

비선형 미분방정식의 TSK 퍼지 모델 유도에 관하여

On the Derivation of TSK Fuzzy Model for Nonlinear Differential Equations

이상민*, 조중선**

Sang-Min Lee*, Joong-Seon Joh**

*창원대학교 제어계측공학과 대학원

**창원대학교 제어계측공학과

요약

비선형 미분방정식으로부터 TSK(Takagi-Sugeno-Kang) 퍼지모델을 유도하는 것은 퍼지 제어의 이론분야에서는 매우 중요한 문제이다. 본 논문에서는 off-equilibrium에서 상수항을 가지는 부분 미분 방정식을 배제시키는 방법을 제안한다. 이는 전건부의 언어적 표현이 삼각형 소속함수들을 가지는 기본적인 TSK 퍼지모델에서 체계적으로 유도되어진다. 그리고 유도된 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들은 GA(Genetic Algorithm)를 이용하여 최적화함으로써 실제 미분방정식에 근사화한다. 아울러 이상의 제안된 방법의 우수성을 모의실험을 통하여 검증한다.

Abstract

Derivation of TSK fuzzy model from nonlinear differential equation is a fundamental issue in the field of theoretical fuzzy control. The method which does not yield affine local differential equations at off-equilibrium points is proposed in this paper. A prototype TSK fuzzy model which has triangular membership functions for linguistic terms of the antecedent part is derived systematically. And then GA is used to modify the membership functions optimally. Simulation results show the validity of the proposed method.

Key words : TSK 퍼지모델, affine equation, 유전자 알고리즘, membership function modification, PDC

1. 서론

일반적으로 퍼지 모델링은 다양한 비선형 시스템을 기술하고 제어하는데 많이 이용된다. 특히 TSK (Takagi-Sugeno-Kang) 퍼지모델[1]은 기존 동적시스템의 비선형 미분방정식이나 상태방정식을 이용하기 용이하고, 이렇게 설계된 TSK 퍼지모델을 제어하기 위한 TSK 퍼지제어기는 선형시스템의 제어 이론을 적용하기 용이한 PDC (Parallel Distributed Compensation) 기법[2]과 함께 널리 사용되며, 또한 LMI 기법[3,4] 등을 이용한 안정성에 관한 활발한 연구가 진행되고 있다. 그러나 실제 제어대상인 동적시스템을 표현하는 TSK 퍼지모델에 관한 연구는 미미한 실정이다.

일반적으로 TSK 퍼지제어기를 구성하기 위해서는 먼저 제어대상인 동적시스템을 부분별 선형화된 다수의 TSK 퍼지모델로 유도 또는 설계하여야 한다. 그러나 동적시스템의 모델 방정식이 비선형 미분방정식일 경우, 이를 부분 선형화하기 위해 일반적으로 많이 사용되는 테일러 시리즈 전개를 사용하게되면 TSK 퍼지모델들의 후건

부가 상수항이 존재하는 affine 형태의 모델이 되어 일반적인 선형제어이론을 적용하기가 용이하지 않게 된다[5].

따라서 본논문에서는 동적시스템의 비선형 미분방정식으로부터 후건부가 부분선형화된 상수항이 존재하지 않는 TSK 퍼지모델을 유도하는 체계적인 기법을 제시한다. 또한 유도되어진 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들을 유전 알고리즘을 이용하여 실제 시스템을 대변하는 비선형 미분방정식에 최적근사화시키고, 최적근사화된 다수의 TSK 퍼지모델들을 합성하는 퍼지규칙을 추가함으로써, 실제 동적시스템의 거동에 대해 최적 근사화된 거동을 묘사할 수 있는 TSK 퍼지모델을 유도한다.

이는 실제 동적시스템의 거동을 최대한 적절히 묘사할 수 있는 TSK 퍼지 모델을 제시함과 더불어, TSK 퍼지모델을 이용하여 TSK 퍼지제어기를 설계시, 보다 정확한 TSK 퍼지제어기의 설계를 용이하도록 하고자 함이며, 이를 실제 동적시스템의 모델링 거동과 비교함으로써 그 효용성을 보인다.

