혼합 H_2/H_∞과 μ-설계이론을 이용한 3관성 문제의 해법

Mixed H_2/H_∞ and μ-synthesis Approach to the Coupled Three-Inertia Problem

최 연 욱
(Yeon-Wook Choe)

Abstract : This study investigates the use of mixed H_2/H_∞ and μ-synthesis to construct a robust controller for the benchmark problem. The model treated in the problem is a coupled three-inertia system that reflects the dynamics of mechanical vibrations. This kind of problem requires to be satisfied the robust performance (both in the time and frequency-domain specifications). We, first, adopt the mixed H_2/H_∞ theory to design a feedback controller K(s). Next, μ-synthesis method is applied to the overall system to make use of structured parametric uncertainty. This process permits higher levels of controller authority and reduces the conservativeness of the controller. Finally, the feedforward controller is also used to improve the transient response of the output. We confirm that all design specifications except a complementary sensitivity condition can be achieved.

Keywords : three-inertia benchmark, mixed H_2/H_∞ theory, μ-synthesis

I. 서론

본 연구에서는 문헌 [1][2]에 제시된 벤치마크 문제 중의 기본문제에 대한 해법의 하나로서 혼합(Mixed) H_2/H_∞이론과 μ이론을 이용하여 주어진 설계사양을 만족하는 제어기의 설계법을 검토한다. 즉 혼합 H_2/H_∞이론과 μ이론을 별도로 제어기의 설계에 적용함으로써, 각각의 설계이론이 가지는 약점을 극복할 수 있는 새로운 강인한 제어기의 설계법을 제시하고자 하는데 있다.

이런 종류의 벤치마크문제는 기본적으로 플랜트의 파라메터 변동이나 외란 등에 대해 강인한 서보제어기를 설계하는 문제로 귀착된다. 일반적으로 서보시스템의 설계문제에서는 다음의 세 가지가 실제적인 목표가 된다. 즉 1) 폐루프 시스템의 내부안정성이 보장될 것, 2) 강인한 안정성(robust stability)이나 감도 감소와 같은 바람직한 피드백특성을 가질 것, 3) 기준입력에 오차 없이 추종하는 바람직한 과도 및 정상상태 응답특성을 가질 것 등이다. 처음의 두 가지 목표 1)과 2)는 H_∞놈을 이용하여 제약조건의 표현이 가능하기 때문에 H_∞이론을 적용하면 비교적 간단하게 두 조건을 만족시키는 제어기를 설계할 수 있다[3]. 그러나 H_∞이론은 잘 알려진 바와 같이 전달함수의 최대특이값(maximum singular value)에 그 기초를 두고 있기 때문에 그 응답특성이 보수적으로 되는 것을 피할 수 없다.

이와 같은 H_∞이론이 가지는 약점을 보완하는 형태로서 최근 혼합 H_∞/H_2이론으로 불리는 기법[4][5]이 제안되어 현재 많은 응용 예가 발표되고 있다. 그러나 본 연구의 벤치마크 문제에서는 11개 물리 파라메터의 변동을 동시에 고려해야 하므로 혼합 H_∞/H_2이론에 의한 제어기가 보수적으로 될 가능성이 높아 설계사양을 모두 만족하는 설계가 어렵게 된다.

본 연구에서는 이와 같이 제어기가 가지는 보수성을 완화하기, 먼저 폐루프시스템의 강인한 안정성에 관련한 설계사양은 H_∞놈 LMI(Linear Matrix Inequality)로, 목표값 추종특성은 H_2놈 LMI로 각각 표현하여 모든 파라메터 변동에 대해 시스템이 안정하며 동시에 외란 제거 특성을 만족시키는 제어기의 설계를 혼합 H_2/H_∞이론으로 수행한다. 이때 얻어지는 제어기는 물리 파라메터가 가지는 불확실성의 구조를 고려에 넣고 있지 않으므로 상당히 보수적으로 될 가능성이 크다. 따라서, 먼저 파라메터의 변동으로 인하여 생기는 플랜트의 불확실성을 가법적인 형태로서 표현하고 여기에 μ설계이론을 적용함으로써 기존의 제어기가 가지고 있는 보수성을 완화를 목표로 한다. 마지막으로, 과도응답특성에 대한 설계사양을 만족시키기 위해서 2 자유도 시스템 설계이론에 의한 피드포워드 제어기를 추가한다. 설계를 위한 계산 및 시뮬레이션에는 Matlab를 사용하였다.

본문 중의 단위는 문맥으로 판단할 수 있는 것은 생략하고, 특별히 밝히지 않는 것은 이하의 것으로 한다. 시간은 [s], 각도는 [rad], 각속도는 [rad/sec], 각가속도는 [rad/sec^2], 토크는 [Nm], 전압은 [V], 이득은 [dB]이다.

