한국 CAD/CAM 학회 논문집
제6권 제1호 2001년 3월 pp. 24-30

학술논문

점 집합의 보로노이 다이어그램을 이용한 원 집합의 보로노이 다이어그램의 계산: I. 위상학적 측면

김동욱*, 김덕수**, 조동수*, Kokichi Sugihara***

The Computation of the Voronoi Diagram of a Circle Set Using the Voronoi Diagram of a Point Set: I. Topology

Kim, D.*, Kim, D. S.**, Cho, D.* and Sugihara, K.***

ABSTRACT

An efficient and robust algorithm to compute the exact Voronoi diagram of a circle set is presented. The circles are located in a two dimensional Euclidean space, the radii of the circles are non-negative and not necessarily equal, and the circles are allowed to intersect each other. The idea of the algorithm is to use the topology of the point set Voronoi diagram as a seed so that the correct topology of the circle set Voronoi diagram can be obtained through a number of edge flipping operations. Then, the geometries of the Voronoi edges of the circle set Voronoi diagram are computed. In particular, this paper discusses the topological aspect of the algorithm, and the following paper discusses the geometrical aspect. The main advantages of the proposed algorithm are in its robustness, speed, and the simplicity in its concept as well as implementation. Since the algorithm is based on the result of the point set Voronoi diagram and the flipping operation is the only topological operation, the algorithm is always as stable as the Voronoi diagram construction algorithm of a point set.

Key words : Circle set voronoi diagram, Circumcircle, Edge flipping

1. 서 론

유클리드 평면에 서로 다른 반지름의 원들이 있다. 한 원이 다른 원을 완전히 포함하지 않는 한 원들의 교차는 허용한다. 이러한 원 집합이 주어졌을 때, 평면상의 모든 영역을 원 집합의 가장 거리가 가까운 원소에 할당한다. 그리하여 각 원에 할당된 영역을 보로노이 영역이라 부른다. 그리고 이러한 영역은 평면의 tessellation을 이루며, 이를 원 집합의 보로노이 다이어그램이라 한다.

*학생회원, 한양대학교 산업공학과
**종신회원, 한양대학교 산업공학과
***University of Tokyo, Department of Mathematical Engineering and Information Physics
- 논문투고일: 2000. 11. 8
- 심사완료일: 2000. 12. 26

보로노이 다이어그램은 기하 요소의 근접성과 관련된 문제와(proximity problems) 직접적인 연관이 있으며, CAD/CAM 분야에서는NC 공작기계의 공구 경로를 구하는 문제등에 이용된다[6].

이 논문과 다음의 논문에서는 원 집합의 보로노이 다이어그램을 구하는 알고리듬을 제시하였다. 제시한 알고리듬의 기본 개념은 점 집합의 보로노이 다이어그램을 원 집합의 보로노이 다이어그램으로 변환하는 것이다. 이 논문에서는 위상 부분을 다루며, 다음의 논문에서는 기하 부분을 다룬다[7].

이 문제와 관련하여 다음의 연구가 진행되어왔다. Lee와 Drysdale은, n을 원들의 개수로 두고 c를 상수라 할 때, 계산량이 $O(n\log^2 n)$인 교차하지 않는 원들의 보로노이 다이어그램 알고리듬을 제시하였다[8]. 그들은 또한 $O(nc\sqrt{\log n})$에 실행되는 알고리듬을 제시하였다[1,2]. Sharir는 서로 교차하는 원들도 허용하

는 알고리듬을 제시하였다[12]. Gavrilova와 Rokne는 원들이 움직이는 경우에 올바른 자료 구조를 유지하도록 하는 알고리듬을 제시하였다[3]. 여기까지 정확한(exact) 보로노이 다이어그램을 구하는 알고리듬인 것과는 달리, Sugihara는 근사 알고리듬을 제시하였다[14]. 그는 원 집합의 각 원을 그 원 위의 점들로 근사화 한 후, 점 집합의 보로노이 다이어그램을 구하고 불필요한 모서리들을 제거함으로써 보로노이 다이어그램을 근사하였다. 제시한 알고리듬의 장점은 단순하다는 것과 제너레이터의 형태에 구애를 받지 않는다는 점에 있다. 그리고 이러한 접근은[13]와 같은 안정성이 높고 실행 속도가 빠른 알고리듬이 존재할 경우에만 가능하다. Hamann과 Tsai는 또 다른 근사 알고리듬을 제시하였다[4]. 그들은 보로노이 다이어그램을 trimmed NURBS 곡면의 표현에 이용하였다.