2. TSK 퍼지모델링

일반적으로 동적시스템을 묘사하는 비선형 미분방정식을 이용하여 부분선형화된 TSK 퍼지모델을 설계시, TSK 퍼지모델의 규칙을 유도하는 방법은 Wang [2] 등이

접수일자 : 2001년 9월 15일

완료일자 : 2001년 12월 1일

감사의글 : 본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작기계기술연구센터의 지원에 의한 것입니다.

사용한 방법 1과 테일러 시리즈 1차전개를 이용하는 방법 2가 주로 사용된다.

Method 1

Plant Rule i :

if $x_1(t)$ is M_1^i and ... and $x_n(t)$ is M_n^i
 then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, \dots, r$

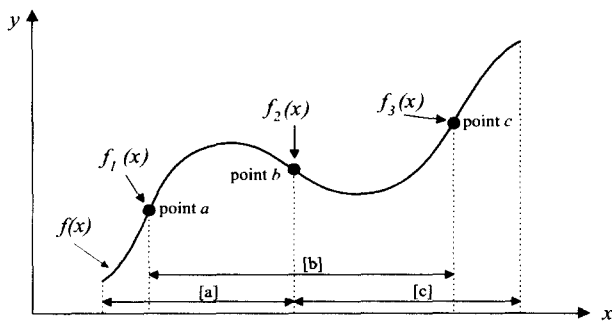
Method 2

Plant Rule i :

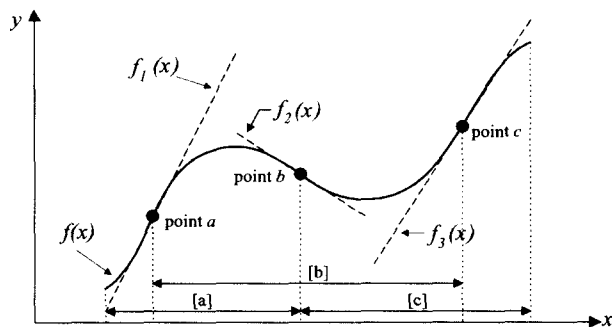
if $x_1(t)$ is M_1^i and ... and $x_n(t)$ is M_n^i
 then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + c, \quad i = 1, \dots, r$

여기서 c 는 테일러 시리즈 전개시 비평형점에서 발생하는 상수이다.

이때 각각의 방법들로 나타낸 TSK 퍼지모델의 규칙들이 (1)과 같을 경우, 이에의해 묘사되는 동적시스템이 가지는 비선형 미분방정식의 출력에 대응하는 각 TSK 퍼지모델의 출력은 그림 1과 같다.



(a) Wang 등이 사용한 TSK 퍼지모델



(b) 테일러 시리즈를 이용한 TSK 퍼지모델

그림 1. TSK 퍼지모델링을 이용한 동적시스템의 비선형 미분방정식 묘사

Fig 1. Nonlinear differential equation description of dynamics system using TSK fuzzy modeling

- Plant Rule 1 : if x is $[a]$, then $y = f_1(x)$
- Plant Rule 2 : if x is $[b]$, then $y = f_2(x)$ (1)
- Plant Rule 3 : if x is $[c]$, then $y = f_3(x)$

그러나 Wang 등이 사용한 방법 1의 경우, 비선형 미분방정식으로 표현되는 동적시스템들을 표현할 수 있는

일반적인 방법이거보다는 단순히 TSK 퍼지모델의 규칙들이 가지는 특정포인트들에 대해서만 동적시스템의 출력을 일치시켰으며, 방법 2의 경우는 부분선형화하고자 하는 포인트가 평형점이 아닐 경우 후건부의 상수항 발생으로 인해 선형제어기법을 적용하기가 용이하지 않다.