II. 3관성벤치마크 문제

삼관성시스템 벤치마크문제의 플랜트를 그림 1에 나타낸다. 이것은 각종의 기계진동시스템에 공통한 특징을 모델화한 것이다. 예를 들면 하드디스크의 위치 제어, 압연기 구동시스템, 유연구조물 등의 제어 시스템이다. 이들의 진동제어문제에서는 2관성시스템 으로 근사한 모델을 기초로 제어시스템 설계를 수행 하기도 하지만, 고속이며 고정도의 제어에 대한 요구가 점점 높아지면서 보다 엄격한 모델인 3관성시스템 모델을 사용하는 경우도 늘어나고 있다[6]. 그림 1에 있어서 각 질량의 회전각, 각속도, 각가속도 를 각각 θ_i, $\dot{\theta}_i$, $\ddot{\theta}_i$(i=1∼3) 조작토크 τ를 토크 외란을 τ_{d_i}(i=1∼3)으

접수일자 : 2001. 2. 27., 수정완료 : 2001. 7. 12.
최연욱 : 부경대학교(wook@pknu.ac.kr)

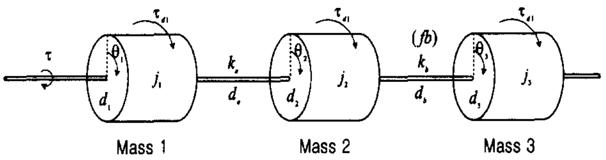

그림 1. 삼관성 시스템.
Fig. 1. Coupled three-inertia system.

로 하며, 각 질량의 관성모멘트를 j_i[kgm^2](i=1~3), 점성마찰계수를 d_i[Nms/rds](i=1~3,a,b), 결합부의 비틀림계수를 k_i[Nm/rda](i=a,b)로 두면 이 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$j_1\ddot{\theta}_1 = -d_1\dot{\theta}_1 - k_a(\theta_1-\theta_2) - d_a(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)+\tau+\tau_{d_1} \quad (1.a)$$

$$j_2\ddot{\theta}_2 = k_a(\theta_1-\theta_2)+d_a(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)-d_2\dot{\theta}_2 - f_b(\theta_2,\theta_3)-d_b(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3)+\tau_{d_2} \quad (1.b)$$

$$j_3\ddot{\theta}_3 = f_b(\theta_2,\theta_3)+d_b(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3)-d_3\dot{\theta}_3+\tau_{d_3} \quad (1.c)$$

$$f_b(\theta_2,\theta_3)\equiv k_b(\theta_2-\theta_3) \quad (1.d)$$

또한 조작토크 τ[Nm]는 다음 식으로 표현되는 전류 증폭기를 통해서 전압 e[V]에 의해 제어되는 것으로 한다.

$$\dot{\tau} = -a_e\tau + a_e e \quad (1.e)$$

[위치제어문제 (기본문제 P2)] 각 파라메터의 기준값과 파라메터가 가지는 오차를 표 1에, 하드웨어가 가지는 제약을 표 2에 각각 표시한다.

[요구되는 설계사양] 관측량을 θ_1으로 해서 파라메터의 변동에 관계없이 아래의 사양을 만족하는 제어기를 설계한다.

표 1. 파라메터.
Table 1. Parameters.

	표준	변동
j_1	0.001	±10%
j_2	0.001	±10%
j_3	0.001	±50%
d_1	0.050	±10%
d_2	0.001	±10%
d_3	0.007	0.035~0.0014
d_a	0.001	0.01~0.0002
d_b	0.001	±10%
k_a	920	±10%
k_b	80	±10%
a_e	5000	±10%

표 2. 하드웨어의 제약.
Table 2. Hardware constraints.

	Hardware 제약
$\|\theta_1-\theta_2\|$	≤ 0.02 [rad]
$\|\theta_2-\theta_3\|$	≤ 0.03 [rad]
$\|\tau\|$	≤ 3 [Nm]

1) 원점을 초기상태로 해서 t=0에서 θ_3를 목표값 1에 추종시키는 경우 θ_3의 응답이 아래의 조건을 만족한다.

- $\theta_3 \le 1.1$ ($t \ge 0$)
- $\theta_3 \le 0.75$ ($t \ge 0.1$)
- $|\theta_3 - 1| \le 0.05$ ($t \ge 0.2$)
- $|\theta_3 - 1| \le 0.01$ ($t \ge 0.3$)
- $\theta_3 = 1$ ($t = \infty$)

2) 원점을 초기상태로 해서 t=0에서 $\tau_{d_1}=1$인 스텝상의 외란을 인가했을 경우 θ_3의 응답이 아래의 조건을 만족한다.

- $|\theta_3| \le 0.2$ ($t \ge 0$)
- $|\theta_3| \le 0.13$ ($t \ge 0.1$)
- $|\theta_3| \le 0.01$ ($t \ge 0.2$)
- $|\theta_3| \le 0.002$ ($t \ge 0.3$)
- $|\theta_3| = 0$ ($t \ge \infty$)

3) 원점을 초기상태로 해서 $t=0$에서 $\tau_{d_1}=0.01$의 크기를 가지는 임펄스외란을 인가했을 경우 θ_3의 응답이 아래 조건을 만족한다.

- $|\theta_3| \le 0.06$ ($t \ge 0$)
- $|\theta_3| \le 0.04$ ($t \ge 0.1$)
- $|\theta_3| \le 0.01$ ($t \ge 0.2$)
- $|\theta_3| \le 0.002$ ($t \ge 0.3$)
- $|\theta_3| = 0$ ($t \ge \infty$)

4) 상보감도함수 $T(s)$가 다음의 조건을 만족한다.

$$T(j\omega) \le \begin{cases} 20[\mathrm{dB}] & (0 \le \omega < 300) \\ -20[\mathrm{dB}] & (\omega \ge 300) \end{cases}$$

5) 외란 τ_{d_3}에서 폐루프 전달함수의 이득이 전 주파수 대역에서 -10[dB] 이하로 된다.

6) 존재하는 모든 파라메터의 변동에 대해서 상기 1)~5)의 조건을 모두 만족한다.

