉하는 리블릿의 반축대칭(反軸對稱, anti-axisymmetric) 형태의 유동인 만곡(meandering)을 예측하기는 힘들다. 반면에, Schiaffino and Sonin⁽¹¹⁾은 리블릿의 유동을 준 1차원으로, 리블릿의 단면을 원으로 가정하여 리블릿의 불안정성을 연구하였으나, 이들의 해석 역시 리블릿의 축대칭 불안정성은 예측할 수 있으나 반축대칭 불안정성을 예측할 수는 없었다. 축대칭 리블릿과 반축대칭 리블릿의 개략도를 Fig. 1에 나타내었다.

축방향 교란에 대하여 불안정한 일례로서 액체 시트의 안정성에 관한 Kelvin-Helmholtz 불안정성⁽¹²⁻¹⁴⁾이 있다. York et al.⁽¹²⁾은 2차원 비점성 액체 시트의 불안정성을 지배하는 섭동방정식을 제안하여 해석하였다. 그들은 파장과 시트 폭, Weber

수, 성장률 및 밀도비가 경계면의 불안정성에 미치는 영향을 고찰하고, 이를 실험적으로 검증하였다. Hagerty and Shea,⁽¹³⁾ 그리고 Rangel and Sirignano⁽¹⁴⁾는 각각 선형 해석방법과 비선형 해석방법을 이용하여 액체 시트가 외기와 접촉면을 가지고 운동할 때, 경계면의 불안정성에 의하여 축대칭 또는 반축대칭의 두 가지 모드의 운동이 구현된다는 해석결과를 발표하였다. 그러므로, 액체 시트는 축방향 교란에 대하여 불안정한 영역이 존재하며, 이에 따라 축대칭 또는 반축대칭 액체 시트가 관찰된다.

한편, 접촉선 속도 v_{CL} 와 동적 접촉각 θ 사이에는 일반적으로 Fig. 2(a)와 같은 관계가 성립한다. 이를 해석상의 편의를 위하여 Fig. 2(b)와 같이 근사할 수 있다.^(6,6) 그림에서 θ_A 와 θ_R 는 접촉선 속도 v_{CL} 이 양수 및 음수인 영역에서의 접촉각으로 전진 접촉각 및 후퇴 접촉각이라 하며, v_1 은 접촉각이 최대 전진 접촉각 $\theta_{A,max}$ 이 될 때 접촉선이 가지는 속도이다. Davis⁽⁵⁾ 및 Weiland and Davis⁽⁶⁾의 모델링에 따라 전진시와 후진시의 접촉각과 접촉선 속도의 관계가 대칭임을 가정하여 접촉선 속도가 $-v_1$ 일 때의 값을 $\theta_{R,min}$ 으로 두었다. Fig. 2에서 볼 수 있듯이 일반적으로 전진 접촉각과 후퇴 접촉각의 크기가 다른데 이를 접촉각 히스테리시스라 한다. 접촉각 히스테리시스는 보통 전진 접촉각과 후퇴 접촉각의 차이로 표시하거나 후퇴 접촉각의 코사인값과 전진 접촉각의 코사인값의 차이로 나타내기도 한다. 이러한 접촉각 히스테리시스는 액체의 물성치와 고체 표면의 오염이나 조도 등의 영향을 받는다고 알려져 있다. Culkin⁽¹⁵⁾과 Kim et al.⁽¹⁶⁾은 실험과 간단한 스케일링 해석을 통해서 리블릿의 만곡 유동의 원인이 접촉각 히스테리시스에 있다고 하였다. 하

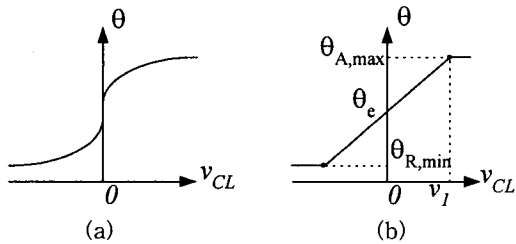


Fig. 2 Relationship between the dynamic contact angle and the contact line velocity.

지만, 접촉각 히스테리시스가 리블릿의 만곡 유동, 즉 반축대칭 유동에 어떻게 영향을 미치는가에 관한 연구는 찾아보기 힘들다.