따라서 본 논문에서는 이 두 가지 방법을 혼용하여, 체계적인 TSK 퍼지모델링기법을 제시하고자 한다. 즉 동적시스템의 비선형 미분방정식을 부분선형화시, 동작점이 평형점일 경우 TSK 퍼지모델의 후건부를 테일러 시리즈 1차전개를 이용하여 유도하고, 동작점이 평형점이 아닐 경우 TSK 퍼지모델의 후건부를 다음과 같이 선형부분과 비선형부분으로 구분한 뒤, 동작점에 대하여 일반화시킴으로써 상수항이 존재하지 않는 부분선형모델을 유도하고자 한다. 즉 TSK 퍼지모델의 i 번째 규칙이 다음과 같은 경우

Plant Rule i :

if $x_1(t)$ is M_1^i and ... and $x_n(t)$ is M_n^i
 then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, \dots, r,$

동적시스템의 비선형 미분방정식을 다음과 같이 선형방정식과 비선형방정식으로 구분하여 유도한다.

$$\dot{x} = f_{lin}(x, u) + f_{non}(x, u) \quad (2)$$

이때

$$f_{lin}(x, u) = A_{lin} \cdot x + B_{lin} \cdot u \quad (3)$$

$$f_{non}(x, u) = A_{non}(x, u) \cdot x + B_{non}(x, u) \cdot u \quad (4)$$

이다. 따라서

$$\dot{x} = [A_{lin} + A_{non}(x, u)] \cdot x + [B_{lin} + B_{non}(x, u)] \cdot u \quad (5)$$

가 되며, 이를 특정 동작점인 x^*, u^* 에 대응시키면

$$\dot{x} = [A_{lin} + A_{non}(x, u)]_{x=x^*, u=u^*} \cdot x + [B_{lin} + B_{non}(x, u)]_{x=x^*, u=u^*} \cdot u \quad (6)$$

가 된다.

이상에서 제시한 TSK 퍼지모델 도출방법을 Wang [2] 등이 제시한 역도립진자시스템에 대하여 적용해보고, 테일러 시리즈를 이용한 TSK 퍼지모델의 출력과 비교해본다.

예제 1. Wang 등이 제시한 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 x_1 은 역도립진자의 각도, x_2 는 도립진자의 각속도, $g = 9.8m/s^2$, m 은 도립진자의 무게, M 은 카트의 무게, $2l$ 은 도립진자의 길이이며, u 는 카트에 가해지는 힘이고, $a = 1/(m+M)$ 이다. 이때 본 시뮬레이션에서 사용된 파라미터들의 값은 $m=2.0kg$, $M=8.0kg$, $2l=1.0m$ 이다.

그리고 TSK 퍼지모델의 규칙은 Wang [2]등의 논문에서 제시한 것과 동일하게 4개의 규칙을 사용하였으며, 이때 입력변수인 x_1 의 초기 소속함수는 그림 2와 같다. Rule 1의 후건부에 제시된 방정식은 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식의 테일러 시리즈 1차전개를 통하여 유도되었으며, Rule 2~4의 후건부 방정식은 식 (6)에 의해서 유도된 것이다.

- Rule1: If x_1 is about 0
Then $\dot{x} = A_1x + B_1u$
- Rule2: If x_1 is about $\pm\pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$)
Then $\dot{x} = A_2x + B_2u$
- Rule3: If x_1 is about $\pm\pi/2$ ($|x_1| > \pi/2$)
Then $\dot{x} = A_3x + B_3u$
- Rule4: If x_1 is about π
Then $\dot{x} = A_4x + B_4u$

여기서

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}$$

이며, $\beta = \cos(88^\circ)$ 이다. 구해진 각각의 TSK 퍼지모델과 실제 비선형 미분방정식을 역도립진자시스템의 동작영역에서 비교한 것이 그림 3이며, TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수는 그림 4와 같다. 그림 2에서 보듯이 테일러 시리즈 전개로 상수항을 가지고 있는 TSK 퍼지모델보다 상수항을 가지지않는 제안된 TSK 퍼지모델이 실제 비선형 미분방정식을 더욱 잘 묘사함을 알 수 있다. (Q.E.D.)