이 논문과 다음의 논문에서는 원 집합의 보로노이 다이어그램을 빠르고, 효율적이고 안정성이 높게 생성하는 알고리듬을 제시하였다. 제시한 알고리듬의 기본 개념은 다음과 같다. 먼저, 원 집합의 원들의 중점에 대한 보로노이 다이어그램을 생성한다. 그 다음으로, 위에서 생성한 점 집합의 보로노이 다이어그램의 위상을 초기해로 해서 원 집합의 보로노이 다이어그램의 올바른 위상을 가질 수 있도록 일련의 모서리 플립 연산을 통하여 수정한다. 마지막으로, 원들의 반지름과 위상 정보를 이용하여 원하는 보로노이 다이어그램의 기하 정보를 생성한다.

이러한 접근의 장점은 여러 가지가 있다. 첫째, 제안한 알고리듬은 점 집합의 보로노이 다이어그램의 위상을 초기해로 하여 모서리의 플립 연산만을 수행하기 때문에 점 집합의 보로노이 다이어그램을 생성하는 안정성 만큼 수치적으로 안정하다. 둘째, 제시한 알고리듬은 빠르다. 비록 알고리듬의 최악의 경우 계산량이 $O(n^2)$로 나타났지만, 실험적인 속도는 점 집합의 보로노이 다이어그램을 계산하는 속도와 대등하기 때문에 수행 속도가 빠르다고 할 수 있다. 실험을 통한 실행 시간은 강한 선형의 관계가 나타나는 것을 관찰할 수 있었다. 이러한 결과는 최악의 상황이 이론상으론 가능하나 실제 상황에서 나타나기 매우 어렵다는 것을 반영한다. 셋째, 제시한 알고리듬은 기본 개념 뿐만 아니라 구현에 있어서도 매우 간단하다.

Fig. 1에 나타낸 것은 점 집합 과 원 집합의 보로노이 다이어그램이다. 점선으로 나타나 있는 도형은 점 $\mathbf{p}_i$가 원 $\mathbf{c}_i$의 중심일 때 점집합 $\{\mathbf{p}_i|i=1,2,...,n\}$의 보로노이 다이어그램이고, 실선으로 그려진 도형은

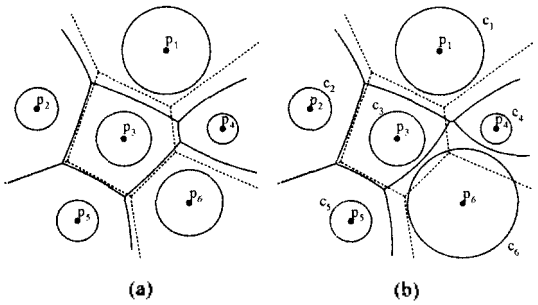


Fig. 1. Point set voronoi diagrams (dotted line) and circle set Voronoi diagrams (solid line).

원 집합 $\{\mathbf{c}_i|i=1,2,...,n\}$의 보로노이 다이어그램이다. Fig. 1(a)를 통해 이 두 보로노이 다이어그램의 모습이 꼭지점의 위치 등의 기하요소를 제외한다면 매우 유사하다는 것을 알 수 있다. 특히, 이 예제에서의 두 보로노 다이어그램의 위상은 동일하다. 그러나 항상 이러한 현상이 발생하는 것은 아니다. 만약 Fig. 1(a)의 원 $\mathbf{c}_6$의 반지름을 늘려서 Fig. 1(b)와 같이 되었다면, 그 결과로 형성된 원 집합의 보로노이 다이어그램의 위상은 점 집합과는 서로 달라진다. 그러나, 위상의 변화는 국부적으로 일어나며, 위 예제의 경우 점 집합 보로노이 다이어그램의 하나의 모서리를 플립하면 원하는 원 집합 보로노이 다이어그램의 올바른 위상을 되찾을 수 있을 것이다. 이러한 간단한 모서리 플립 연산을 여러 번 적용함으로써 복잡한 경우의 문제도 풀 수 있는 것으로 판명 되었다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어있다. 2절에서는 알고리듬을 표현하기 위한 몇 가지 정의 및 가정을 제시하였고, 3절에서는 모서리 플립 조건을 자세히 다루었다. 4절에서는 원의 형태에 의해서 나타나는 몇 가지 특수 상황을 처리하였고, 결론을 제시하였다. 본 저자는 알고리듬을 구현하고 몇 가지 실험도 하였지만 그 결과는 본 논문에서는 제시하지 않았고, 다음의 논문에서 제시하였다[7].