III. 혼합 H_2/H_∞ 제어이론

혼합 H_2/H_∞ 제어이론을 위한 기본적인 블록선도는 그림 2로 주어져 있으며, 이때 일반화플랜트의 상태공간 표현식은 다음과 같다.

$$P: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_\infty = C_\infty x + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u \\ z_2 = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ y = C_y x + D_{y1} w \end{cases} \quad (2)$$

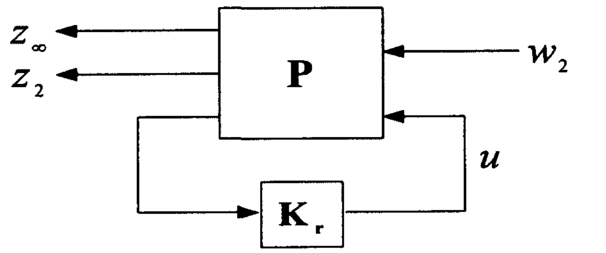

그림 2. 혼합 H_2/H_∞ 제어를 위한 블록선도.
Fig. 2. Block diagram of mixed H_2/H_∞ control.

여기서 $x \in R^n$는 상태벡터, u는 제어입력, w는 외란이나 센서잡음과 같은 외부신호, y는 측정출력을 각각 나타내고 있다. 또한 $z=[x_\infty^T\ z_2^T]$는 제어기 설계와 관련된 출력신호로서, z_∞는 H_∞ 제어, z_2는 H_2 제어와 관련된 신호를 각각 의미하고 있다.

일반화플랜트 P를 제어법칙 $u=K_r y$로서 연결하였을 경우 w에서 z까지의 전달함수를 T_{zw}라 두고

$$T_{zw}: \begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl}x_{cl} + B_{cl}w \\ z_\infty = C_{cl1}x_{cl} + D_{cl1}w \\ z_2 = C_{cl2}x_{cl} + D_{cl2}w \end{cases} \tag{3}$$

와 같이 표현한다. 이때 제어기설계의 목적은 폐루프시스템이 H_∞와 H_2의 제어성능을 동시에 만족하는 출력피드백제어기 K_r

$$K_r: \begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \\ u = C_K x_K + D_K y \end{cases} \tag{4}$$

를 구하는 것이다. 다시 말하면 $w \rightarrow z_\infty(:T_\infty)$의 H_∞놈 값을 γ 이하로 억제하면서, $w \rightarrow z_2(:T_2)$의 H_2놈을 최소화하는 것으로 요약할 수 있다. 즉

$$\min\|T_2\|_2 \quad \text{subject to } \|T_\infty\|_\infty < \gamma \tag{5}$$

이다. 이러한 문제는 최근 콘벡스(convex) 최적화문제 로서 변환되어 LMI을 이용하여 주어진 γ값에 따른 최적해를 큰 어려움 없이 구할 수 있게 되었다[7].

VI. 시스템의 정식화 및 설계

벤치마크문제에서는 두 종류의 오차를 가정하고 있다. 하나는 상보감도함수의 제약조건 (4)에 의한 모델 오차이며, 이것은 고주파영역에서 무시된 플랜트의 동특성을 보증하기 위한 사양이다. 또 하나는 파라메터 변동에 의한 것이며 11개 물리 파라메터가 전부 변동 하고 있다. 문헌[1]에서도 이미 언급한 바와 같이 조건(4)과 나머지 조건과는 서로 트레이드오프 (trade-off)의 관계가 있기 때문에 모든 조건을 만족하는 제어기의 설계는 불가능하다. 여기서는 (4)를 제외한 나머지 조건을 만족시키는 제어기의 설계를 시도한다.

1. 피드백 제어기의 설계

A) 혼합 H_2/H_∞이론에 의한 제어기의 설계

11개 물리 파라메터의 변동을 전부 설계에 반영하게 되면 계산이 복잡하게 될 뿐만 아니라 상당히 보수적인 결과가 얻어질 것으로 예상된다. 따라서 여기서는 플랜트 공진주파수의 변화에 커다란 영향을 미치는 파라메터를 플랜트의 주파수응답곡선을 통해 구한 뒤(j_3 및 k_a), 이것에 대한 변동만을 고려하는 강인한 제어기를 설계하고 나머지 파라메터의 변동에 대한 강인성은 시뮬레이션을 통해 확인하기로 한다.

먼저 변동 파라메터 j_3 및 k_a를

$$j_3 = j_{3_o} + W_{j_3}\delta_{j_3} \tag{6.a}$$

$$k_a = k_{a_o} + W_{k_a}\delta_{k_a} \tag{6.b}$$

로 표현한다. 단 j_{3_0}, k_{a_0}는 기준값을 의미하며, W_{j_3}, W_{k_a}는 파라메터의 변동폭을 나타내고 있는 것으로 일정한 값을 가진다. 또한

$$|\delta_{j_3}| \le 1,\ |\delta_{k_a}| \le 1 \tag{6.c}$$

으로 둔다. 미분방정식(1)으로부터 입력 u와 출력 y 사이의 전달함수를 구해보면 관성모멘트 j_i는 모두 역수로서 표현되고 있음을 알 수 있다. 따라서 만약 변동 파라메터의 역수 $1/j_3$을

$$\frac{1}{j_3} = \frac{1}{j_{3_o}\left[1+\left(W_{j_3}/j_{3_o}\right)\delta_{j_3}\right]} \tag{7}$$

로 변형해서 그림 3과 같은 피드백형식으로 표현하면 (5)으로 주어진 가법적 변동이 가지는 보수성을 어느 정도 억제할 수 있게 된다[8].