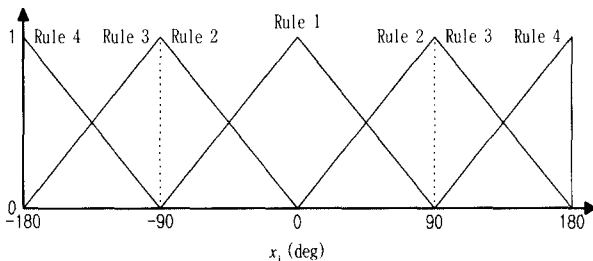


그림 2. 역도립진자를 위한 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수

Fig 2. The antecedent membership function for TSK fuzzy model of inverted pendulum

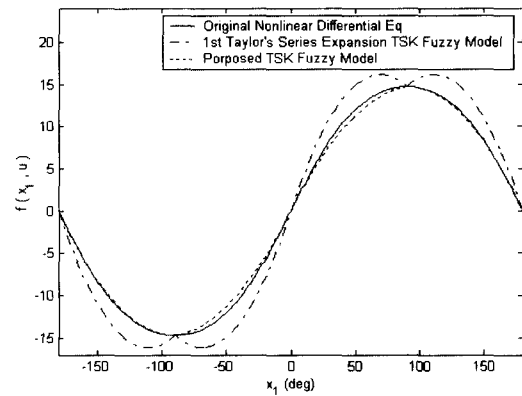


그림 3. 각 TSK 퍼지모델의 출력비교
Fig 3. Comparison of each TSK fuzzy model's output

3. 유전 알고리즘을과 퍼지를 이용한 TSK 퍼지모델의 최적화

본장에서는 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수의 형상을 유전 알고리즘을 이용하여 최적근사화함으로써 실제 동적시스템의 거동에 대하여 최적근사화시키는 방법을 제시한다. 또한 최적근사화된 다수의 TSK 퍼지모델들중에서 모델규칙으로 선정된 동작점에 최적근사화된 TSK 퍼지모델의 전건부들을 일반적인 퍼지이론을 이용하여 합성함으로써 보다 최적화된 TSK 퍼지모델을 도출하는 방법을 제시한다.

3.1 TSK 퍼지모델의 전건부 진화학습

먼저 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들이 최적화가 가능한 형상을 가질수 있도록 삼각형 퍼지함수를 그림 4와 같이 구성한다. 이때의 퍼지함수는 삼각형 퍼지함수 외에도 다수의 사용가능한 퍼지함수들을 선택할 수 있다.

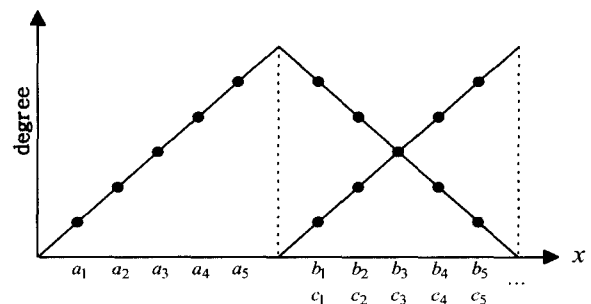


그림 4. GA를 위한 삼각형 퍼지함수
Fig 4. A triangle fuzzy membership function for GA tuning

본 논문에서는 그림 4와 같이 삼각형 퍼지함수의 꼭지점과 밑변의 끝점들은 TSK 퍼지모델의 규칙에서 설정된 동작점으로 고정되고, 삼각형 퍼지함수의 각변의 형상을 5개의 염색체들($a_1 \sim a_5, b_1 \sim b_5$)을 한조로 구성한다. 또, 다른 인접한 퍼지함수가 추가된다면 각변의 형상에 따른 5개의 염색체들($c_1 \sim c_5, d_1 \sim d_5$)가 추가될 것

이다. 이때 인접한 두 퍼지함수들의 염색체들인 $b_1 \sim b_5$ 와 $c_1 \sim c_5$ 는 공간 탐색시 동일한 공간에서 새로운 세대들을 형성하게 된다. 즉 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수의 개수에 따라 염색체의 개수가 결정되는 것이다. 이를 유전 알고리즘을 이용하여 동적시스템의 거동에 근사화되도록 최적화한다.

진화학습시의 평가함수는 동적시스템의 거동에 대하여 제어를 행하지않는 상태의 거동과 염색체들에 의하여 결정되어지는 TSK 퍼지모델의 거동을 비교함으로써 행해진다. 즉 동적시스템의 비선형 미분방정식에 따른 거동과 TSK 퍼지모델의 거동을 동적시스템의 거동영역 전반에 대하여 근사화되도록 학습을 진행시킨다.