2. 용 어

설명의 편의를 위해, 몇몇의 용어와 기호가 제시되었다. $\mathbf{c}_i=(\mathbf{p}_i, r_i)$는 중심이 $\mathbf{p}_i$이고 반지름이 $r_i \geq 0$인 원을 나타낸다. 만약 원은 반지름이 0일 경우 점이 될 수도 있다. $\mathbf{C}=\{\mathbf{c}_i|i=1,2,...n\}$는 원 집합을 나타내며, $\mathbf{P}=\{\mathbf{p}_i|i=1,2,...n\}$는 원의 중점의 집합을 나타낸다. VD(P)와 VD(C)는 각각 P와 C의 보로노이 다이어그램을 나타낸다. CH(A)는 집합 A의 convex hull

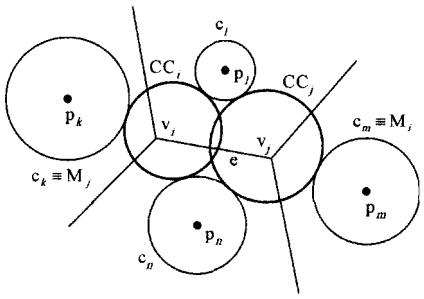


Fig. 2. Circumcircles and mating generator circles.

을 나타낸다. 거리는 L_2-metric을 적용하였다. 설명의 편의상 모서리와 꼭지점은 특별한 언급이 없는 한 보로노이 모서리, 보로노이 꼭지점을 말한다.

Fig. 2의 CC_i는 보로노이 꼭지점 v_i에 상응하는 세 개의 원들에 동시에 외접하는 원을 나타낸다. 모서리 e는 꼭지점 v_i와 v_j로 구성되어있고 각각 그에 상응하는 외접원 CC_i와 CC_j가 존재한다. 만약 모서리 e를 고려한다면, 원 c_m을 CC_i의 상대원(mating circle)이라 부르 고 M_i라 나타낸다.

모서리 e'은 VD(P)로부터 VD(C)를 구하는 과정에서 모서리 e가 플립되었다는 것을 나타낸다.

이 논문에서는 입력 데이터에 대한 두 개의 가정을 세웠다. 첫째 가정은 *non-degenerate point set assumption*이라 부르는데 VD(P)의 꼭지점의 차수가 항상 3이라는 것을 의미한다. 두 번째 가정은 non-degenerate circle set assumption이라 부르며, VD(C)의 꼭지점의 차수는 항상 3이라는 것을 의미한다. 이들 가정들은 알고리듬 설명의 편의상 세웠으며, 이들을 일반화 하는 것은 그리 어렵지는 않다.

또한, [13]에 제시된 것 과 같은 점 집합의 보로노이 다이어그램을 구하는 안정된 코드가 존재한다는 것도 가정하였다. 이를 이용하여 VD(P)는 효율적이고 안정하게 구할 수 있다. 실제 알고리듬의 구현에 사용된 코드는 이 논문의 저자 중 한 명인 Sugihara의 홈페이지에서 구할 수 있다[15].

3. 위상의 변화

VD(P)로부터 VD(C)의 올바른 위상 구조를 가지기 위해서, 특정 모서리 하나의 플립 여부를 판단 하여야 한다. 모서리의 상태에 따라서, i) 외접원이 양쪽 꼭지점에서 동시에 존재하는 경우, ii) 외접원이 하나의 꼭지점에서만 존재하는 경우, iii) 외접원이 존재하지 않는 경우의 세 가지로 나뉜다. 각각의 경우에 따라 서로 다른 연산을 취해야 한다.

3.1 외접원이 양쪽 꼭지점에서 동시에 존재하는 경우

이 경우는 점 집합과 원 집합의 형태에 따라 다시 다음의 세 가지 경우로 나누어진다: i) 두 외접원이 동시에 상대원과 교차하거나 교차하지 않는 경우, ii) 하나의 외접원만 상대원과 교차하는 경우, iii) 두 외접원 모두 상대원과 교차하지 않는 경우.

3.1.1 두 외접원이 동시에 상대원과 교차하거나 교차하지 않는 경우

Fig. 3(a)와 3(b)에서의 점 집합은 동일하며, 서로 다른 반지름을 가진다. Fig. 3(a)와 3(b)에서 점선으로 표시된 모서리 e_1은 VD(P)에서 두 꼭지점 v_1과 v_2를 가진다. 꼭지점 v_1은 그에 대응하는 세 개의 점 p_1, p_2, p_4를 가지며, 꼭지점 v_2는 대응하는 세 개의 점 p_3, p_4, p_2를 가진다. 참고로 이와 같은 정보는 VD(P)의 꼭지점들의 위상 정보를 통해 알 수 있다. 주어진 세 원에 대한 외접원을 구하는 효율적인 알고리듬에 대해서는 다음의 논문에서 다루었다[7]. CC_1이 꼭지점 v_1에서 세 원 c_1, c_2, c_4의 외접원이라고 하자. VD(P)에서 꼭지점 v1의 정의로부터 CC_1은 세 원 c_1, c_2, c_4로부터 구해져야 된다는 것을 알 수 있다. 이와 마찬가지로, 꼭지점 v_2에서의 CC_2 역시 세 원 c_3, c_4, c_2의 외접원이다. 그리고 c_3와 c_1은 각각 CC_1과 CC_2의 상대원이고 기호로 각각 M_1과 M_2로 나타낸다.