그림 3과 같이 변동의 입 출력단을

$$z_\mu = \begin{bmatrix} z_{j_3} & z_{k_a} \end{bmatrix}^T,\ w_\mu = \begin{bmatrix} w_{j_3} & w_{k_a} \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

로 두면, w_μ, z_μ 사이의 파라메터 변동은 구조화된 변동

$$\Delta_\mu = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \delta_{j_3} & \delta_{k_a} \end{bmatrix} \tag{9}$$

을 이용하여 표현 가능하게 된다.

한편 제어기의 설계목적은 내부 파라메터가 변동 한다든지 혹은 외란 토크 τ_d,가 인가되는 경우에도

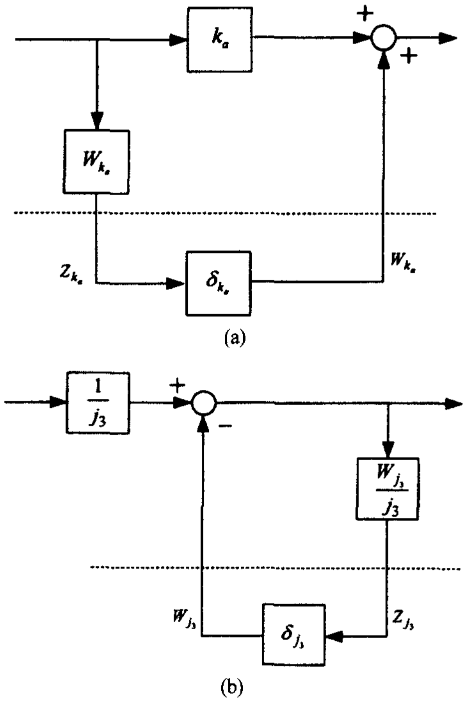

그림 3. 가법적 변동의 표현.
Fig. 3. Representation for additive variation.

$$z_\infty = [\theta_1 - \theta_2 \quad \theta_2 - \theta_3 \quad u]^T \tag{10}$$

을 가능한 작게 유지하고자 하는 것이다. 이것은

$$w_\infty = [\tau_{d_1} \quad \tau_{d_3}]^T := [w_1 \quad w_2]^T \tag{11}$$

로 정의하면 w_∞에서 z_∞까지의 폐루프 전달함수 T_∞에 강인한 제어성능을 가지게 함으로써 실현할 수 있게 된다. 이와 같은 사실로부터 $w_m[\,w_\mu^T\ w_\infty^T]$에서 $W_m[\,z_\mu^T\ z_\infty^T]$까지의 폐루프 전달함수 T_m의 H_∞놈을 작게 유지할 수 있는 제어기의 설계가 가능하다면, j_3와 k_a가 가지는 모든 변동과 토크 외란의 존재에도 불구하고 출력이 목표값에 추종하면서 동시에 θ_1과 θ_2 및 θ_2와 θ_3 사이의 비틀림 진동을 억제할 수 있게 될 것이다.

여기에 H_∞제어기의 보수성으로 인한 단점을 보완하기 위하여 플랜트의 출력특성에 H_2성능을 추가하여 혼합 H_2/H_∞이론을 이용한 제어기의 설계를 시도한다. 즉 그림 4와 같이 적분기를 통과한 오차신호 z_2와 w_m 사이의 전달함수에 대한 H_2놈 값과 z_m과 w_m 사이의 전달함수의 H_∞놈 조건으로부터 (5)을 만족하는 제어기 $K(s)$를 설계한다.

B) μ해석 및 설계이론의 적용

그림 4를 기본으로 하는 혼합 H_2/H_∞이론은 (6)으로 주어지는 플랜트의 파라메터 변동구조를 적극적으로 활용하지 못하고 있으므로 결과적으로 보수성이 큰 제어기가 설계될 가능성이 크다. 따라서 두 개의 파라메터 j_3와 k_a에 대한 구조화 변동 (8), (9)에 대해 μ설계이론을 도입함으로써 (A)에

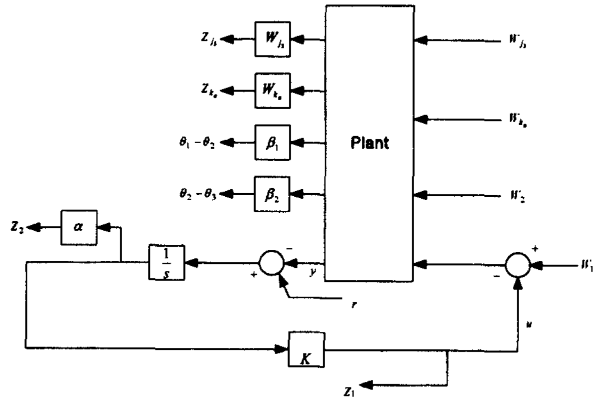

그림 4. 혼합 H_2/H_∞ 제어를 일반화플랜트.
Fig. 4. Generalized Plant for mixed H_2/H_∞ Theory.