3.2 진화학습된 TSK 퍼지모델의 융합

진화학습을 이용하여 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수를 실제 비선형 시스템의 거동에 대하여 최적근사화시 다양한 형태의 다수의 최적근사화모델을 구할 수 있다. 이는 유전 알고리즘의 특성상 단일 최적모델보다는 최적에 가까운 다수의 모델이 유도되기 때문이다. 즉 다양한 형태의 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들이 유도되어지는 것이다.

따라서 이러한 최적근사화된 다수의 TSK 퍼지모델들에 대하여 평가함수로 평가시, 가장 우월한 하나의 전건부 소속함수를 취하는 것이 아니라, TSK 퍼지모델 규칙에서 설정된 다수의 동작점에 대하여 최적근사화된 TSK 퍼지모델을 평가하여, 각각의 동작점에 대응하는 TSK 퍼지모델들을 규칙의 수만큼 선정하는 것이다.

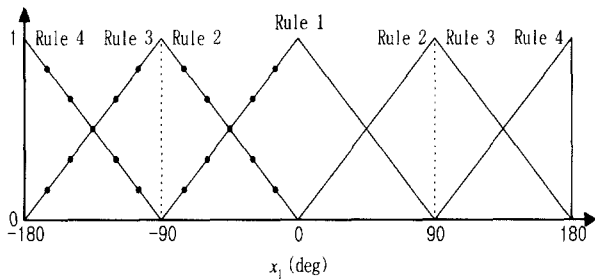
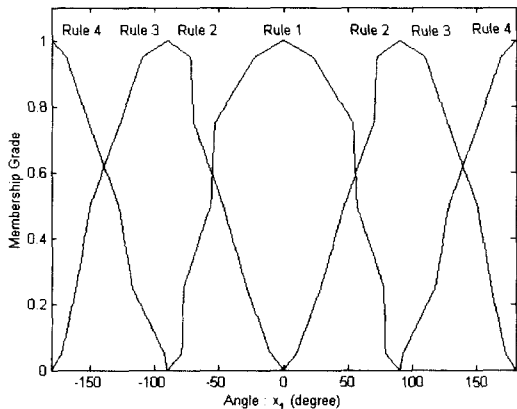
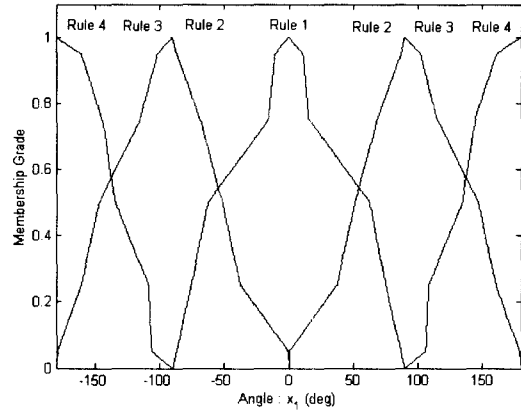


그림 5. TSK 퍼지모델의 초기 소속함수

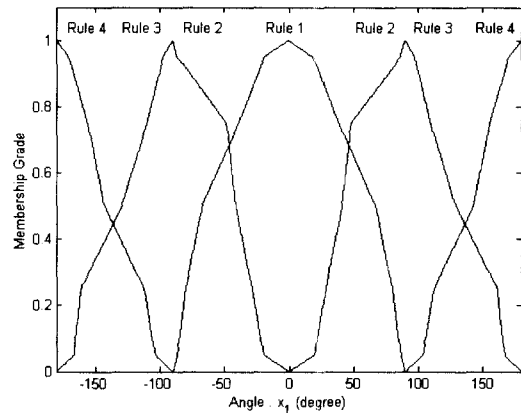
Fig 5. Initial membership function of TSK fuzzy model



(a) 동작점 10°에 최적근사화된 소속함수



(b) 동작점 45°에 최적근사화된 소속함수



(c) 동작점 80°에 최적근사화된 소속함수

그림 6. 각 동작점에 대하여 최적근사화된 소속함수
Fig 6. Sub optimal membership function at each operating point

이렇게 선정된 TSK 퍼지모델들은 각각의 전건부 소속함수들의 동작점을 입력변수로 하는 퍼지규칙을 구성한다. 즉 선정된 다수의 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수들을, TSK 퍼지모델 규칙에서 설정한 동작영역 또는 동작점에 대해서 합성된 TSK 퍼지모델을 도출하는 것이다. 이에 대한 자세한 내용은 4장의 시뮬레이션에서 살펴본다.

4. 시뮬레이션

본 장에서의 시뮬레이션 예제는 II장에서 제시한 역도립 진자시스템의 TSK 퍼지모델을 사용한다.

TSK 퍼지제어의 입력변수인 x_1 의 입력범위인 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 에 대해서 TSK 퍼지모델 규칙이 좌우대칭이므로, 그림 5에서 보는바와 같이 좌측 $-180^\circ \sim 0^\circ$ 사이의 소속함수가 가지는 각 변들의 형상 파라미터 20개에 대해서만 유전 알고리즘을 이용하여 최적근사화를 수행하였다. 이때 개체집단의 수는 50개로 하였으며, 돌연변이율은 0.05, 교차율은 0.4로 하여, 일반적인 진화학습을 수행하였다.

표 1. 여러가지 초기위치에 대한 각 모델별 성능평가
Table 1. Each model's fitness values at several initial position

초기위치 \ 퍼지모델	Wang Model	10° 최적근사화 Model	45° 최적근사화 Model	80° 최적근사화 Model	제안된 합성 Model
10°	225.4874	1.0854	15.3143	14.8282	1.0862
20°	249.4967	0.9659	6.0541	5.6952	3.1519
30°	217.0891	0.7162	0.7665	0.7713	0.7895
40°	170.3152	1.0517	0.9915	1.0504	0.8356
50°	124.1631	1.6052	1.0002	1.0546	1.0463
60°	85.4018	3.7003	2.3582	2.6587	2.5271
70°	56.0598	6.8912	1.0097	0.9516	0.9854
80°	35.8583	38.0235	2.4925	1.6035	1.6014
합계	1,128.0131	26.0159	72.4945	107.01	10.422

유전 알고리즘에 의해 생성된 각 세대의 평가는 역도립 진자시스템의 비선형 미분방정식과 제안된 TSK 퍼지모델에 대해서, 동적시스템에 제어입력이 가해지지 않은 상태에서의 각 시스템의 출력차를 최소화하는 것으로 한다. 이렇게해서 동작점 10°, 45°, 80°에 최적화된 TSK 퍼지모델의 전건부 소속함수의 예가 그림 6과 같다.

본 시뮬레이션에서는 역도립진자시스템의 동작점을 10°, 45°, 80°에 최적근사화시킨 3가지의 TSK 퍼지모델을 유전 알고리즘을 이용하여 도출하였다. 이를 다음의 퍼지규칙을 이용하여 동적시스템의 모든 동작영역에 대해서 최적근사화된 TSK 퍼지모델을 도출하였으며, 이때 사용된 전건부 소속함수는 그림 7과 같다.

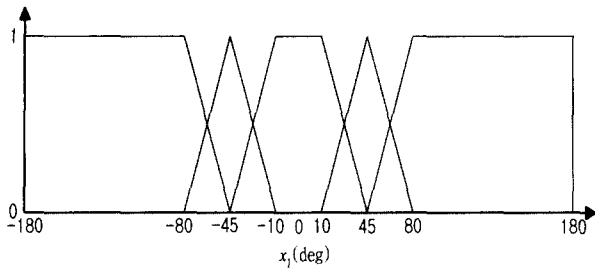


그림 7. TSK 퍼지모델의 합성을 위한 전건부 소속함수
Fig 7. Antecedent membership function for TSK fuzzy model blending

- Rule 1: If x_1 is -80° , Then Model 3
- Rule 2: If x_1 is -45° , Then Model 2
- Rule 3: If x_1 is -10° , Then Model 1
- Rule 4: If x_1 is 10° , Then Model 1
- Rule 5: If x_1 is 45° , Then Model 2
- Rule 6: If x_1 is 80° , Then Model 3

이상의 제안된 TSK 퍼지모델의 대하여 Wang 등이 제안한 TSK 퍼지모델과의 제어입력이 없는 상태에서의 각 초기위치에 대한 거동을 비교한 것이 표 1과 같다. 표 1은 실제 역도립진자시스템의 비선형 미분방정식의 거동과 각각의 TSK 퍼지모델의 거동을 여러 가지 초기위치에 대하여 거동의 차에 따른 RMS값을 비교한 것으로, 전 초기동작영역에 대해서 본 논문에서 제안된 TSK 퍼지모델이 실제의 시스템을 잘 묘사함을 보여주고 있다.