Fig. 3(a)에서, $CC_1 \cap M_1 = \phi$이다. 이는 CC_1의 중심점은 상대원 $M_1 \equiv c_3$ 보다 세 원 c_1, c_2, c_4에 더 가까이 있다는 것을 의미한다. 이와 비슷하게, $CC_2 \cap M_2 = \phi$은 CC_2의 중심점이 $M_2 \equiv c_1$ 보다 세 원 c_3, c_4, c_2에 더 가까이 있다는 것을 의미한다. 원들의 중심인 점 집합 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 보로노이 다이어그램의 위상도 이러한 특성을 가지므로, VD(C)의 위

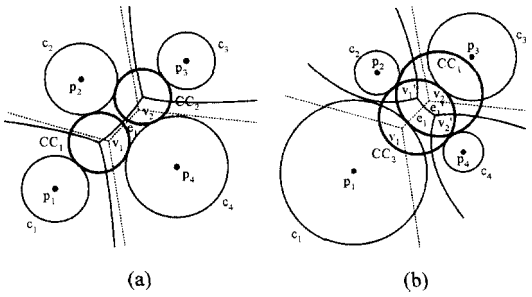


Fig. 3. Two circumcircles exist, (a) both circumcircles do intersect with mating circles, (b) both circumcircles do not intersect with mating circles.

상은 VD(P)의 위상과 같아지게 된다. 그러므로, 이러한 경우에 VD(C)의 위상은 VD(P)의 위상을 아무런 수정이 없이 곧바로 이용하게 된다. 그리하여 꼭지점과 모서리의 기하 정보를 구하는 것만이 남아있다. 참고로 꼭지점의 기하 정보는 외접원의 중심점에 해당하고, 모서리의 기하정보는 선분 또는 쌍곡선에 해당한다[5-7].

반면에, Fig. 3(b)의 CC_1과 CC_2 모두 각각 그들의 상대원인 c_3와 c_1과 교차한다. 보로노이 꼭지점의 중요한 특성 중 하나는 그들은 상응하는 세 개의 제너레이터를 가지며 꼭지점의 좌표에서 위의 세 제너레이터들은 가장 가까운 제너레이터라는 것이다. CC_1이 그들의 상대원인 c_3와 교차한다는 것은 CC_1의 중심점과 꼭지점에서의 세 원인 c_1, c_2, c_4사이의 거리보다 상대원 c_3상에서 더 가까운 점이 존재한다는 것이다. 이는 VD(P)에서 주어진 꼭지점 v_1이 VD(C)에서는 더 이상 존재하지 못한다는 것을 의미한다. 이와 마찬가지로, 꼭지점 v_2 역시 CC_2와 c_1이 교차하므로 더 이상 VD(C)의 원소로서 존재하지 못한다. 그러므로 VD(P)에서 위상요소의 한 부분이었던 모서리 e_1은 양 꼭지점이 모두 위상 요소에서 사라졌기 때문에 VD(C)에서는 더 이상 존재하지 않는다. 이와 동시에, Fig. 3(b)에서 보여지듯이 c_1, c_2, c_3는 새로운 꼭지점 v_1'를 정의하고, c_1, c_4, c_3는 또 다른 꼭지점 v_2'을 정의한다. 그리고 v_1'과 v_2'은 새로운 모서리 e_1'을 정의한다. 그리하여, 새로운 모서리 e_1'이 새로 나타나게 되고, 이전의 모서리 e_1은 사라지며, 이러한 현상을 모서리 플립이라 부른다.