서 설계한 제어기의 보수성을 완화시킬 수 있을 것으로 생각된다. 그림 4에 대한 μ설계문제는 다음과 같이 정의할 수 있다. 즉

$$\begin{bmatrix} z_\mu \\ z_\infty \\ \cdots \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w_\mu \\ w_\infty \\ \cdots \\ u \end{bmatrix} \tag{12}$$

를 만족하는 일반화플랜트 $P(s)$를 구한 뒤 $M(s)$= LET{$P(s)$, $K(s)$}(이것을 LFT(Linear Fractional Transformation)변환이라고 하며, $\mathrm{LFT}\{P, K\} = P_{11} + P_{12}K(1 - P_{22}K)^{-1}P_{21}$와 같이 정의된다.)에 대해서

$$\mu_\Delta\{M(j\omega)\} < 1 : \ \Delta = \mathrm{diag}[\Delta_\mu \quad \Delta_S] \tag{13}$$

로 하는 제어기 $K(s)$를 구하는 것이다. Δ_S는 강인한 제어성능을 위한 2행 3열을 가지는 가공의 블록(파라메터 변동은 실제 실수 변동이지만 본 연구에서는 복소변동으로 간주하였다)이다. (13)을 만족하는 제어기 K(s)는 D-K반복법에 의해 계산 가능하다는 것이 알려져 있다[9]. 그러나 본 연구에서는, 피드백제어기 K(s)는 상기 (A)과정의 혼합 H_2/H_∞이론을 이용하여 계산하고 이 결과에 μ설계법을 적용시킴으로써, 기지의 파라메터 변동구조를 적극 활용하게 되어 제어기의 보수성이 완화될 것으로 기대 된다.

이로부터 벤치마크문제를 해결하기 위한 제어기 설계과정은 다음과 같이 정리할 수 있다.

[벤치마크문제의 해결을 위한 제어기의 설계]

i) 과정(A)로부터 혼합 H_2/H_∞이론에 의해 제어기 $K_0(s)$를 설계한다.

ii) i)의 $K_0(s)$로서 $M(s)$= LET{$P(s)$, $K_0(s)$}를 계산하여 (13)을 확인한다. (13)이 만족되면 단계 vi)로 진행한다.

iii) D-K반복을 통하여 이용하여 (13)의 설계를 위한 스케일링 행렬 $D_i(s)$(i=1,2,…)를 구하여 일반화 행렬 $P(s)$의 왼쪽과 오른쪽에 $D_i(s)$와 D_i^{-1}를 각각 곱한다.

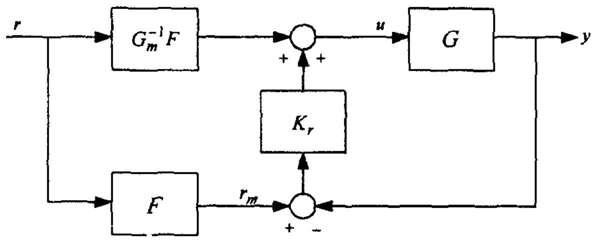

그림 5. 2자유도 제어시스템.
Fig. 5. Two-degree-of-freedom system.

iv) 여기에 과정 (A)를 적용하여 제어기 $K_r(s)$를 다시 설계한다.

v) ii) ~ iv)를 식(13)이 만족될 때까지 반복한다.

vi) 시뮬레이션을 통하여 설계사양을 확인한다.

2. 2자유도에 의한 피드포워드

전 절의 방법에 의한 피드백 제어기만으로는 목표값에 대한 추종특성의 조건(1)을 만족시킬 수 없다. 따라서 목표값 응답특성을 개선하기 위해서는 2자유도 제어 시스템에 의한 피드포워드 제어가 필요하다. 이를 위해서 여러 가지 방법이 제안되고 있으나 여기서는 모델 매칭법[10](Model Matching Method)을 이용하여 피드포워드 제어기를 설계한다.

그림 5에서 G는 실제 플랜트에서 제어신호 u와 출력 y 사이의 전달함수, G_m은 플랜트의 이상적인 모델을 각각 나타내며, F는 $G_m^{-1}F$가 안정이며 프로퍼하게 되도록 결정한다. 만약 G와 G_m이 같다면 r에서 y까지의 전달함수는 피드백제어기 K_r과 무관하게 F로 되기 때문에, 목표값 응답특성을 피드백 특성과는 독립적으로 F로서 규정할 수 있다. 또한 G와 G_m이 일치하지 않을 경우는 피드백제어기 K_r가 추종특성을 보상하도록 동작하게 된다.

여기서는 G_m을, 점성마찰 및 비틀림이 없는 θ_1, θ_2, θ_3로 되는 이상적인 것으로 가정해서

$$G_m^{-1} = (j_1 + j_2 + j_3)s^2 \tag{14}$$

로 두고 목표값 응답특성을 결정하는 F는 3차의 전달 함수로서 아래와 같이 지정한다.

$$F = \frac{1}{(T_1^2 s^2 + 2\varsigma T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{15}$$

단 T_i 및 ς는 스텝입력을 인가했을 경우 설계사양 (1)을 충분히 만족할 수 있는 이상적인 출력을 가지도록 $T_1 = 0.023$, $T_2 = 0.03$, $\varsigma = 0.9$와 같이 각각 선정하였다.

V. 시뮬레이션 결과

그림 4를 기본으로 해서 상기 설계과정 i)~v)에 의해 제어기를 설계한 뒤, 각 사양 (1)~(6)에 대한 시뮬레이션을 수행한다. 계산에는 Matlab를 사용했다.

표 3에 본 논문에서 적용한 시뮬레이션 조건을 표시한다. 여기서 기준값은 물론 변동이 전혀 없는 이상적인 경우,

표 3. 기준 파라메터와 변동 파라메터.
Table 3. Nominal and varied parameters.