이에 따라 본 연구에서는 리블릿 유동에서 흔히 관찰되는 만곡 유동은 축방향 교란에 불안정한 유동 형태라는 것과 만곡의 주요 원인이 접촉각 히스테리시스라는 것에 착안하여 리블릿의 만곡 유동을 해석하고자 하였다. 이러한 해석을 통하여 만곡 리블릿의 불안정성에 미치는 여러 가지 변수들의 영향을 고찰하였다.

2. 교란방정식

만곡 리블릿의 불안정성에 영향을 미치는 여러 가지 변수들의 영향을 고찰하기 위하여, 폭이 $2a$ 이고, 축방향 정상속도가 V_r 인 리블릿의 모델을 Fig. 3에 나타내었다. 그림에서 l , L 및 λ 는 각각 접촉선, 교란 진폭 및 파장이고, ω , k 및 ϕ 는 각각 교란 주파수(perturbation angular frequency), 진동수(wave number) 및 접촉선의 위상차이다. 또한 x , y 및 t 는 각각 축방향, 횡방향 좌표축 및 시간이다. 리블릿을 비점성 유동이라 가정하면 리블릿의 카다면에서와, 공기와 액체의 접촉면 중 접선이 z 방향에 수직한 곳에서의 z 방향 속도는 질량 보존법칙에 의해 각각 "0"이 됨을 알 수 있다. 이에 따라 Euler 방정식과 연속방정식에서 z 성분은 모두 무시할 수 있고, 리블릿을 비점성의 2차원 유동이라고 가정할 수 있다. Laplace 방정식을 만족하는 리블릿의 속도 포텐셜 Φ_r 은 기저해(base

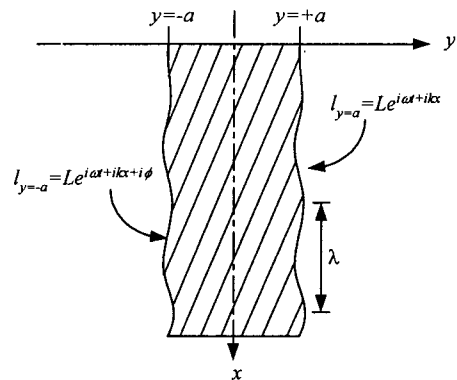


Fig. 3 Top view of a disturbance rivulet.

solution) V_r 과 교란 성분의 합으로 식(1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_r = (A_1 \cosh ky + A_2 \sinh ky) e^{i\omega t + ikx} + V_r x \quad (1)$$

$$-a \leq y \leq a$$

여기서, A_1 과 A_2 는 상수이다.

액체의 경계에서 만족되는 기구학적 경계조건 (kinematic boundary condition)을 식(2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial x} \quad ; \quad y = \pm a \quad (2)$$

여기서, 접촉선의 위치 l 은 식(3)과 식(4)로 정의된다.

$$l = L e^{i\omega t + ikx} \quad ; \quad y = a \quad (3)$$

$$l = L e^{i\omega t + ikx + i\phi} \quad ; \quad y = -a \quad (4)$$

리블릿 외기의 속도 포텐셜 Φ_a 를 식(1)과 같은 방식으로 식(5)와 식(6)에 나타내었다.

$$\Phi_a = B_1 e^{-ky + ikx + i\omega t} + V_a x \quad ; \quad y > a \quad (5)$$

$$\Phi_a = B_2 e^{ky + ikx + i\omega t} + V_a x \quad ; \quad y < -a \quad (6)$$

여기서, V_a 는 외기의 축방향 정상 속도이고, B_1 및 B_2 는 상수이다.

각 계수 A_1 , A_2 , B_1 및 B_2 는 경계조건 식(2)에 식(1), (3)~(6)을 대입하고 2차 교란항을 무시하면 구할 수 있다. 각 경계면에서 Bernoulli 방정식(7)이 성립되므로, 각 경계면에서의 압력교란을 구할 수 있다.

$$\frac{V^2}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\Delta P}{\rho} \quad (7)$$

여기서, u 와 v 는 각각 x 방향 속도 및 y 방향 속도이고, ΔP 와 ρ 는 각각 압력교란과 밀도이다.

