The Korean Communications
in Statistics Vol. 8, No. 3, 2001
pp. 697-709

# On Statistical Estimation of Multivariate(Vector-valued) Process Capability Indices with Bootstrap[1)]

Joong-Jae Cho[2)], Byoung-Sun Park[3)] and Soo-Duck Lim[4)]

## Abstract

In this paper we study two vector-valued process capability indices $\boldsymbol{C_p} = (C_{px}, C_{py})$ and $\boldsymbol{C_{pm}} = (C_{pmx}, C_{pmy})$ considering process capability indices $C_p$ and $C_{pm}$.

First, two asymptotic distributions of plug-in estimators $\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{p}} = (\hat{C}_{px}, \hat{C}_{py})$ and $\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{pm}} = (\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pmy})$ are derived. With the asymptotic distributions, we propose asymptotic confidence regions for our indices. Next, obtaining the asymptotic distributions of two bootstrap estimators $\hat{\boldsymbol{C}}^*_p = (\hat{C}^*_{px}, \hat{C}^*_{py})$ and $\hat{\boldsymbol{C}}^*_{\boldsymbol{pm}} = (\hat{C}^*_{pmx}, \hat{C}^*_{pmy})$ with our bootstrap algorithm, we will provide the consistency of our bootstrap for statistical inference. Also, with the consistency of our bootstrap, we propose bootstrap asymptotic confidence regions for our indices.

*Keywords* : Process capability index, Asymptotic distribution, Consistency of bootstrap

## 1. 서 론

공정능력지수는 제조공정이 제품을 제대로 생산하고 있는지를 평가하기 위하여 널리 사용되고 있는 측도이다. 일반적으로, 어떤 제품의 품질은 여러 특성들을 기초로 판단하게 되는 바, 그 특성 각각은 어떤 적당한 규격을 만족시켜야 한다. 그러한 제품의 품질은 그 들 특성 각각의 성능보다는 오히려 결합된 성능에 영향을 받는다. 이들 특성을 하나 하나 측정하지만, 특성치들간에 독립적이라기 보다 오히려 관련이 있어서 결합적으로 분포되어 있다고 가정하는 것이 현실적이다. 이럴 경우에 일변량인 경우의 변동조차 하나의 지수로 표현하는 것은 위험한 일이다. 이때 벡터 공

1) This research was supported by the Chungbuk National University Basic Science Research fund (CBNU-BSRI-00-S04).
2) Professor, Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763, Korea.
E-mail : jjcho@cbucc.chungbuk.ac.kr
3) Department of Computer Science, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763, Korea.
E-mail : bspark@statpia.chungbuk.ac.kr
4) Department of Computer Science, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763, Korea.
E-mail : sdlim@trut.chungbuk.ac.kr

정능력지수를 사용하는 것이 매우 자연스럽고 바람직할 것이다. 또한 자동 검사 시스템에 의해 여러 특성들을 하나 하나 쉽게 측정할 수 있는 오늘 날에는 다변량 품질 관리는 특히 중요하다. Alt 와 Smith(1988)는 현재 이용가능한 다변량 공정관리 기법들을 훌륭하게 정리·연구하였다. 최근에는 여러 특성들을 기초로 하여 공정능력을 올바로 평가하는 문제가 중요한 이슈가 되었다. Kocherlakota,S 와 Kocherlakota,K(1991)는 이변량 정규분포 $BN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 하에서 가장 간단한 공정능력지수의 추정량들인 $\hat{C}_{px}$ 와 $\hat{C}_{py}$의 결합 확률분포함수를 계산하였다. Hubele et al.(1991)는 또 다른 형태의 벡터 공정능력지수를 정의하였는 바, 3가지 성분을 가지고 정의된 뜻있는 유용한 생각이다. 그러나 벡터 공정능력지수들에 관한 로버스트한 추정 문제에 대한 연구 결과가 거의 없는 실정이다. 따라서 이론적으로나 응용적 측면에서의 중요성을 고려할 때, 다음과 같은 벡터 공정능력지수에 대한 연구는 현실적으로 절실한 과제라고 할 수 있다.

본 논문에서는 두가지 벡터 공정능력지수들에 대한 통계적 추론을 위한 붓스트랩 방법의 일치성과 신뢰영역 설정문제에 대하여 연구하였다. 먼저 제2절에서는 현장에서 많이 이용되는 일차원 공정능력지수들인 $C_p$와 $C_{pm}$ 의 개념을 2차원 공정능력지수들 $\boldsymbol{C_p} = (C_{px}, C_{py})$와 $\boldsymbol{C_{pm}} = (C_{pmx}, C_{pmy})$로 확장하여 이 지수의 플러그-인 추정량들과 관련된 극한 확률분포를 유도하고 근사 신뢰영역을 제시하였다. 그리고 제3절에서는 붓스트랩 알고리즘에 의한 붓스트랩 추정량들에 관련된 극한 확률분포을 유도하여 붓스트랩 방법의 일치성을 확립하고 전형적인 붓스트랩 신뢰영역을 제안하였다. 이러한 연구는 공정 분포가정이 없는 많은 경우에 보다 로버스트한 통계적 추정을 위한 기본적인 중요한 내용들이라 할 수 있다.

## 2. 벡터 공정능력지수와 근사 신뢰영역

공정능력분석(Process Capability Analysis)은 통계적 품질관리(Statistical Quality Control) 분야, 나아가 품질 경영(Total Quality Management) 그리고 6시그마(Six Sigma)에서도 매우 중요한 영역이라고 할 수 있다.