파라메터	기준값	Case 1	Case 2	Case 3
j_1	0.001	0.0009	0.0011	0.0009
j_2	0.001	0.0009	0.0011	0.0011
j_3	0.002	0.0010	0.0030	0.0030
k_a	920	1012	828	828
k_b	80	88	72	72
d_1	0.005	0.0550	0.0450	0.0450
d_2	0.001	0.0011	0.0009	0.0009
d_3	0.007	0.0350	0.0014	0.0014
d_a	0.001	0.0100	0.0002	0.0002
d_b	0.001	0.0011	0.0009	0.0009
a_e	5000	5000	5000	4500

Case1은 관성모멘트가 최소값을 가지며 비틀림 정수와 점성마찰계수가 최대 변동한 경우, Case2는 반대로 관성모멘트가 최대변동을 하고 비틀림 정수와 점성마찰계수가 최소값을 가지는 경우, Case3은 모든 파라메터가 최소값을 가질 경우를 각각 나타내고 있다. 또한 그림 4에서 파라메터 j_3, k_a에 대한 변동의 크기를 나타내는 w_{j_3}, w_{k_a}는 각각 0.004 (20%의 변동), 8(10%의 변동)로 두었다. 이 경우 j_3는 실제 ±50%의 변동을 가정하고 있지만 H_∞놈 값에 대한 보수성을 고려하여 실제의 변동보다 작게 ±20%로 취했다. 또한 변수 α, β_1, β_2는 몇 번의 시행착오를 통하여 각각 10, 0.08, 0.05로 두었다.

1. 사양(1): 목표값 추종

그림 6은 사양(1)의 목표값 추종특성을 보여주는 결과이다. 원점을 초기상태로 해서 t=0에서 목표위치 θ_3=1에 추종시켰을 때 제어량 θ_3, 제어입력 τ 및 각 질량 사이의 비틀림 $\theta_1 - \theta_2$, $\theta_2 - \theta_3$를 각각 나타내고 있다. 수치계산의 결과를

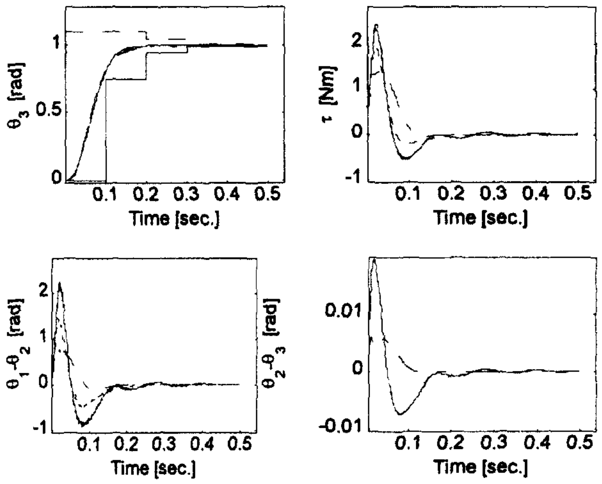

그림 6. 기준신호에 대한 응답.
Fig. 6. Step responses to the reference input.

표 4. 사양 (1)에 대한 결과.
Table 4. Results for spec. (1).

	요구사항	기준값	최악 Case
$\max_{t\geq 0}\lvert\tau\rvert$	≤3	1.9637	2.4508(CAse 2)
$\max_{t\geq 0}\lvert\theta_1-\theta_2\rvert$	≤0.02	0.0015	0.0023(Case 2,3)
$\max_{t\geq 0}\lvert\theta_2-\theta_3\rvert$	≤0.02	0.0121	0.0197(Case 2)

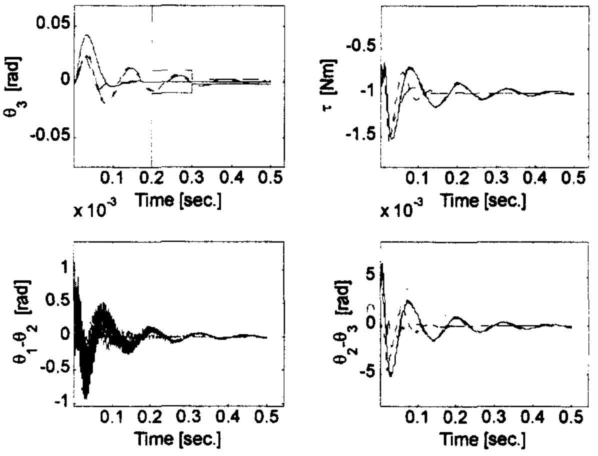

그림 7. 스텝 외란에 대한 응답 파형.
Fig. 7. Responses to step disturbance.

표 5. 사양 (2)에 대한 결과.
Table 5. Result for spec. (2).

	요구사항	기준값	최악 Case
$\max_{t\geq 0}\lvert\tau\rvert$	≤3	0.5563	1.5471 (Case 2)
$\max_{t\geq 0}\lvert\theta_1-\theta_2\rvert$	≤0.02	9.11×10^{-4}	0.0011 (Case 3)
$\max_{t\geq 0}\lvert\theta_2-\theta_3\rvert$	≤0.02	0.0057	0.0066 (Case 3)

표 4에 정리하였다. 이로부터 파라메터의 변화에도 불구하고 모든 사양을 충분히 만족하고 있음을 알 수 있다.

2. 사양(2) 스텝상의 외란에 대한 응답

그림 7은 사양 (2)의 스텝 외란에 대한 응답 파형이다. 역시 원점을 초기상태로서 해서 t=0에서 τ_{d_1}=1[Nm]인 스텝상의 외란을 인가했을 때의 제어량 θ_3, 제어 입력 τ 및 각 질량 사이의 비틀림 $\theta_1-\theta_2$, $\theta_2-\theta_3$를 표시하고 있다. 이 경우도 플랜트의 파라메터에 불확실성이 존재함에도 불구하고 모든 요구를 만족하고 있다. 수치결과를 표 5에 정리했다.