경계면에서의 압력교란에 의하여 곡률 반경의

교란이 발생하므로, 식(8)이 성립한다.

$$\Delta P_r - \Delta P_a = -T(1/R_{ax} + 1/R_c) \quad ; \quad y = \pm a \quad (8)$$

여기서, T 는 표면장력이며, R_{ax} 및 R_c 는 각각 액체 시트의 축방향 곡률 반경 및 접촉각 히스테리시스와 관련된 곡률 반경이고, 이를 각각 식(9)와 식(10)으로 나타낼 수 있다. 식(8)에서 우변의 두번째 항을 제외하면, 식(8)은 압력과 표면장력의 평형관계를 설명하는 식이 된다. 그렇지만, 본 연구에서와 같이 액체 시트가 고체면에 접촉하여 있는 경우, 압력교란은 경계면에 영향을 주고, 이것이 접촉선 위치의 미소변화, 즉 접촉선 속도에 영향을 미친다. 따라서, 경계면에서의 압력교란은 경계면을 휘게 하는 효과와 접촉선 속도를 변화시키는 효과를 동시에 가지고 있다는 것이다. 접촉선 속도는 전진 접촉각, 즉 접촉각 히스테리시스와 직접적인 관계를 가지고 있으므로, 결국 경계면에서의 압력교란은 경계면의 축방향 곡률 반경과 접촉각 히스테리시스에 의한 곡률 반경의 식으로 표현되게 된다.

$$\frac{1}{R_{ax}} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{R_c} = \frac{C_1}{R_e} \frac{\partial l}{\partial t} \quad (10)$$

여기서, C_1 은 접촉각의 사인값을 접촉선 속도의 선형 함수로 나타낼 때의 보정된 선형 비례상수로 $C_1 = C_h/[4v_1 \sin^2(\theta_e/2)]$ (부록 참조)이고, R_e 는 평형 접촉각일 경우의 곡률 반경으로서, $a/\sin \theta_e$ 이며, C_h 는 접촉각 히스테리시스로서, $\cos \theta_R - \cos \theta_A$ 이다.

식(8)에 식(7)에서 구한 압력 교란과 식(9)와 식(10)을 대입하고 정리하면, 식(11) 및 식(12)와 같은 대수 연립방정식이 유도된다. 이때 공기는 정제되어 있다고 가정하여 $V_a = 0$ 으로 두었다.

$$(\omega + kV_r)^2 [(1 - e^{i\phi}) \coth ka + (1 + e^{i\phi}) \tanh ka] + 2\gamma\omega^2 = \frac{2k^3 T}{\rho_r} - \frac{2ikC_1 T}{\rho_r R_e} \omega \quad (11)$$

$$(\omega + kV_r)^2 [(1 - e^{i\phi}) \coth ka - (1 + e^{i\phi}) \tanh ka] - 2\gamma\omega^2 e^{i\phi} = -\frac{2k^3 T}{\rho_r} e^{i\phi} + \frac{2ikC_1 T}{\rho_r R_e} \omega e^{i\phi} \quad (12)$$

여기서, γ 는 밀도비로서 ρ_a/ρ_r 이다.

$e^{i\phi}$ 에 관하여 알아보기 쉽게 정리하기 위하여 식(11)과 식(12)의 합과 차를 구하여 정리하면 식(13)과 식(14)가 된다.

$$\left[(\omega + kV_r)^2 \coth ka + \gamma\omega^2 - \frac{k^3 T}{\rho_r} + \frac{ikC_1 T}{\rho_r R_e} \omega \right] (1 - e^{i\phi}) = 0 \quad (13)$$

$$\left[(\omega + kV_r)^2 \tanh ka + \gamma\omega^2 - \frac{k^3 T}{\rho_r} + \frac{ikC_1 T}{\rho_r R_e} \omega \right] (1 + e^{i\phi}) = 0 \quad (14)$$

두 식(13)과 식(14)는 동시에 만족되어야 하므로, 접촉선의 위상차 ϕ 가 0 또는 π 의 값을 가져야 한다. 즉, 리블릿 유동은 만곡 유동의 형태를 갖는 반축대칭 리블릿 유동($\phi=0$)이거나, 액적이 연속적으로 연결되어 있는 형태를 갖는 축대칭 유동($\phi=\pi$)이어야 한다. 그러므로 반축대칭 리블릿 유동인 경우 식(15)가 성립하는 반면에, 축대칭 리블릿인 경우에는 식(16)이 성립한다.