물론, 공정능력분석에 관한 연구는 공정능력지수(Process Capability Index), 비공정능력지수(Process Incapability Index) 그리고 다변량 공정능력지수(Multivariate Process Capability Index) 분야로 나눌 수 있는데, 공교롭게도 가장 단순한 일변량 공정능력지수(Process Capability Index)들과 관련된 연구에 집중되어 있다. 공정능력지수들과 관련된 연구결과로는 수없이 많이 있다. 특히, Pearn, Kotz와 Johnson(1992)는 공정능력지수들의 추정량들에 대해 분포적인 문제들을 연구하였다. 또한 Kotz와 Johnson(1993)은 기존 연구결과들을 로버스트 문제, 다변량 공정능력지수들까지 체계적으로 정리하였다. Chan, Xiong와 Zhang(1990)는 몇 가지 추정된 공정능력지수들과 관련된 극한분포 결과를 유도하였다. 최근에 Kim,D.K.(1999)은 반분산을 사용하여 공정능력지수들을 연구한 바 있다. 생산 현장에서 적용할 때의 특수성을 고려하더라도 다변량 공정능력지수 특히 벡터 공정능력지수 분야에 대한 연구는 활발하지 못한 상황이다. 특히 Kocherlakota,S.와 Kocherlakota,K.(1991) 등의 벡터 공정능력지수 분야에 관한 연구가 있지만 아직 미흡한 실정이다. 즉 그들은 정규 이변량 자료들을 바탕으로 한 기본적인 이차원 벡터공정능력지수 $\boldsymbol{C_p} = (C_{px}, C_{py})$와 $\boldsymbol{C_{pu}} = (C_{pux}, C_{puy})$의 추정량들의 확률분포함수와 간단한 통계적 추론문제에 대하여 연구하였지만, 너무 복잡하고 제한된 결과로 현장에서 적용하기엔 한계가 있다고 생각

된다. 그리고 Wierda,S.(1992) 등의 여러 학자들이 다변량 공정능력지수들에 대하여 연구하였다.

## 2.1 벡터 공정능력지수의 추정

이론적으로나 생산 현장에서의 응용을 고려할 때, 가장 기본적이고 많이 사용되고 있는 공정능력지수인 $C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$ 와 $C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$ 들을 확장한 2차원 벡터공정능력지수 $\boldsymbol{C}_p = (C_{px}, C_{py})$와 $\boldsymbol{C}_{pm} = (C_{pmx}, C_{pmy})$ 에 대하여 점추정량과 관련된 극한 분포이론 등을 연구하여, 이를 기초로 보다 간편하고 훨씬 유용한 근사 신뢰영역에 대하여 논의하게 될것이다.

우선, 공정평균 $\mu_x$, $\mu_y$ 와 분산 $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$ 을 갖고 4차 중심적률 $\mu_{4x} = E(X - \mu_x)^4$과 $\mu_{4y} = E(Y - \mu_y)^4$이 유한인 이변량 모집단으로부터의 공정특성 확률표본 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$에 대하여, 대표적인 이변량 벡터 공정능력지수 $\boldsymbol{C}_p$, $\boldsymbol{C}_{pm}$의 추정량 $\widehat{\boldsymbol{C}}_p$, $\widehat{\boldsymbol{C}}_{pm}$은 플러그-인 방법(Plug-in method)에 의해 다음과 같이 정의할 수 있을 것이다.

$$\widehat{\boldsymbol{C}}_p = (\widehat{C}_{px}, \widehat{C}_{py}) = \left( \frac{d_x}{3S_x}, \frac{d_y}{3S_y} \right)$$

$$\widehat{\boldsymbol{C}}_{pm} = (\widehat{C}_{pmx}, \widehat{C}_{pmy}) = \left( \frac{d_x}{3\sqrt{S_x^2 + (\overline{X} - T_x)^2}}, \frac{d_y}{3\sqrt{S_y^2 + (\overline{Y} - T_y)^2}} \right)$$

단, $USL_x$, $LSL_x$와 $USL_y$, $LSL_y$는 각각 공정변수 X와 Y의 규격상한과 규격하한을 나타내며, $d_x$ 와 $d_y$ 는 각각 $\frac{USL_x - LSL_x}{2}$ 와 $\frac{USL_y - LSL_y}{2}$ 을 뜻한다. 또한, 표본평균 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$ 는 , $\hat{\mu}_x = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\hat{\mu}_y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ 로 정의하고, 표본분산 $S_x^2$와 $S_y^2$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{\sigma}_x^2 = S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad \hat{\sigma}_y^2 = S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$$

그리고 상수 $M_x$ 와 $M_y$ 는 각각 $\frac{USL_x + LSL_x}{2}$ 와 $\frac{USL_y + LSL_y}{2}$ 을 의미하고, 상수 $T_x$ 와 $T_y$ 는 각각 공정변수 X와 Y의 목표치( Target Value )를 뜻한다.

## 2.2 추정량과 관련된 극한분포

공정평균 $\mu_x$, $\mu_y$ 와 분산 $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$ 그리고 상관계수 $\rho$를 갖는 이변량 모집단으로부터의 확률표본 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$이 주어져 있다고 가정하자. 제일 먼저 벡터 공정능력지수 $\boldsymbol{C}_p = (C_{px}, C_{py})$와 $\boldsymbol{C}_{pm} = (C_{pmx}, C_{pmy})$들의 추정량과 관련된 극한분포 이론을 확립하

기 위하여 다음과 같은 내용의 중요한 보조정리를 얻는다.

**【보조정리1】** 만약 4차 중심적률 $\mu_{4x}=E(X-\mu_x)^4$과 $\mu_{4y}=E(Y-\mu_y)^4$이 존재하면, 표본의 크기 $n$이 $n\to\infty$일 때, 다음의 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned} & (Z_{1n}, Z_{2n}, Z_{3n}, Z_{4n}) \\ = \quad & (\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_x), \sqrt{n}(\overline{Y}-\mu_y), \sqrt{n}(S_x^2-\sigma_x^2), \sqrt{n}(S_y^2-\sigma_y^2)) \\ \xrightarrow{d} \quad & (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \overset{d}{=} MN(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{4\times 4}) \end{aligned}$$

단,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{4\times 4}=\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & Cov(X,Y) & \mu_{3x} & Cov(X,(Y-\mu_y)^2) \\ & \sigma_y^2 & Cov((X-\mu_x)^2, Y) & \mu_{3y} \\ & & \mu_{4x}-\sigma_x^4 & Cov((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2) \\ symmetric & & & \mu_{4y}-\sigma_y^4 \end{pmatrix}$$

단, $\boldsymbol{\Sigma}_{4\times 4}=(\sigma_{ij})_{4\times 4}=\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$, 4가지 행렬 $\Sigma_{ij}$는 $2\times 2$ 행렬로서 각 성분은 다음과 같다.