3. 사양(3) 임펄스 외란에 대한 응답

그림 8은 임펄스 외란에 대한 응답이다. 원점을 초기 상태로서 하여 t=0에서 τ_{d_1}=0.01[Nm]인 임펄스 상의 외란을 인가했을 때의 제어량 θ_3, 제어 입력 τ 및 각 질량 사이의 비

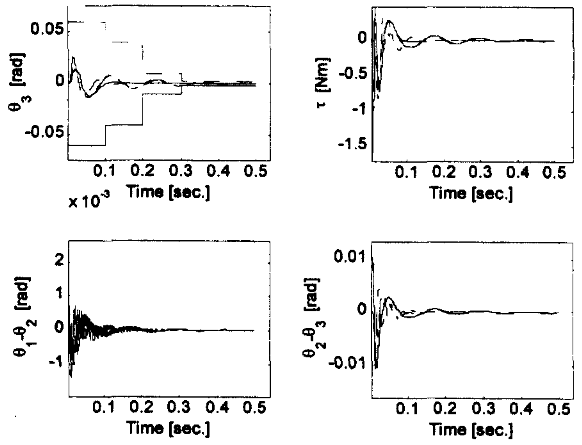

그림 8. 임펄스 외란에 대한 응답 파형.
Fig. 8. Impulse responses to disturbance.

표 6. 사양 (3)에 대한 결과.
Table 6. Result for spec. (3).

	요구 사항	기준값	최악 Case
$\max_{t\geq 0}\lvert\tau\rvert$	≤3	1.5177	1.5792 (Case 3)
$\max_{t\geq 0}\lvert\theta_1-\theta_2\rvert$	≤0.02	0.0018	0.0022 (Case 3)
$\max_{t\geq 0}\lvert\theta_2-\theta_3\rvert$	≤0.02	0.0112	0.0113 (Case 1)

틀림 $\theta_1-\theta_2$, $\theta_2-\theta_3$를 표시하고 있다. 역시 모든 파라메터 변동에 대해서 설계사양을 만족하고 있다. 표 6에 수치결과를 정리했다.

4. 사양(4) 상보감도함수

그림 9는 표 3에 표시된 파라메터 변동에 대한 상보감도함수의 이득선도이다. 전 주파수대역에서 이득이 20[dB] 이하라는 요구에 대해서는 불확실성의 존재에도 불구하고 만족시키고 있으나, 300[rad/sec] 이상의 주파수대역에서 이득이 -20[dB] 이하로 되어야 한다는 조건은 어떤 Case에서도 만족시키지 못하고 있다. 수치결과를 표 7에 정리하였다.

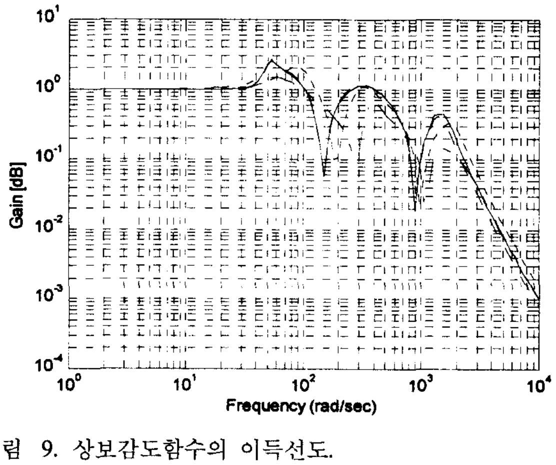

그림 9. 상보감도함수의 이득선도.
Fig. 9. Gain plots of complementary sensitivity functions.

표 7. 사양 (4)에 대한 결과.
Table 7. Results for spec. (4).

	요구사항	기준값	최악 Case
$\max_{\omega}\|G(j\omega)\|$ [dB]	≤20	6.3577	8.7150 (Case 2)
$\max_{\omega\geq 300\,[rad/sec]}\|G(j\omega)\|$ [dB]	≤-20	0.7484	1.4813 (Case 2)

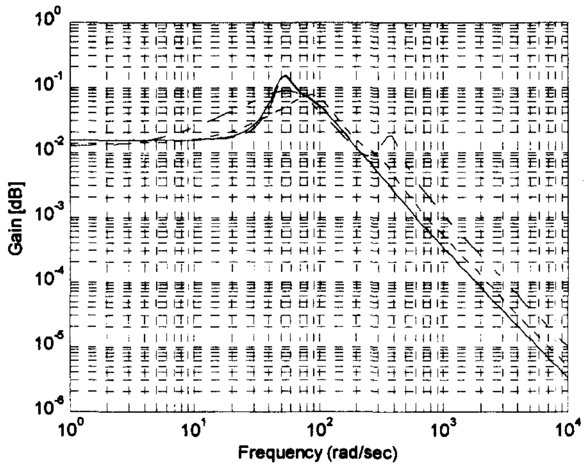

그림 10. τ_{d_3}에서 θ_3까지의 폐루프 특성의 이득선도.
Fig. 10. Gain plots of closed-loop transfer functions from τ_{d_3} to θ_3.

표 8. 사양 (5)에 대한 결과.
Table 8. Results for spec. (5).

	요구사항	기준값	최악 Case
$\max_{\omega}\|G(j\omega)\|$ [dB]	≤-10	-22.23	-16.53 (Case3)

5. 사양(5) 외란 τ_{d_3}에서 θ_3까지의 폐루프 특성

그림 10은 외란 τ_{d_3}에서 θ_3까지의 폐루프 전달함수의 이득선도이다. 결과는 불확실성의 존재에도 불구하고 요구조건을 만족시키고 있다. 수치결과를 표 8에 정리했다.

6. Robust 제어성능의 평가

그림 4에 대해 혼합 H_2/H_∞ 이론을 적용하여 설계한 제어기 에 의해

$$\left\|\mathrm{LFT}\{P, K_0\}\right\|_\infty = 5.5058$$

가 얻어졌다. 이는 설계된 제어기가 상당히 보수적이며 강인한 제어성능을 만족하고 있지 않음을 보여 주고 있다. 이에 대해 상기 4.1절의 과정 ii)~v)를 두 번 반복한 결과

$$\left\|D_2 \bullet \mathrm{LFT}\{P, K_0\} \bullet D_2^{-1}\right\|_\infty = 1.7057$$

로 되었다. ii)~v)를 세 번 이상 반복하여도 이 이상의 놈 값의 개선은 이루어지지 않았다. 그림 11에 D-K 반복에 의한 μ 값의 변화를 나타내었다. 이로부터 혼합 H_2/H_∞ 이론에 μ 설계이론을 적용함으로써 강인한 제어 성능의 향상을 기할 수 있음을 알 수 있다.

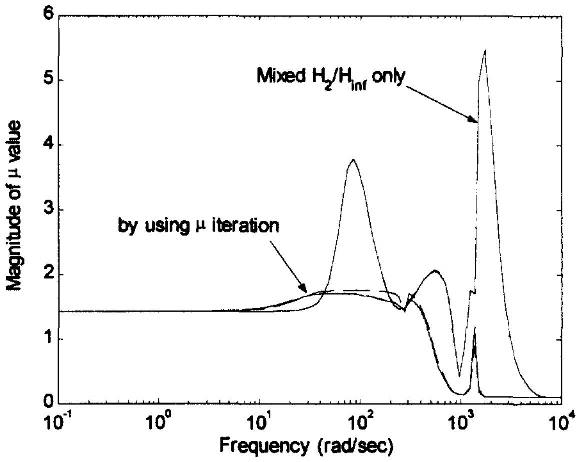

그림 11. D-K 반복에 의한 값의 변화.
Fig. 11. Variation of by D-K iteration.

VI. 결론

문헌[1][2]의 벤치마크문제 중 기본문제 2에 대해 혼합 H_2/H_∞ 이론과 μ설계이론을 이용한 설계 예를 제시하였다. 그 결과로서 상보감도함수의 설계조건 (4)를 제외하고는 전부 만족시킬 수 있었다. 이것은 이미 언급한 바와 같이 상보감도함수의 조건과 나머지 조건은 서로 트레이드오프가 있음을 보여주고 있다.

본 연구에서는 파라메터의 변동에 대해 플랜트가 가지는 불확실성의 구조를 파악하여 변동을 분산시키고 이것을 적극 활용하는 제어기의 설계법(μ 해석 및 설계이론)을 혼합 H_2/H_∞ 이론과 병행하여 적용하였다. 이렇게 함으로써 일반적으로 제어기가 가지는 보수성을 상당부분 완화시킬 수 있음을 보이고 시뮬레이션을 통하여 이것을 확인하였다.

본 연구에서 제안한 설계법은 플랜트의 변동에 대한 정보(즉 불확실성의 구조)가 입수 가능하다면 강인한 제어성능을 요구하는 일반적인 서보시스템 설계법으로서 간단하게 적용할 수 있을 것으로 생각된다[11].

참고문헌

[1] 原, 千田, 佐伯, 野波, "3慣性 ベンチマ-ク問題 - 3慣性系に對する位置制御 速度制御," 計測と制御, 第34卷, 第5號, pp. 403-409, 1995.

[2] 佐伯, 千田, 野波 原, "ロバスト制御のための ベンチマク問題(II)-位置制御系の設計例," 計測と制御, 第34卷, 第6號, pp. 498-507, 1995.

[3] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.

[4] P. P. Khargonekar and M. Rotea, "Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36. no. 7, pp. 896-911, Feb., 1997.

[5] C. Scherer, D. Gahinet, and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 42. no. 7, pp. 824-837, July, 1991.

[6] 松井, 堀, "モ-タコントロ-ルの新しい技術," 電氣學會 D 部分誌, 113-D-10, pp. 1122-1137, 1993.

[7] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali,

LMI Control Toolbox, The Mathworks Inc., 1995.
[8] T. Asai and S. Hara, "Quadratic stabilization by the descriptor form representation with structured Uncertainties," 計測自動制御學會講演會, IS 2-3, pp. 925-928, 1992.
[9] A. Packard and J. C. Doyle, "The complex structured singular value," Automatica, 29-1, pp. 71-109, 1993.
[10] T. Sugie and M. Vidyasagar, "Further results on the robust tracking problem in two-degree-of-freedom control systems," Systems & Control Letters, 13, no. 2, pp. 101-108, 1989.
[11] Y. W. Choe and H. K. Lee, "Robust positioning control of a flexible arm using mixed H_2/H_∞ control," 3rd ASCC, pp. 268-273, July 4-7, 2000.

최 연 욱

1955년 6월 23일생. 1978년 한양대학교 전자공학과(공학사). 1980년 한양대학교 전자공학과 (공학석사). 1990년 일본 京都大學 전기공학과 (공학박사). 1990년~현재 부경대학교 전기제어계측공학부 교수. 관심분야는 Robust제어, Digital제어 및 System Identification 등.