$$(\gamma + \tanh ka)\omega^2 - \frac{k^3 T}{\rho_r} + k^2 V_r^2 \tanh ka + \left(2kV_r \tanh ka + \frac{ikC_1 T}{\rho_r R_e} \right) \omega = 0 \quad (15)$$

$$(\gamma + \coth ka)\omega^2 - \frac{k^3 T}{\rho_r} + k^2 V_r^2 \coth ka + \left(2kV_r \coth ka + \frac{ikC_1 T}{\rho_r R_e} \right) \omega = 0 \quad (16)$$

Table 1 Values of selected parameters and their reference values

Parameters	Range	Reference values
θ_e [°]	0~180	90
a [mm]	-	2.5
CAH	0.001~1	0.3
V_r [m/s]	0.2~0.5	0.3

식(15)와 식(16)에서 허수부 $(kC_1 T \omega)/(\rho_r R_e)$ 가 "0"이면, 식(15)와 식(16)은 액체 시트를 모델링한 Hagerty와 Shea의 식⁽¹³⁾과 동일한 형태가 된다. 허수부가 "0"이 되기 위해서는 C_1 이 "0"이 되어야 하고, 이는 본 연구가 근본적으로 Hagerty와 Shea의 결과⁽¹³⁾에 접촉각 히스테리시스의 영향을 추가한 것과 같은 의미를 지니는 것을 알려준다. 식(15) 및 식(16)의 해는 변수의 여러 가지 조건에 의하여 그 형태가 결정된다. 즉, 해가 실근일 경우 접촉면의 교란은 감소되어 리블릿은 안정된다. 그러나 해가 허근일 경우 리블릿은 불안정해진다. 이때 해의 허수부를 성장률(growth rate)이라 하며 β 로 표현한다. 성장률 β 의 최대값이 존재하는 조건에서 리블릿은 불안정해지며, 성장률이 최대인 진동수 k_{max} 에 해당하는 파동이 리블릿 유동에서 구현된다.

3. 결과 및 토의

만곡 리블릿의 불안정성에 미치는 여러 가지 변수들의 영향을 알아보기 위하여, 접촉각 히스테리시스의 영향이 추가된 리블릿의 2차원 모델을 제안하고 그 지배방정식을 해석하였다. 해석에 사용된 여러 가지 변수의 범위와 기준조건을 Table 1에 나타내었다. 이때, 외기는 공기로서, 리블릿은 물로 가정하여 물성치를 결정하고, 이후 계산에서 사용될 각 변수의 기준조건은 이전의 연구결과^(15,16)를 참고하여 결정하였다. 본 연구의 타당성을 검증하기 위하여, 본 해석으로 예측한 축방향 파장 λ_{max} 와 실험값 λ_{exp} 를 Table 2에 나타내었다. 이때, λ_{exp} 는 이전 연구⁽¹⁶⁾에서 제시한 만곡 리블릿의 사진에서 계산한 값이다. 리블릿은 성장률이 최대인 위치의 진동수에서 구현되므로, 이때의 파장은 식(17)과 같이 정의된다.

$$\lambda_{max} = \frac{2\pi}{k_{max}} \quad (17)$$

이전의 연구결과⁽¹⁶⁾에 의한 실험적 파장과 본 연구에서 구한 해석적 파장의 비교에서 본 연구에서 구한 해석적 파장이 실험치를 잘 예측한다고 할 수 있다.