3.1.2 하나의 외접원만 상대원과 교차하는 경우

비록 모서리의 양 꼭지점 모두에서 외접원이 존재한다고 할지라도, 하나의 외접원은 상대원과 교차하고 또 하나의 외접원은 상대원과 교차하지 않을 수도 있다(Fig. 5(b) 참고). 이러한 경우에 대상 모서리는 아래의 설명으로 볼 때 플립되지 않는다. 꼭지점 v_1과 v_2에 각각 외접원 CC_1과 CC_2가 존재한다고 가정하자. 그리고 $CC_1 \cap M_1 = \phi$이고 $CC_2 \cap M_2 = \phi$이라고 하자. 그러면 꼭지점 v_1은 현재 상태로는 VD(C)에서 더 이상 존재할 수 없으며 올바른 정보로 바뀌어야 할 것이다. 이에 반하여 꼭지점 v_2는 $CC_2 \cap M_2 = \phi$ 이므로 VD(C)에서도 그대로 남아있게 된다. 이러한 이유로 현재의 대상 모서리는 곧바로 플립되지 않고, 다음 단계에서 꼭지점 v_1에 인접한 다른 모서리가 플립됨으로써 올바른 정보를 가지게 된다. 그리하여 꼭지점 v_1의 위상은 올바른 정보를 가지게 되고, 꼭지점 v_2의 위상은 이전의 상태로 그대로 남아있게 된다.

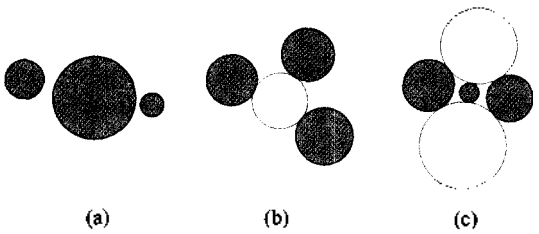


Fig. 4. Circumcircles for three generator circles.

점 집합의 보로노이 다이어그램과는 달리, 원 집합의 보로노이 다이어그램은 boundary가 오직 두 개의 모서리만으로 구성된 면이 존재할 수 있다. 이러한 면을 two-edge 면이라 부른다.

Fig. 4에서, 어두운 색의 원은 제너레이터 원이고, 색이 없는 원은 제너레이터 원의 외접원을 나타낸다. Fig. 4(a)는 외접원이 존재하지 않는 경우이며, Fig. 4(b)는 정확히 하나의 외접원만이 존재하는 경우를 나타낸다. 그러나, Fig. 4(c)에서는 세 개의 제너레이터들에 대해 두 개의 외접원이 존재하는 경우를 보여주고 있다. 만약 양 꼭지점으로 v_1과 v_2를 가지는 어느 한 모서리의플립 여부를 고려한다고 가정하고, v_1과 v_2에서 외접원이 각각 Fig. 4(c)와 Fig. 4(b)의 상황이라고 하자. 그리고 꼭지점 v_1에서의 두 외접원을 CC_1'과 CC_1"이라 하고, 꼭지점 v_2에서의 외접원을 CC_2라고 하자. 그러면, 위 에 설명한 two-edge 면은 다음의 조건을 동시에 만족할 경우에 생성되어진다.

- 꼭지점 v_i에서 두 개의 외접원 CC_i'과 CC_i"가 존재한다.
- CC_i'과 CC_i"는 그들의 상대원과는 교차하지 않는다.
- 나머지 꼭지점 v_j에서의 외접원 CC_j는 상대 제너레이터와 교차하지 않는다.

위의 관찰은 다음의 예제로써 설명 할 수 있다. Fig. 5(a)의 점선은 VD(P)와 외접원들을 나타낸다. 모서리 e_2가 플립의 여부를 판단하기 위해 선택되었다고 가정하자. 양 꼭지점에서의 외접원 모두가 그들의 상대원과 교차하므로, 모서리 e_2는 e_2'으로 플립된다. 그 결과는 Fig. 5(b)에 나타나 있다.

그리고 나서, 모서리 e_3가 대상 모서리로 선택되었다고 가정하자. 모서리 e_3는 그와 관련된 네 개의 제너레이터 c_1, p_5, p_4, c_3를 가진다. 또한, 두 점 p_4와 p_5는 반지름이 0인 원이다. Fig. 5(b)는 세 제너레이터 c_1, p_5, c_3사이에 두 개의 외접원 CC_i'과 CC_i"이

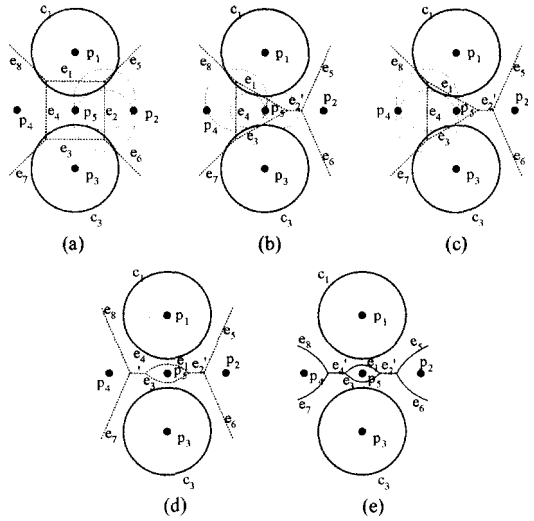


Fig. 5. The sequence for generating a two-edge face.