이는 표 1에서도 보여주듯이 각각의 TSK 퍼지모델을

비교해 볼 때 10° 최적 근사화 모델이 10°, 20°, 30°에서 가장 나은 성능을 보여주고 있으며, 45° 최적근사화 모델은 40°, 50°, 60°에서, 80° 최적근사화 모델은 70°, 80°에서 가장 나은 성능을 보여주고 있다. 따라서 이 3개의 모델들은 퍼지 규칙을 이용해 합성한 최종 모델의 성능지수는 다른 TSK 퍼지모델에 비해서 월등히 개선됨을 볼 수 있다.

또한 그림 8에서는 초기동작점 10°에서 제어입력이 없는 상태의 각각의 시스템 거동을 비교한 것으로 실제 시스템의 거동을 거의 정확히 묘사함을 볼 수 있다.

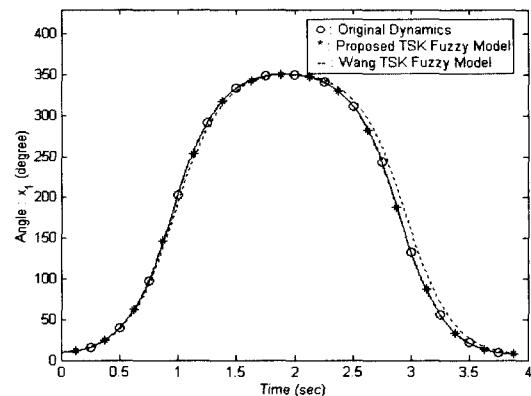


그림 8. 초기위치 10°에 대한 각 TSK 퍼지모델의 거동비교
Fig 8. Comparison of each TSK fuzzy model's behavior at initial position 10°

5. 결론

이상에서 본논문은 비선형 시스템의 모델링을 위해 널리 사용되고 있는 TSK 퍼지모델링에 대하여 새로운 기법을 제시하였다.

동적시스템의 비선형 미분방정식을 TSK 퍼지모델화 시, 평형점에서는 테일러 시리즈 1차 전개를 통하여 상수항이 존재하지 않는 TSK 퍼지모델을 취하고, 비평형점에서는 비선형 미분방정식을 선형부분과 비선형부분으로 나눔으로써 역시 상수항이 존재하지 않는 TSK 퍼지모델을 취하였다.

또한 TSK 퍼지모델의 후건부뿐만 아니라 전건부의 소속함수의 형상을 유전 알고리즘을 이용하여 최적근사화하고, 유전 알고리즘을 이용하여 최적근사화된 다수의 TSK 퍼지모델들을 퍼지규칙을 이용하여 합성함으로써, 실제 동적시스템의 거동에 보다 최적근사화된 모델을 구할 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] Takagi, T. and Sugeno, M., "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern.*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985
- [2] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "An Analytical Framework of Fuzzy Modeling and Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues," *Proc. American Control Conf.*, Seattle, Washington, pp. 2272-2276, 1995
- [3] J. Joh, R. Langari, and W. J. Chng, "A New Design Method for Continuous Takagi-Sugeno Fuzzy Controller with Pole Placement Constraints: An LMI Approach," *Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics*, Orlando, Florida, pp. 2969-2974, 1997

- [4] J. Joh, S. K. Hong, Y. Nam, and W. J. Chung, "On the Systematic Design of Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems," *Proc. Int. Symp. on Engineering of Intelligent Systems/EIS'98*, Tenerife, Spain, pp. 113-119, 1998
- [5] Johansen TA, Shorten R, and Murray-Smith R, "On the Interpretation and Identification of Dynamic Takagi-Sugeno Fuzzy Models," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 8 no. 3, pp. 297-313, 2000

저 자 소 개

조중선 (Joong-Seon Joh)

제 9권 3호 참조

이상민 (Sang-Min Lee)

제 9권 6호 참조