본 연구에서는 만곡 리블릿의 해석에 중점을

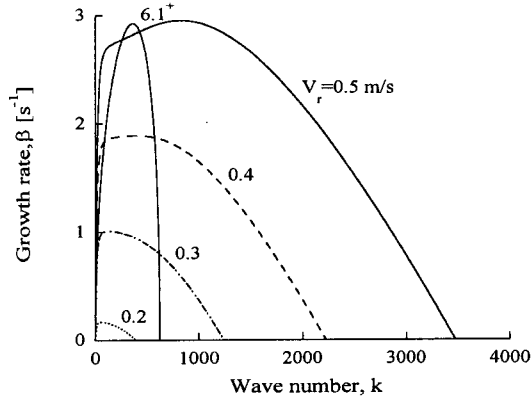


Fig. 4 Growth rate vs. wave number for various axial velocities, + : Hagerty and Shea.⁽¹³⁾

두었으므로 반축대칭 리블릿의 지배방정식(15)의 해를 가지고 논의를 전개한다. Table 1에서 나타난 기준조건하에서 리블릿의 여러 가지 축방향 속도에 대하여 진동수에 따른 성장률의 변화를 Fig. 4에 보였다. 그림에서 상첨자 “+”는 Hagerty and Shea⁽¹³⁾의 결과 중 축방향 속도가 6.1 m/s인 경우의 성장률의 변화를 진동수에 따라 표시한 것이다. 이때 성장률의 절대값이 본 연구결과에 비하여 너무 크기 때문에 비교의 편의를 위해서 성장률에 0.05를 곱한 값을 표시하였다. 그림의 모든 성장률 곡선은 최대값이 존재하는데, 이렇게 성장률이 최대가 되는 진동수에서 만곡 리블릿 파동이 구현된다. 그림에서 Hagerty와 Shea의 연구결과⁽¹³⁾와 동일한 진동수를 갖는 본 연구결과와 축방향 속도가 0.4 m/s 정도이라는 것을 볼 수 있다. 이것은 접촉각 히스테리시스의 영향으로 교란이 증가되어 동일한 진동수를 갖는 리블릿의 축방향 속도를 감소시켰기 때문이다. 또한, 축방향 속도가 증가하면 최대 성장률이 위치하는 진동수가 증가하고 최대 성장률의 값도 증가한다.

Table 2 The wave lengths predicted by the present analysis and those measured by Kim et. al.⁽¹⁶⁾

Surfaces	λ_{exp} [mm]	λ_{max} [mm]
Poly-Carbonate	40~74	42.83
Poly-Propylene	30~42	30.02
Para-film	24~38	24.49

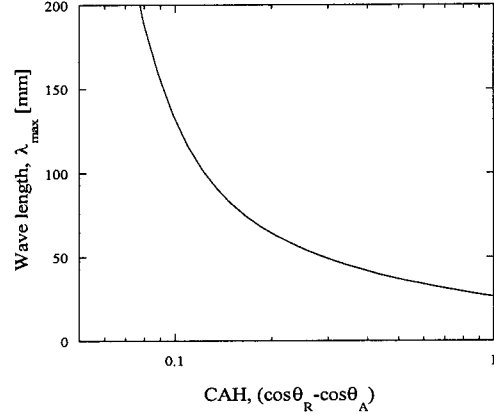


Fig. 5 The wave length at maximum growth rate vs. contact angle hysteresis.

최대 성장률이 위치하는 진동수가 증가한다는 것은 리블릿의 파장이 짧아짐을 의미하며, 최대 성장률의 값이 증가한다는 것은 리블릿의 축방향 속도가 증가할수록 만곡 리블릿의 상태로 좀더 빠르게 접근한다는 것을 의미한다. 축방향 속도가 증가하면 경계면에서의 압력교란이 증가하여 리블릿의 불안정성이 증가하며 이에 따라 파장이 짧아지는 것이라고 사료된다.

기준조건하에서 최대 성장률에서의 파장의 변화를 접촉각 히스테리시스에 따라 Fig. 5에 나타내었다. 그림에서 접촉각 히스테리시스가 “0”에 가까워지면 파장이 무한히 커진다는 것을 알 수 있다. 이는 축방향 속도가 기준속도인 0.3 m/s에서 최대 성장률에서의 리블릿의 파장이 길어져서 리블릿은 거의 선형에 가깝게 된다는 것을 의미한다. Fig. 4에서 언급한 접촉각 히스테리시스가 없는 Hagerty와 Shea의 결과⁽¹³⁾와 비교하면, 작은 축방향 속도에서는 리블릿 접촉면의 불안정성에 축방향 속도보다는 접촉각 히스테리시스의 존재가 더욱 큰 영향을 미친다는 것이다. 접촉각 히스테리시스가 커지면 파장은 점차 짧아진다. 접촉각 히스테리시스가 커지면 리블릿의 파장은 짧아지는데 이는 접촉각 히스테리시스가 커질수록 리블릿의 경계면에서의 교란이 증가하여 파장을 짧게 하기 때문이다.

기준조건하에서 여러 가지 평형 접촉각의 변화에 따른 최대 성장률에서의 파장의 변화를 Fig. 6에 보였다. 그림에서 평형 접촉각이 감소하면 파장은 짧아지며 평형 접촉각이 증가하면 파장은

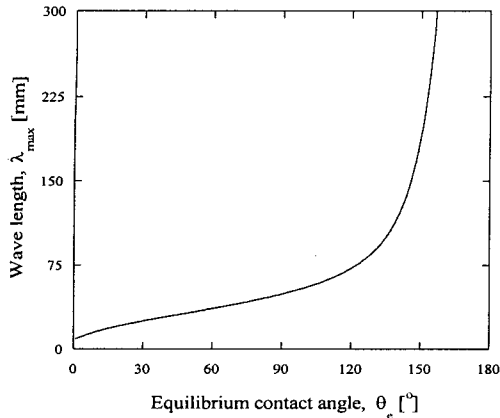


Fig. 6 The wave number at maximum growth rate vs. equilibrium contact angle.

길어진다. 평형 접촉각이 180° 에 가까워진다는 것은 액체가 고체면과 접하지 않는 경우, 즉 공기 중의 액체 제트 현상이라 생각할 수 있다. 액체 제트는 축방향 교란에 대하여 안정하므로,⁽¹⁰⁾ 리블릿의 경계면은 안정하며 이는 파장이 무한히 큰 값을 가진다는 것을 의미한다.

기준조건하에서 여러 가지 축방향 속도에 대하여 축대칭 리블릿과 반축대칭 리블릿의 진동수에 따른 성장률의 변화를 Fig. 7에 보였다. 축방향 속도가 0.3 m/s 이상인 경우 최대 성장률의 값은 두 경우 모두 비슷한 값을 보이고 있으나, 0.2 m/s 인 경우에는 축대칭 리블릿의 경우의 최대 성장률의 값이 반축대칭 리블릿의 경우보다 큰 것을 볼 수 있다. 이것은 리블릿의 축방향 속도가 작으면, 반축대칭 리블릿보다는 축대칭 리블릿이 되기 쉬우며, 이러한 경향은 저속에서 리블릿이 만곡 리블릿보다 액적이 연속적으로 연결되어 있는 유동의 형태가 될 것을 예측하게 한다.

4. 결 론

만곡 리블릿의 불안정성에 미치는 여러 가지 변수들의 영향을 알아보기 위하여, 만곡 리블릿을 접촉각 히스테리시스를 갖는 2차원 비점성 유동으로 모델링하고, 접촉선 속도의 함수로 치환된 접촉각 히스테리시스에 의한 곡률 반경과 접촉선의 축방향 곡률 반경을 함께 고려한 교란방정식을 제안하고 해석하였다. 본 연구에서 해석적으로 구한 파장과 이전의 연구결과를 비교함으

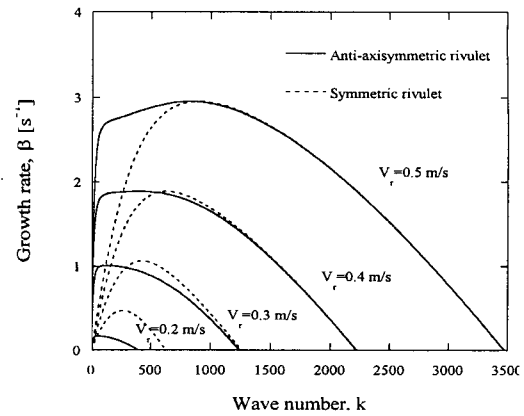


Fig. 7 Comparison of the growth rates for anti-axisymmetric and axisymmetric rivulets.

로써 본 연구에서 제안한 모델의 타당성을 검증하였다.