존재하고 있다는 것을 보여준다. 이들 두 외접원은 그들의 상대원인 p_4와 교차하지 않는다(즉, $CC_i' \cap M_i = \phi$, $CC_i'' \cap M_i = \phi$). 그리하여, 모서리는 플립되지 않는다. CC_i'이 모서리 e_3의 꼭지점 v_1와 연관되어 있다고 하자. 이제, 또다른 외접원 CC_i'이 있다는 것은 이 외접원에 상응하는 또 하나의 꼭지점이 반듯이 존재한다는 것을 의미한다. 꼭지점 v_1로부터 왼쪽으로 두 개의 모서리가 뻗어나가고 있기 때문에 이 두 모서리는 새로운 꼭지점에서 만나게 될 것이다. 그래서, 이고 이면 v_1는 two-edge 면을 이루는 하나의 꼭지점 된다. 반면에, 세 제너레이터 c_3, p_5, p_4의 외접원은 상대 제너레이터인 c_1과 교차한다.

그렇기 때문에, 꼭지점 e_3가 two-edge 면을 이루는 하나의 모서리가 된다고 말할 수 있다. 제시한 예에서는 p_5는 모서리 e_4가 플립된 후 e_1과 e_3로 two-edge 면을 생성한다. Fig. 5(c)는 두 외접원이 모두 상대 제너레이터와 교차하기 때문에 e_4가 플립 된다는 것을 보여준다. Fig. 5(d)는 그 결과를 보여준다. Fig. 5(e)에서는 기하 정보가 수정된 모습을 보여주고 있다.

3.2 외접원이 하나의 꼭지점에서만 존재하는 경우

점 집합과 원 집합이 놓여있는 형태에 따라, 모서리의 하나의 꼭지점에서만 외접원이 형성되는 경우도 발생한다. 이 경우는 다시 외접원이 교차하는 경우와 교차하지 않는 두 개의 경우로 나누어진다.

3.2.1 외접원이 상대원과 교차하는 경우

Fig. 6은 오직 하나의 꼭지점 v_2에서만 외접원이

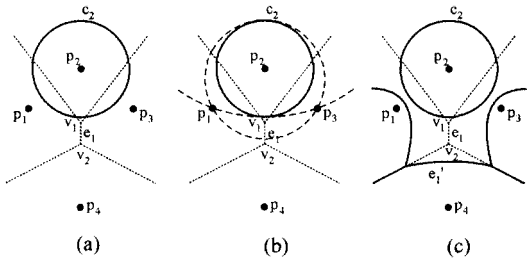


Fig. 6. A case in which only one circumcircle exists and the existing circumcircle intersects with the mating generator.

존재하는 경우를 보여주고 있다. Fig. 6(b)는 꼭지점 v_1에서는 외접원이 존재하지 않는다는 것을 보여준다. Fig. 6(b)의 점선으로 표현된 원은 원 c_2를 내접하고 있다. 외접원이 존재하지 않는다는 것은 그에 해당하는 꼭지점이 사라지게 된다는 것을 의미한다.

이와는 다르게, 꼭지점 v_2에서의 외접원은 존재하며 세 점 p_1, p_3, p_4를 지난다. 그리고 그의 상대원인 c_2와 교차한다. 이러한 현상이 발생할 경우, 모서리 e_1은 e_1'으로 플립된다.

3.2.2 외접원이 상대원과 교차하지 않는 경우

하나의 외접원이 존재할 지라도, 그 외접원이 그의 상대원과 교차하지 않을 수도 있다. 이러한 경우에 모서리가 플립되어서는 않된다. Fig. 7에서 CC_2는 존재하지만 상대 제너레이터인 p_4와 교차하지 않는다. 그리고 대상 모서리와 꼭지점의 위상은 현재 상태에서는 그대로 남아있게 된다.

3.3 외접원이 존재하지 않는 경우

Fig. 8에서와 같이 하나의 모서리에 대해 외접원이 나타나지 않는 경우도 존재한다. 두 원 c_2과 c_3가 있고, 두 점 p_1과 p_4가 Fig. 8(a)에서와 같이 두 접선

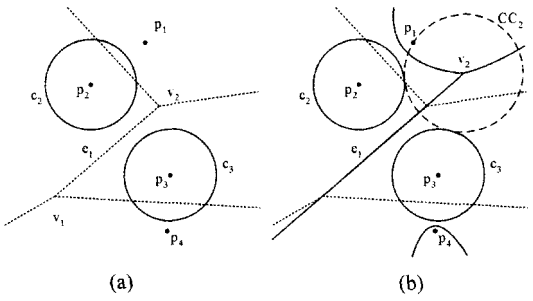


Fig. 7. CC_2 exists but does not intersect with its mating generator.