$\sigma_{11}=Var(X)=\sigma_x^2$, $\sigma_{12}=Cov(X,Y)$, $\sigma_{13}=\mu_{3x}$, $\sigma_{14}=Cov(X,(Y-\mu_y)^2)$,
$\sigma_{22}=Var(Y)=\sigma_y^2$, $\sigma_{23}=Cov((X-\mu_x)^2,Y)$, $\sigma_{24}=\mu_{3y}$, $\sigma_{33}=\mu_{4x}-\sigma_x^4$,
$\sigma_{34}=Cov((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2)$, $\sigma_{44}=\mu_{4y}-\sigma_y^4$

<u>증 명</u> 먼저 확률변수 $b_{kx}$와 $b_{ky}$을 다음과 같이 표기하도록 하자.

$$b_{kx}=\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu_x)^k, \quad b_{ky}=\frac{1}{n}\sum(Y_i-\mu_y)^k$$

그러면 $Z_{1n}$, $Z_{2n}$, , $Z_{3n}$, $Z_{4n}$는 다음과 같이 표현이 될 것이다.

$$Z_{1n}=\sqrt{n}b_{1x},\ Z_{3n}=\sqrt{n}(S_x{}^2-\sigma_x^2)=\sqrt{n}(b_{2x}-\sigma_x^2)+o_p(1),$$
$$Z_{2n}=\sqrt{n}b_{1y},\ Z_{4n}=\sqrt{n}(S_y{}^2-\sigma_y^2)=\sqrt{n}(b_{2y}-\sigma_y^2)+o_p(1).$$

$(X_i, Y_i)$는 서로 독립적이고 동일한 분포를 갖으므로, 다변량 중심극한정리와 Slutsky정리를 $Z_{1n}$, $Z_{2n}$, $Z_{3n}$, $Z_{4n}$의 유도된 항들에 적용하면 될 것이다. 한편, 분산 $Var(Z_{3n})=\mu_{4x}-\sigma_x^4$와 분산 $Var(Z_{4n})=\mu_{4y}-\sigma_y^4$, 그리고 공분산 $Cov(Z_{1n},Z_{3n})=\mu_{3x}$와 공분산 $Cov(Z_{2n},Z_{4n})=\mu_{3y}$ 은 쉽게 계산이 되므로 나머지 대각원소들에 대한 계산을 하면 다음과 같다.

첫째, 분산-공분산행렬 $\boldsymbol{\Sigma}_{4\times 4}$에서 성분 $\sigma_{34}$는 공분산 $Cov(Z_{3n},Z_{4n})$의 극한값으로, 공분산 $Cov(Z_{3n},Z_{4n})$은 다음과 같이 계산되어진다.

$$
\begin{aligned}
& Cov(Z_{3n}, Z_{4n}) = nCov(b_{2x} - \sigma_x^2, b_{2y} - \sigma_y^2) + o_p(1) \\
= \; & n\{E(b_{2x}b_{2y}) - E(S_x{}^2)E(S_y{}^2)\} + o_p(1) \\
= \; & n\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_x)^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_y)^2\right] - \sigma_x^2\sigma_y^2\right\} + o_p(1) \\
= \; & \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_x)^2(Y_i - \mu_y)^2 + \sum_{i \neq i'}^{n}(X_i - \mu_x)^2(Y_{i'} - \mu_y)^2\right] - n\sigma_x^2\sigma_y^2 + o_p(1) \\
= \; & E[(X - \mu_x)^2(Y - \mu_y)^2] + (n-1)E(X - \mu_x)^2E(Y - \mu_y)^2 - n\sigma_x^2\sigma_y^2 + o_p(1) \\
= \; & E((X - \mu_x)^2(Y - \mu_y)^2) + (n-1)\sigma_x^2\sigma_y^2 - n\sigma_x^2\sigma_y^2 + o_p(1) \\
= \; & E((X - \mu_x)^2(Y - \mu_y)^2) - \sigma_x^2\sigma_y^2 = Cov((X - \mu_x)^2, (Y - \mu_y)^2) + o_p(1)
\end{aligned}
$$

둘째, 행렬 $\boldsymbol{\Sigma}_{4\times4}$에서 성분 $\sigma_{23}$와 성분 $\sigma_{14}$도 각각 공분산 $Cov(Z_{2n}, Z_{3n})$와 공분산 $Cov(Z_{1n}, Z_{4n})$의 극한값으로, 공분산 $Cov(Z_{2n}, Z_{3n})$와 공분산 $Cov(Z_{2n}, Z_{3n})$은 다음과 같이 계산되어진다.

$$
\begin{aligned}
& Cov(Z_{2n}, Z_{3n}) = nCov(b_{2x} - \sigma_x^2, b_{1y}) + o_p(1) \\
= \; & n\{E(b_{1y}b_{2x}) - E(b_{1y})E(b_{2x})\} + o_p(1) = nE(b_{1y}b_{2x}) + o_p(1) \\
= \; & n\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_y)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_x)^2\right]\right\} + o_p(1) \\
= \; & \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_y)(X_i - \mu_x)^2 + \sum_{i \neq i'}^{n}(Y_{i'} - \mu_y)(X_i - \mu_x)^2\right] + o_p(1) \\
= \; & E[(Y - \mu_y)(X - \mu_x)^2] + (n-1)E(Y - \mu_y)E(X - \mu_x)^2 + o_p(1) \\
= \; & E((Y - \mu_y)(X - \mu_x)^2) = Cov((X - \mu_x)^2, (Y - \mu_y)) + o_p(1), \\
& Cov(Z_{1n}, Z_{4n}) = nCov(b_{1x}, b_{2y} - \sigma_y^2) + o_p(1) \\
= \; & n\{E(b_{1x}b_{2y}) - E(b_{1x})E(b_{2y})\} + o_p(1) = nE(b_{1x}b_{2y}) + o_p(1) \\
= \; & n\left\{E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_x)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_y)^2\right]\right\} + o_p(1) \\
= \; & \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_x)(Y_i - \mu_y)^2 + \sum_{i \neq i'}^{n}(X_i - \mu_x)(Y_{i'} - \mu_y)^2\right] + o_p(1) \\
= \; & E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)^2] + (n-1)E(X - \mu_x)E(Y - \mu_y)^2 + o_p(1) \\
= \; & E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)^2) = Cov((X - \mu_x), (Y - \mu_y)^2) + o_p(1).
\end{aligned}
$$

□

물론, Kocherlakota,S 와 Kocherlakota,K(1991)는 이변량 정규분포 $BN(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 하에서 가장 간단한 공정능력지수의 추정량들인 $\hat{C}_{px}$ 와 $\hat{C}_{py}$의 결합 확률분포함수를 계산하여, 벡터 공정능력지수 $\boldsymbol{C}_p$에 대한 정확한 신뢰영역을 구하고자 노력하였지만, 현실적으로 활용가능

성이 적은 신뢰영역이라 사료된다. 또한 벡터 공정능력지수 $C_{pm}$에 대한 정확한 신뢰영역을 구하는 것은 매우 복잡한 일이라 생각된다.