축방향 속도가 증가하면 최대 성장률이 존재하는 진동수가 길어지고 파장이 짧아지는데 이는 경계면에서의 압력교란이 증가하여 리블릿의 불안정성이 증가하기 때문이라고 사료된다. 접촉각 히스테리시스의 존재는 리블릿 접촉면의 불안정화에 영향을 크게 미치고, 접촉각 히스테리시스를 고려하지 않는 경우와 동일한 파장을 갖는 축방향 속도를 크게 감소시킨다. 접촉각 히스테리시스가 증가하면 파장은 감소하고 접촉각 히스테리시스가 감소하면 파장은 증가하는 경향을 보인다. 접촉각은 접촉각 히스테리시스와 반대의 경향을 보이며, 접촉각이 180° 에 가까워지면 파장은 무한히 증가하고 이는 액체 제트가 축방향 교란에 안정한 경우를 나타내는 것이다. 또한 리블릿의 축방향 속도가 작은 경우, 반축대칭 리블릿보다는 축대칭 리블릿이 되기 쉬우며, 이러한 경향으로부터 저속에서는 리블릿이 만곡 리블릿보다 액적이 연결되어 있는 형태의 유동이 될 것을 예측할 수 있다.

참고문헌

1. Kern, J., 1969, Zur Hydrodynamik der Rinn-sale (in German), Verfahrenstechnik, Vol. 3, No. 10, pp. 425-430.
2. Kern, J., 1971, Stabilitätsprobleme der Rinn-salströmung (in German), Verfahrenstechnik,

Vol. 5, No. 7, pp. 289-294.

3. Schmuki, P. and Laso, M., 1990, On the Stability of Rivulet Flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 215, pp. 125-143.
4. Rayleigh, Lord, 1878, On the Stability of Jets, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 10, pp. 4-13.
5. Davis, S. H., 1980, Moving Contact Lines and Rivulet Instabilities, Part 1. The Static Rivulet, *J. Fluid Mech.*, Vol. 98, pp. 225-242.
6. Weiland, R. H. and Davis, S. H., 1981, Moving Contact Lines and Rivulet Instabilities, Part 2. Long Waves on Flat Rivulets, *J. Fluid Mech.*, Vol. 107, pp. 261-280.
7. Dussan V., E. B., 1985, On the Ability of Drops or Bubbles to Stick to Non-Horizontal Surfaces of Solids, Part 2. Small Drops or Bubbles Having Contact Angles of Arbitrary Size, *J. Fluid Mech.*, Vol. 151, pp. 1-20.
8. Young, G. W. and Davis, S. H., 1987, Rivulet Instabilities, *J. Fluid Mech.*, Vol. 176, pp. 1-31.
9. Dussan V., E. B. and Davis, S. H., 1974, On the Motion of a Fluid-Fluid Interface along a Solid Surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 65, Part 1, pp. 71-95.
10. Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, Oxford, England, pp. 428-457.
11. Schiaffino, S. and Sonin, A. A., Formation and Stability of Liquid and Molten Beads on a Solid Surface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 343, pp. 95-110.
12. York, J. L., Stubbs, H. E. and Tek, M. R., 1953, The Mechanism of Disintegration of Liquid Sheets, *Trans. ASME*, Vol. 75, pp. 1279-1286.
13. Hagerty, W. W. and Shea, J. F., 1955, A Study of the Stability of Plane Fluid Sheets, *J. Applied Mech.*, Vol. 22, pp. 509-515.
14. Rangel, R. H. and Sirignano, W. A., 1991, The Linear and Nonlinear Shear Instability of a Fluid Sheet, *Phys. Fluids*, Vol. 3, No. 10, pp. 2392-2400.

15. Culkin, J. B., 1982, Rivulet Meandering, Ph. D. Thesis, Northwestern University, Evanston, IL, USA.
16. Kim, J.-H., Kim, H.-Y. and Lee, J.-H., 2001, Instability of Rivulet Flow on Inclined Solid Surface, *Proceedings of ICMF 2001*, Paper No. 822.
17. Kim, H.-Y., Lee, H. J. and Kang, B. H., 2001, Sliding Liquid Drops down an Inclined Solid Surface, submitted to *J. Colloid Interface Sci.*
18. Fermigier, M. and Jenffer, P., 1991, An Experimental Investigation of the Dynamic Contact Angle Liquid-Liquid Systems, *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 146, No. 1, pp. 226-241.

부 록

접촉선 속도가 v_{CL} 이고 리블릿의 폭이 $2a$ 인 리블릿 단면의 개략도를 Fig. A1에 나타내었다. 그림에서, R_A 와 R_R 은 각각 전진 접촉선 및 후퇴 접촉선에서 지면과 동일한 평면에서의 곡률 반경이다. 접촉각 히스테리시스에 의한 곡률 반경을 해석적으로 구하기 위하여, 다음과 같은 가정을 사용하였다.

- (1) 리블릿 단면의 최대 높이의 y 위치는 접촉각의 비와 같다.
 - (2) 곡률 반경은 기체와 액체가 접하는 자유 표면의 둘레에 비하여 크다.
 - (3) 리블릿의 폭과 높이의 비는 일정하다.
- 위의 가정을 사용하면, 식(A1)과 같은 관계를 유도할 수 있다.

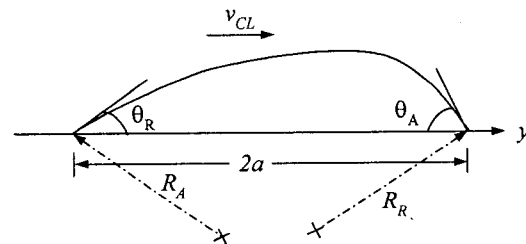


Fig. A1 Cross section of a rivulet.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_e} + \frac{C_1}{R_e} v_{CL} \quad (A1)$$

여기서, C_1 은 식(A2)와 같다.

$$C_1 = \frac{\sin\{(\theta_A - \theta_R)/2\}}{v_1 \tan(\theta_e/2)} \quad (A2)$$

일반적으로 전진 접촉각과 Capillary 수 Ca 는 실험적으로 식(A3)과 같은 Hoffman⁽¹⁸⁾ 법칙이 성립한다.

$$Ca = 0.013(\theta_A^3 - \theta_e^3) \quad (A3)$$

여기서, Ca 는 $\mu v_{CL}/T$ 로 정의되고, μ 는 점성계수이다.

Hoffman 법칙은 일반적으로 Capillary 수가 0.2 이하인 경우 선형에 가까우므로, 선형상관식(A4)가 사용된다.^(5,6) 그렇지만, 본 연구에서는 논의의 편의를 위하여 식(A5)의 관계식을 사용하였다.

$$\theta_A = \frac{\theta_{A,max} - \theta_e}{v_1} v_{CL} + \theta_e \quad (A4)$$

$$\frac{\sin(\theta_A - \theta_e/2)}{\sin(\theta_e/2)} = C_1 v_{CL} + 1 \quad (A5)$$

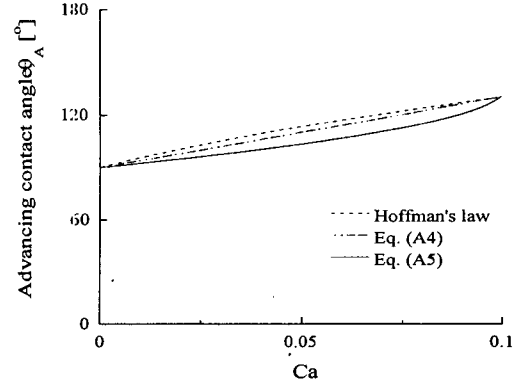


Fig. A2 Relationship between Capillary number and the advancing contact angle.

본 연구에서 선정된 최대 측방향 속도를 기준으로 한 Capillary 수가 0.006이고, 최대 접촉각 히스테리시스를 기준으로 최대 전진 접촉각과 평형 접촉각의 차이가 30°이므로 이를 Hoffman 법칙에 대입하여 구한 Capillary 수가 0.07이므로, 0.1 이하의 Capillary 수 범위에서 식(A3), (A4) 및 (A5)의 오차를 비교한다. Capillary 수가 0.1 이하인 범위에서 식(A3), (A4) 및 (A5)를 Fig. A2에 나타내었다. 본 연구범위 내에서 세 식은 최대 8.7%의 오차를 가지고 있으므로, Hoffman 법칙 대신 식(A5)의 관계식을 사용하여도 무리가 없다.