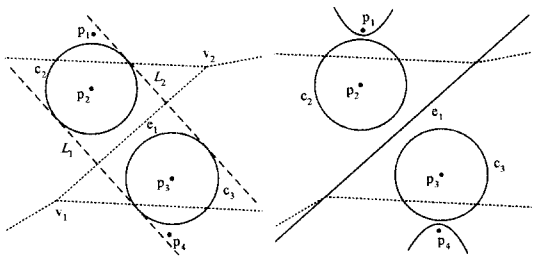


Fig. 8. No circumcircle exists.

L_1, L_2 사이에 존재한다고 가정하자. 모서리 $\mathbf{e}_1$이 대상 모서리이고, 두 꼭지점 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$가 존재한다. 이러한 경우에 양 꼭지점 모두에서 와접원이 존재하지 않게 된다. 그리고 이 경우의 모서리는 플립되지 않는다.

4. CONVEX HULL로 인한 특수한 경우들

VD(P)에서 VD(C)로의 위상 변화를 각 제너레이터 원의 반지름의 연속적으로 증가로 보자. 그러면, 원의 반지름이 증가하는 도중에 모서리 플립이 일어날 것이다. 플립 연산은 만약 제너레이터들이 CH(P) 내에 계속 존재한다면 위상 요소 중 모서리나 꼭지점의 개수를 변화시키지 않는다.

원의 반지름이 증가함에 따라 몇 가지 흥미있는 문제들이 발생한다. VD(P)의 모서리와 꼭지점이 때때로 없어지기도 할 것이고, VD(P)에 없던 새로운 모서리와 꼭지점이 어떠한 조건에 따라서 새로 생성되기도 할 것이다. 이러한 경우들은 원 집합과 점 집합의 convex hull의 관계와 밀접한 연관이 있다.

점 집합의 보로노이 다이어그램과 같이, 원 $\mathbf{c}_i$의 보로노이 영역도 이면 무한의 영역을 가진다. 이와 동시에 $\mathbf{c}_i \cap \partial CH(C) \neq \phi$ 내부의 원들은 언제나 닫힌 영역을 가진다. 만약 CH(P)와 CH(C) 경계로서 서로 다른 제너레이터를 가진다면, 양 보로노이 다이어그램은 서로 다른 무한 및 유한 영역을 가지게 된다. 이러한 과정은 위상 요소의 개수의 차이를 가져오기도 한다.

CH(P) 경계에 있던 한 점이 CH(C)의 내부에 존재하게 되었다고 가정하면, 하나의 무한 보로노이 영역이 유한 영역으로 바뀔 것이다. 이것은 모서리와 꼭지점의 개수를 하나씩 증가시킨다. 반대의 경우, 즉, CH(P)내부에 있던 점이 원이 되면서 CH(C)의 내부에 위치하게 되면, 유한 영역은 무한 영역이 되며, 꼭지점과 모서리 각각의 개수가 하나씩 줄어들게 된다. 만약 CH(P)와 CH(C)를 구성하는 제너레이터의 요소가 같다면, 양 다이어그램 사이의 위상 요소의 개수는 변하지 않는다.

5. 결 론

이 논문에서는 점 집합의 보로노이 다이어그램으로부터 원 집합의 보로노이 다이어그램을 구하는 알고리듬을 제시하였다. 특히 이 논문에서는 위상 부분을 중심으로 다루었다. 원들이 유클리드 평면에 위치해 있고, 원들의 반지름은 같을 필요가 없으며, 원들의 교차는 허용한다. 비록 최악의 경우 계산량은 $O(n^2)$이지만, 제시한 알고리듬은 빠르고 정확한 결과를 도출하며, 안정적이다.

제시한 알고리듬은 점 집합의 보로노이 다이어그램을 초기 해로 두었고, 원 집합의 보로노이 다이어그램의 정확한 위상을 찾아 나갔다. 점 집합의 보로노이 다이어그램의 각 모서리를 선택하여 검사한 후, 필요할 경우 모서리 플립 연산을 수행하고 그렇지 않을 경우는 그대로 둔다.

제시한 알고리듬의 장점은 안정적이다라는 것과 개념적으로 간단하다는 것에 있다. 제시한 알고리듬은 점 집합 보로노이 다이어그램의 위상을 이용하고 플립 연산만을 수행하였으므로 점 집합 보로노이 다이어그램을 구하는 안정성 만큼 안정하다고 볼 수 있다.