따라서, 보다 간편하고 바람직한 신뢰영역을 설정하기 위하여 위의 **【보조정리1】**를 기초로 벡터 공정능력지수 $C_p$, $C_{pm}$의 플러그-인 방법에 의한 점추정량 $\hat{C}_p$, $\hat{C}_{pm}$과 관련된 극한분포들을 유도하면 다음과 같다.

**【정리1】** 만일 4차 중심적률 $\mu_{4x}=E(X-\mu_x)^4$과 $\mu_{4y}=E(Y-\mu_y)^4$이 존재한다면, 표본의 크기 $n$이 $n\to\infty$일 때, 다음의 결과가 성립한다.

(a) $\sqrt{n}\,(\,\hat{C}_p - C_p\,)=\sqrt{n}\,(\,\hat{C}_{px}-C_{px},\ \hat{C}_{py}-C_{py}\,)$

$$\xrightarrow{d}\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}Z_3,\ -\frac{d_y}{6\sigma_y^3}Z_4\right),\quad \text{단, } (Z_3,Z_4)\sim N(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}_{22}),\quad \boldsymbol{\Sigma}_{22}=\begin{pmatrix}\sigma_{33} & \sigma_{34}\\ \sigma_{34} & \sigma_{44}\end{pmatrix}$$

이 때 극한 확률변수 $\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}Z_3,\ -\frac{d_y}{6\sigma_y^3}Z_4\right)$의 분산-공분산행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{V}_p=\begin{pmatrix}\frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}(\mu_{4x}-\sigma_x{}^4) & \frac{d_xd_y}{36\sigma_x^3\sigma_y^3}Cov((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2))\\ \frac{d_xd_y}{36\sigma_x^3\sigma_y^3}Cov((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2) & \frac{d_y^2}{36\sigma_y^6}(\mu_{4y}-\sigma_y{}^4)\end{pmatrix}$$

(b) $\sqrt{n}\,(\,\hat{C}_{pm} - C_{pm}\,)=\sqrt{n}\,(\,\hat{C}_{pmx}-C_{pmx},\ \hat{C}_{pmy}-C_{pmy}\,)$

$$\xrightarrow{d}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}\{Z_3+2(\mu_x-T_x)Z_1\},-\frac{d_y}{6\tau_y^3}\{Z_4+2(\mu_y-T_y)Z_2\}\right).$$

단, $\tau_x^2=\sigma_x^2+(\mu_x-T_x)^2$, $\tau_y^2=\sigma_y^2+(\mu_y-T_y)^2$이고 $(Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)\sim MN(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\Sigma}_{4\times4})$이다.

이 때 극한 확률변수 $\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}\{Z_3+2(\mu_x-T_x)Z_1\},-\frac{d_y}{6\tau_y^3}\{Z_4+2(\mu_y-T_y)Z_2\}\right)$의 분산-공분산행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{V}_{pm}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

단,

$$\sigma_{11}=\frac{d_x^2}{36\tau_x^6}[\mu_{4x}-\sigma_x{}^4+4(\mu_x-T_x)^2\sigma_x{}^2+4(\mu_x-T_x)\mu_{3x}]$$

$$\sigma_{22}=\frac{d_y^2}{36\tau_y^6}[\mu_{4y}-\sigma_y{}^4+4(\mu_y-T_y)^2\sigma_y{}^2+4(\mu_y-T_y)\mu_{3y}]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}=\sigma_{21}=&\frac{d_xd_y}{36\tau_x^3\tau_y^3}[Cov((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2)+2(\mu_x-T_x)Cov(X,(Y-\mu_y)^2)\\&+2(\mu_y-T_y)Cov((X-\mu_x)^2,Y)+4(\mu_x-T_x)(\mu_y-T_y)Cov(X,Y)].\end{aligned}$$

<u>증 명</u> 먼저 (a)의 좌변을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\,(\,\widehat{C}_p - C_p\,)\\
&= \sqrt{n}((\,\widehat{C}_{px} - C_{px}),(\,\widehat{C}_{py} - C_{py}))\\
&= \left(\sqrt{n}\left(\frac{d_x}{3S_x} - \frac{d_x}{3\sigma_x}\right\},\sqrt{n}\left(\frac{d_y}{3S_y} - \frac{d_y}{3\sigma_y}\right)\right)\\
&= \left(-\frac{d_x}{3S_x\sigma_x}\sqrt{n}(S_x - \sigma_x), -\frac{d_y}{3S_y\sigma_y}\sqrt{n}(S_y - \sigma_y)\right)\\
&= \left(-\frac{d_x}{3S_x\sigma_x(S_x+\sigma_x)}\sqrt{n}(S_x^2 - \sigma_x^2), -\frac{d_y}{3S_y\sigma_y(S_y+\sigma_y)}\sqrt{n}(S_y^2 - \sigma_y^2)\right).
\end{aligned}$$

따라서 위 **【보조정리1】** 의 (a)에 의해 **【정리1】** (a)의 극한분포를 얻는다.
그리고 비슷한 방법으로

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\,(\,\widehat{C}_{pm} - C_{pm}\,) = \sqrt{n}((\,\widehat{C}_{pmx} - C_{pmx}),(\,\widehat{C}_{pmy} - C_{pmy}))\\
&= \left(\sqrt{n}\left\{\frac{d_x}{3\sqrt{S_x^2 + (\overline{X} - T_x)^2}} - \frac{d_x}{3\sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2}}\right\},\right.\\
&\qquad\left.\sqrt{n}\left\{\frac{d_y}{3\sqrt{S_y^2 + (\overline{Y} - T_y)^2}} - \frac{d_y}{3\sqrt{\sigma_y^2 + (\mu_y - T_y)^2}}\right\}\right)\\
&= \left(\sqrt{n}\left\{\frac{d_x}{3\,\hat{\tau}_x} - \frac{d_x}{3\tau_x}\right\},\sqrt{n}\left\{\frac{d_y}{3\,\hat{\tau}_y} - \frac{d_y}{3\tau_y}\right\}\right)\\
&= \left(-\frac{d_x\sqrt{n}(\,\hat{\tau}_x^{\,2} - \tau_x^2)}{3\,\hat{\tau}_x\tau_x(\,\hat{\tau}_x + \tau_x)}, -\frac{d_y\sqrt{n}(\,\hat{\tau}_y^{\,2} - \tau_y^2)}{3\,\hat{\tau}_y\tau_y(\,\hat{\tau}_y + \tau_y)}\right)
\end{aligned}$$

그런데 $n \to \infty$일 때, 위의 확률변수중 다음의 확률벡터는

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{n}(\,\hat{\tau}_x^{\,2} - \tau_x^2),\sqrt{n}(\,\hat{\tau}_y^{\,2} - \tau_y^2))\\
&= (\sqrt{n}\{S_x^2 + (\overline{X} - T_x)^2 - \sigma_x^2 - (\mu_x - T_x)^2\},\sqrt{n}(\,\hat{\tau}_y^{\,2} - \tau_y^2))\\
&= (\sqrt{n}(S_x^2 - \sigma_x^2) + \sqrt{n}(\overline{X} - \mu_x)(\overline{X} + \mu_x - 2T_x),\\
&\qquad \sqrt{n}(S_y^2 - \sigma_y^2) + \sqrt{n}(\overline{Y} - \mu_y)(\overline{Y} + \mu_y - 2T_y))\\
&\xrightarrow{d} (Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1, Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2),
\end{aligned}$$

따라서 위의 결과와 추정량 $\widehat{\tau_x^2}$, $\widehat{\tau_y^2}$ 의 일치성, 그리고 Slutsky정리에 의해 $\sqrt{n}\,(\,\widehat{C}_{pm} - C_{pm}\,)$은 다음의 극한분포이론이 성립한다.

$$\xrightarrow{d} \left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}\{Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1\}, -\frac{d_y}{6\tau_y^3}\{Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2\}\right) \qquad \square$$

### 2.3 벡터 공정능력지수의 근사 신뢰영역

결론적으로, Kocherlakota,S 와 Kocherlakota,K(1991)가 제안한 비효률적인 신뢰영역보다 **【정리1】** 에서 유도한 극한분포 결과를 이용한 기본적인 2차원 벡터 공정능력지수 $C_p$와 $C_{pm}$에 대한 보다 바람직한 $(1-\alpha)100\%$ 근사 신뢰영역에 대하여 구체적으로 설정하면 다음과 같다.

부연설명하면, **【정리1】** 에서와 같이 4차 중심적률 $\mu_{4x}=E(X-\mu_x)^4$과 $\mu_{4y}=E(Y-\mu_y)^4$이 존재하는 적당한 이변량 공정분포로부터 확률표본 $(X_1, Y_1),(X_2, Y_2),\cdots,(X_n, Y_n)$을 얻었다고 가정하자. 그러면 앞에서 연구된 결과로부터 다음의 근사 신뢰영역을 얻는다.

첫째, 벡터공정능력지수 $C_p$에 대한 $(1-\alpha)100\%$ 신뢰영역은 다음과 같다.

$$n(\hat{C}_p-C_p)'(\hat{V}_p)^{-1}(\hat{C}_p-C_p)\le\chi^2(2;\alpha)$$

단, $\chi^2(2;\alpha)$는 자유도가 2인 $\chi^2$-분포의 하위 $100(1-\alpha)$ 백분위수를 나타낸다.

또한 추정행렬 $\hat{V}_p$는 행렬 $V_p$의 추정량으로 다음과 같다.

$$\hat{V}_p=\begin{pmatrix} \frac{d_x^2}{36\ \hat{\sigma}_x^6}(\hat{\mu}_{4x}-\hat{\sigma}_x^4) & \frac{d_xd_y}{36\ \hat{\sigma}_x^3\ \hat{\sigma}_y^3}\ \widehat{Cov}((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2) \\ symmetric & \frac{d_y^2}{36\ \hat{\sigma}_y^6}(\hat{\mu}_{4y}-\hat{\sigma}_y^4) \end{pmatrix}$$

추정행렬 $\hat{V}_p$에 있는 각 성분들은 플러그-인 방법에 의한 추정량으로 쉽게 계산된다.

둘째, 벡터공정능력지수 $C_{pm}$에 대한 $(1-\alpha)100\%$ 신뢰영역은 다음과 같다.

$$n(\hat{C}_{pm}-C_{pm})'(\hat{V}_{pm})^{-1}(\hat{C}_{pm}-C_{pm})\le\chi^2(2;\alpha)$$

단, 추정행렬 $\hat{V}_{pm}$는 행렬 $V_{pm}$의 추정량으로 다음과 같이 표현되고,

$$\hat{V}_{pm}=\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

추정행렬 $\hat{V}_{pm}$에 있는 각 성분들은 플러그-인 방법에 의한 추정량들로 아래식으로 계산된다.

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{d_x^2}{36\ \hat{\tau}_x^6}[\hat{\mu}_{4x}-\hat{\sigma}_x^4+4(\hat{\mu}_x-T_x)^2\ \hat{\sigma}_x^2+4(\hat{\mu}_x-T_x)\hat{\mu}_{3x}]$$

$$\hat{\sigma}_{22} = \frac{d_y^2}{36\ \hat{\tau}_y^6}[\hat{\mu}_{4y}-\hat{\sigma}_y^4+4(\hat{\mu}_y-T_y)^2\ \hat{\sigma}_y^2+4(\hat{\mu}_y-T_y)\hat{\mu}_{3y}]$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{21}$$

$$= \frac{d_xd_y}{36\ \hat{\tau}_x^3\ \hat{\tau}_y^3}[\widehat{Cov}((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y)^2)+2(\hat{\mu}_x-T_x)\widehat{Cov}((X-\mu_x),(Y-\mu_y)^2)$$

$$+2(\hat{\mu}_y-T_y)\widehat{Cov}((X-\mu_x)^2,(Y-\mu_y))+4(\hat{\mu}_x-T_x)(\hat{\mu}_y-T_y)\widehat{Cov}(X,Y)].$$

$$\widehat{\tau_x}^2 = \widehat{\sigma_x}^2 + (\widehat{\mu_x} - T_x)^2, \quad \widehat{\tau_y}^2 = \widehat{\sigma_y}^2 + (\widehat{\mu_y} - T_y)^2$$

## 3. 붓스트랩의 일치성과 신뢰영역

붓스트랩 방법은 컴퓨터가 널리 사용되면서, Efron(1979)과 Beran(1984)등이 여러 통계학 분야에 전반적으로 사용하기 시작하였다. Diciccio와 Tibshirani(1987)는 붓스트랩 신뢰구간과 붓스트랩 근사를 그리고 Hall(1988)은 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간들을 이론적으로 폭넓게 비교·연구하였다.

그리고 붓스트랩 관련 공정능력지수들에 대한 구간추정 연구결과들로서, Franklin과 Wasserman(1992)는 공정능력지수 $C_p$, $C_{pk}$, $C_{pm}$에 대한 하한 신뢰한계에 대해서 3가지 붓스트랩 방법 즉, SB, PB, BCPB를 기초로 포괄적으로 비교·연구하였다. 최근 들어, Cho, Han과 Jo(1997)은 여러 가지 공정능력 지수들에 대한 붓스트랩 구간추정시 요구되는 이론적인 정당성을 위한 붓스트랩 방법의 일치성을 확립하였다. 또한 Cho, Park과 Kim(1999)은 생산현장에서 가장 많이 사용되고 있는 공정능력지수 $C_{pk}$에 대하여 보다 효율적인 붓스트랩 신뢰구간 추정문제를 보다 심도있게 연구하였다. 나아가, Han, Cho와 Lim(2000)은 공정분포의 비대칭도까지 고려한 공정능력지수 $C_s$에 대한 붓스트랩 추정문제에 대하여 포괄적으로 연구하였다.

### 3.1 붓스트랩 알고리즘

우선, 본 논문에서 사용하게 될 벡터 공정능력지수들을 보다 효과적으로 추정하기 위한 붓스트랩 알고리즘을 소개하면 다음과 같다.

- 1단계 : 주어진 확률표본 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$으로부터 복원추출방법에 의해 $m$개의 붓스트랩 표본 $(X_1, Y_1)^*, (X_2, Y_2)^*, \cdots, (X_n, Y_n)^*$을 얻는다. 편의상, $(X_i, Y_i)^* = (X_i^*, Y_i^*)$, $i = 1, 2, \cdots, m$으로 표기 한다.
- 2단계 : 1단계의 붓스트랩 표본들로부터 붓스트랩 표본평균 $\overline{X}^*$와 $\overline{Y}^*$, 그리고 표본분산 $S_x^{*2}$와 $S_y^{*2}$를 다음과 같이 계산한다.

$$\overline{X}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^*, \quad \overline{Y}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i^*,$$

$$S_x^{*2} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i^* - \overline{X}^*)^2, \quad S_y^{*2} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i^* - \overline{Y}^*)^2$$

- 3단계 : 2단계로부터 다음과 같이 붓스트랩 벡터 공정능력지수 추정량 $\widehat{C}_p^*$와 $\widehat{C}_{pm}^*$를 얻는다.

$$\widehat{C}_p^* = (\widehat{C}_{px}^*, \widehat{C}_{py}^*) = \left(\frac{d_x}{3S_x^*}, \frac{d_y}{3S_y^*}\right)$$

$$\widehat{C}_{pm}^{\ *} = (\ \widehat{C}_{pmx}^{\ *},\ \widehat{C}_{pmy}^{\ *}\ ) = \left( \frac{d_x}{3\sqrt{S_x^{*2} + (\ \overline{X}^* - T_x)^2}},\ \frac{d_y}{3\sqrt{S_y^{*2} + (\ \overline{Y}^* - T_y)^2}} \right)$$

이 때 붓스트랩 표본의 크기 $m$이 원래의 표본의 크기 $n$과 같은 경우에 $n^n$개의 붓스트랩 추정량들이 계산 가능하며, 이들은 추정량 $\widehat{C}_p$와 $\widehat{C}_{pm}$의 (완전한) 붓스트랩 확률분포의 구성요소가 될 것이다. 이러한 붓스트랩 알고리즘을 바탕으로 강력한 컴퓨터 모의실험을 통하여 벡터 공정능력지수 $\boldsymbol{C_p}$와 $\boldsymbol{C_{pm}}$에 대한 효율적인 붓스트랩 신뢰영역을 설정할 수 있을 것이다.

## 3.2 붓스트랩 방법의 일치성

우선, 2 절에서의 【보조정리】 와 【정리1】 그리고 붓스트랩 알고리즘을 바탕으로, 벡터 공정능력지수들의 붓스트랩 추정량과 관련된 다음의 극한분포들을 얻을 수 있을 것이다.
그런데 【정리1】 과 다음 【정리2】 의 극한분포들이 서로 정확하게 일치하게 되는 데 이는 우리의 벡터 공정능력지수들에 대한 붓스트랩 통계적 추론을 정당화해 주는 중요한 조건으로서, 이러한 성질을 붓스트랩 방법의 일치성이라 한다.

**【정리2】** 만일 4차 중심적률 $\mu_{4x} = E(X-\mu_x)^4$과 $\mu_{4y} = E(Y-\mu_y)^4$이 존재한다면, 원래의 표본의 크기 $n$과 붓스트랩 표본의 크기 $m$이 $m,\ n \to \infty$일 때, 다음 결과가 성립한다.

(a) $\sqrt{m}\ (\ \widehat{C}_p^{\ *} - \widehat{C}_p\ )\,|\ \boldsymbol{\chi}_n = \sqrt{m}\ (\ \widehat{C}_{px}^{\ *} - \widehat{C}_{px},\ \widehat{C}_{py}^{\ *} - \widehat{C}_{py}\ )\,|\ \boldsymbol{\chi}_n$

$$\xrightarrow{d} \left( -\frac{d_x}{6\sigma_x^3} Z_3,\ -\frac{d_y}{6\sigma_y^3} Z_4 \right),\quad \text{단, } (Z_3, Z_4) \sim N(0, \Sigma_{22})$$

(b) $\sqrt{m}\ (\ \widehat{C}_{pm}^{\ *} - \widehat{C}_{pm}\ )\,|\ \boldsymbol{\chi}_n = \sqrt{m}\ (\ \widehat{C}_{pmx}^{\ *} - \widehat{C}_{pmx},\ \widehat{C}_{pmy}^{\ *} - \widehat{C}_{pmy}\ )\,|\ \boldsymbol{\chi}_n$

$$\xrightarrow{d} \left( -\frac{d_x}{6\tau_x^3} \{Z_3 + 2(\mu_x - T_x)Z_1\},\ -\frac{d_y}{6\tau_y^3} \{Z_4 + 2(\mu_y - T_y)Z_2\} \right)$$

단, $\boldsymbol{\chi}_n$는 주어진 이변량 자료인 $\boldsymbol{\chi}_n = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)\}$이다.

<u>증 명</u> 편의상, 벡터 공정능력지수 $\boldsymbol{C}_{pw}$를 정의하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{C}_{pw} = (\ C_{pwx}, C_{pwy}) = \left( \frac{d_x}{3\sqrt{\sigma_x^{\ 2} + w_x(\mu_x - T_x)^2}},\ \frac{d_y}{3\sqrt{\sigma_y^{\ 2} + w_y(\mu_y - T_y)^2}} \right)$$

단, $w_x$와 $w_y$는 각각 $X$와 $Y$ 성분의 공정능력지수 $C_{pwx}$와 $C_{pwy}$에서의 공정평균과 목표치와의 불일치 정도를 고려한 가중치를 뜻한다( 크기는 보통 0과 1사이임 ).
그러면 플러그_인 추정량 $\widehat{C}_{pw}$과 붓스트랩 추정량 $\widehat{C}^*_{pw}$을 사용하여

$$\sqrt{m}\,(\ \widehat{C}_{pw}^{\ *} - \widehat{C}_{pw}\ )\,|\ \chi_n$$

$$= \sqrt{m}\,(\,(\ \widehat{C}^{*}_{pwx} - \widehat{C}_{pwx}),(\ \widehat{C}^{*}_{pwy} - \widehat{C}_{pwy})\ )\,|\ \chi_n$$

$$= \sqrt{m}\left(\left\{\frac{d_x}{3\sqrt{S_x^{*2}+w_x(\overline{X^*}-T_x)^2}} - \frac{d_x}{3\sqrt{S_x^2+w_x(\overline{X}-T_x)^2}}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\frac{d_y}{3\sqrt{S_y^{*2}+w_y(\overline{Y^*}-T_y)^2}} - \frac{d_y}{3\sqrt{S_y^2+w_y(\overline{Y}-T_y)^2}}\right\}\right)\Bigg|\ \chi_n$$

위 벡터의 첫 번째 성분은 $m\to\infty$일 때 다음이 성립한다.

$$-\frac{\sqrt{m}d_x}{3\sqrt{S_x^{*2}+w_x(\overline{X^*}-T_x)^2}\sqrt{S_x^2+w_x(\overline{X}-T_x)^2}}$$
$$\left\{\sqrt{S_x^{*2}+w_x(\overline{X^*}-T_x)^2}-\sqrt{S_x^2+w_x(\overline{X}-T_x)^2}\right\}\Big|\ \chi_n$$

$$= -\frac{\sqrt{m}d_x}{3\sqrt{S_x^{*2}+w_x(\overline{X^*}-T_x)^2}\sqrt{S_x^2+w_x(\overline{X}-T_x)^2}}$$
$$\left\{\frac{(S_x^{*2}-S_x^2)+w_x(\overline{X^*}-T_x)^2-w_x(\overline{X}-T_x)^2}{\sqrt{S_x^{*2}+w_x(\overline{X^*}-T_x)^2}+\sqrt{S_x^2+w_x(\overline{X}-T_x)^2}}\right\}\Bigg|\ \chi_n$$

$$\xrightarrow{d}\ -\frac{d_x}{6\{S_x^2+w_x^2+(\overline{X}-T_x)^2\}^{3/2}}\{Z_{3n}+2w_x(\overline{X}-T_x)Z_{1n}\}$$

유사하게, $m\to\infty$일 때 위 벡터의 두 번째 성분에 대해서 다음이 성립한다.

$$-\frac{\sqrt{m}d_y}{3\sqrt{S_y^{*2}+w_y(\overline{Y^*}-T_y)^2}\sqrt{S_y^2+w_y(\overline{Y}-T_y)^2}}$$
$$\left\{\sqrt{S_y^{*2}+w_y(\overline{Y^*}-T_y)^2}-\sqrt{S_y^2+w_y(\overline{Y}-T_y)^2}\right\}\Big|\ \chi_n$$

$$= -\frac{\sqrt{m}d_y}{3\sqrt{S_y^{*2}+w_y(\overline{Y^*}-T_y)^2}\sqrt{S_y^2+w_y(\overline{Y}-T_y)^2}}$$
$$\left\{\frac{(S_y^{*2}-S_y^2)+w_y(\overline{Y^*}-T_y)^2-w_y(\overline{Y}-T_y)^2}{\sqrt{S_y^{*2}+w_y(\overline{Y^*}-T_y)^2}+\sqrt{S_y^2+w_y(\overline{Y}-T_y)^2}}\right\}\Bigg|\ \chi_n$$

$$\xrightarrow{d}\ -\frac{d_y}{6\{S_y^2+w_y^2+(\overline{Y}-T_y)^2\}^{3/2}}\{Z_{4n}+2w_y(\overline{Y}-T_y)Z_{2n}\}$$

두 성분들에 대한 결과들을 결합함으로써 다음과 같은 최종 결과를 유도할 수 있다.

$$\sqrt{m}\,((\hat{C}^*_{pwx}-\hat{C}_{pwx}),(\hat{C}^*_{pwy}-\hat{C}_{pwy}))\mid \chi_n$$

$$\xrightarrow{m\to\infty}\left(-\frac{d_x}{6\{S_x^2+w_x(\overline{X}-T_x)^2\}^{3/2}}\{Z_{3n}+2w_x(\overline{X}-T_x)Z_{1n}\},\right.$$
$$\left.-\frac{d_y}{6\{S_y^2+w_y(\overline{Y}-T_y)^2\}^{3/2}}\{Z_{4n}+2w_y(\overline{Y}-T_y)Z_{2n}\}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}\{Z_3+2w_x(\mu_x-T_x)Z_1\},-\frac{d_y}{6\tau_y^3}\{Z_4+2w_y(\mu_y-T_y)Z_2\}\right).$$

위의 증명과정에서 결과(a)의 경우에는 $w_x=0$, $w_y=0$를 대입하여, 그리고 결과(b)의 경우에는 $w_x=1$, $w_y=1$을 대입하여 계산하면 된다. □

### 3.3 벡터 공정능력지수의 붓스트랩 신뢰영역

4차 중심적률 $\mu_{4x}=E(X-\mu_x)^4$과 $\mu_{4y}=E(Y-\mu_y)^4$이 존재하는 적당한 이변량 공정분포하에서, 2절과 3절에서 밝힌 붓스트랩 방법의 일치성을 기초로 2차원 벡터 공정능력지수 $C_p$와 $C_{pm}$에 대한 보다 바람직한 $(1-\alpha)100\%$ 붓스트랩 신뢰영역을 설정하면

첫째, 벡터공정능력지수 $C_p$에 대한 $(1-\alpha)100\%$ 붓스트랩 신뢰영역은 다음과 같다.

$$n(\hat{C}_p-C_p)'(\hat{V}_p)^{-1}(\hat{C}_p-C_p)\le \hat{x}_{p,\alpha}$$

단, 추정행렬 $\hat{V}_p$는 2절에 자세히 설명되어 있고, $\hat{x}_{p,\alpha}$는 다음 식을 만족하는 값이다.

$$\Pr\left\{m(\hat{C}_p^*-\hat{C}_p)'(\hat{V}_p)^{-1}(\hat{C}_p^*-\hat{C}_p)\le \hat{x}_{p,\alpha}\mid \chi_n\right\}=1-\alpha$$

둘째, 벡터공정능력지수 $C_{pm}$에 대한 $(1-\alpha)100\%$ 붓스트랩 신뢰영역은 다음과 같다.

$$n(\hat{C}_{pm}-C_{pm})'(\hat{V}_{pm})^{-1}(\hat{C}_{pm}-C_{pm})\le \hat{x}_{pm,\alpha}$$

단, 추정행렬 $\hat{V}_{pm}$는 2절에 자세히 설명되어 있고, $\hat{x}_{pm,\alpha}$는 다음 식을 만족하는 값이다.

$$\Pr\left\{m(\hat{C}_{pm}^*-\hat{C}_{pm})'(\hat{V}_{pm})^{-1}(\hat{C}_{pm}^*-\hat{C}_{pm})\le \hat{x}_{pm,\alpha}\mid \chi_n\right\}=1-\alpha$$

## References

[1] Alt,F.B. and N.D.Smith(1988). Multivariate Process Control, in P.R. Krishnaiah and C.R.Rao, Editors, *Handbook of Statistics*, Volume 7, North-Holland, Amsterdam, 333-351.

[2] Beran,R.J.(1984). Bootstrap Methods in Statistics. *Jahresberichtr der Deutschen*

*Mathematiker Vereiningung*, 86, 14-30.

[3] Chan,L.K., Xiong,Z. and Zhang,D.(1990). On the Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices. *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 19(1), 11-18.

[4] Cho,J.J., Han,J.H. and Jo,S.H.(1997). Bootstrapping Unified Process Capability Index, *Journal of the Korean Statistical Society*, 26(4), 543-554.

[5] Cho,J.J. Kim,J.S. and Park,B.S.(1999). Better Nonparametric Bootstrap Confidence Interval for Process Capability Index $C_{pk}$, *Korean Journal of Applied Statistics*, 12(1), 45-65.

[6] Diciccio,T.J. and Tibshirani,R.(1987). Bootstrap Confidence Intervals and Bootstrap Approximations, *Journal of the American Statistical Association*, 82, 163-170.

[7] Efron,B.(1979). Bootstrap Methods : Another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, 7, 1-26.

[8] Franklin,L.A. and Wasserman,G.S.(1992). Bootstrap Lower Confidence Interval Limits for Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, 24, 196-210.

[9] Hall,P.(1988). Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals. *Annals of Statistics*, 16, 927-953.

[10] Han,J.H., Cho,J.J. and Lim,C.S.(2000). Bootstrap Confidence Limits for Wright's $C_s$, *Commnications in Statistics : Theory and Methods*, 29(3), 485-505.

[11] Hubele,N.F., Shahriari,H. and Cheng,C.S.(1991). A bivariate process capability vector, in Statistical Process Control in Manufacturing (J.B. Keats and D.C. Montgomery, eds.) M. Dekker : New York, 299-310.

[12] Kim,D.K.(1999), A study on Process Capability Index using Semi-Variance, The Korean Communications in Statistics, 6(1), 77-88.

[13] Kocherlakota, S. and Kocherlakota, K.(1991) Process capability indices : Bivariate Normal distribution, *Communication in Statistics : Theory and Methods*, 20, 2529-2547.

[14] Kotz,S. and Johnson,N.L.(1993). Process Capability Indices, 1st ed., Chapman & Hall.

[15] Pearn,W.L., Kotz,S. and Johnson,N.L(1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capabiblity Indices, *Journal of Quality Technology*, 24, 216-231.

[16] Wierda,S.J.(1992). A multivariate process capability index, *Proceedings 9th International Conference; Israel Society of Quality Assurance*, Jerusalem, Israel, 517-522.