원 집합 보로노이 다이어그램의 정확한 위상을 구하고 난 후, 그 정보로부터 기하 요소들을 수정해 나간다. 기하 요소 수정에 대해서는 다음의 논문에서 중심으로 다루겠다[7].

선분 및 원호가 포함된 폴리곤의 보로노이 다이어그램을 계산하는 안정적이고 수행 속도가 빠른 알고리듬을 구하기는 어려운 것으로 알려져 있다. 우리는 이와 같은 접근을 통해 일반화된 보로노이 다이어그램을 계산하는 안정적이고 빠른 알고리듬을 개발할 수 있을 것이라 기대하고 있다.

감사의 글

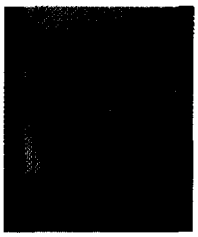
본 연구는 정보통신부의 2000년도 "대학기초연구지원사업" 지원으로 수행되었으며 지원에 감사 드립니다. 또한 본 논문을 성실하게 심사해 주신 심사 위원님들께 감사 드립니다.

참고문헌

1. Drysdale, R. L. and Lee, D. T., Generalized Voronoi diagram in the plane, *Proceedings of the 16th Annual Allerton Conference on Communications, Control and Computing*, pp. 833-842, 1978.
2. Drysdale, R. L., Generalized Voronoi diagrams and geometric searching, Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Tech. Rep. STAN-CS-79-705, Stanford University, 1979.
3. Gavrilova, M. and Rokne, J., Swap conditions for dynamic Voronoi diagram for circles and line segments, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 16, pp. 89-106, 1999.
4. Hamann, B. and Tsai, P.-Y., A tessellation algorithm for the representation of trimmed NURBS surfaces with arbitrary trimming curves, *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No.(6/7), pp. 461-472, 1996.
5. Kim, D.-S., Hwang, I.-K. and Park, B.-J., Representing the Voronoi diagram of a simple polygon using rational quadratic Bézier curves, *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 8, pp. 605-614, 1995.
6. Kim, D.-S., Polygon offsetting using a Voronoi diagram and two stacks, *Computer-Aided Design*, Vol. 30, No. 14, pp. 1069-1076, 1998.
7. 김동욱, 김덕수, 조동수, Sugihara, K., "집합의 보로노이 다이어그램과 원 집합의 보로노이 다이어그램의 관계: II. 기하학적 측면", (submitted to 한국 CAD/CAM 학회 논문집).
8. Lee, D. T. and Drysdale, R. L., Generalization of Voronoi diagrams in the plane, *SIAM J. COMPUT.*, Vol. 10, No. 1, pp. 73-87, 1981.
9. Mäntylä, M., *An introduction to solid modeling*, Computer Science Press, Rockville, 1988.
10. Okabe, A., Boots, B. and Sugihara, K., Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagram, John Wiley & Sons, Chichester, 1992.
11. Preparata, F.P. and Shamos, M.I., *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1985.
12. Sharir, M., Intersection and closest-pair problems for a set of planar discs, *SIAM J. COMPUT.*, Vol. 14, No. 2, pp. 448-468, 1985.
13. Sugihara, K. and Iri, M., Construction of the Voronoi diagram for one million generators in single-precision arithmetic, Proc. IEEE 80, 1471-1484 (1992).
14. Sugihara, K., Approximation of generalized Voronoi diagrams by ordinary Voronoi diagrams, *Graphical Models and Image Processing*, Vol. 55, No. 6, pp. 522-531, 1993.
15. Sugihara, K., http://www.simplex.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara/.

김 동 욱

1999년 한양대학교 산업공학과 학사
2001년 한양대학교 산업공학과 석사
2001년~현재 한양대학교 산업공학과 박사과정
관심분야: computational geometry, computer graphics



김 덕 수

1982년 한양대학교 산업공학과 학사
1985년 New Jersey Institute of Technology 산업공학과 석사
1990년 The University of Michigan 산업공학과 박사
1989년~1991년 Schlumberger Technology CAD/CAM Co. Senior Software Engineer
1991년~1995년 삼성 종합 기술원 선임 연구원
1995년~현재 한양대학교 산업공학과 부교수
관심분야: geometric modeling, computational geometry, STEP and Internet applications

조 동 수

1985년 한양대학교 산업공학과 학사
1992년 한양대학교 산업공학과 석사
1997년~현재 한양대학교 산업공학과 박사과정(국제 신경영 컨설팅 실장)
1984~1992 기아자동차에서 근무
관심분야:

Kokichi Sugihara

1971년 동경대학교 계수공학과 학사
1973년 동경대학교 계수공학과 석사
1980년 동경대학교 계수공학과 박사
1991년~현재 동경대학교 대학원 계수공학과 교수
관심분야: