

<논 문>

## 조화 외력을 받는 간단한 주기적 구조물의 동적 응답 국부화 Dynamic Response Localization of Simple Periodic Structures Undertaking External Harmonic Forces

김재영\* · 유홍희\*\*

Jae Young Kim and Hong Hee Yoo

(2001년 4월 30일 접수 : 2001년 8월 10일 심사완료)

**Key Words** : Dynamic Response (동적 응답), Localization (국부화), Periodic Structure (주기적 구조물), Mistuning Effect (불균질 효과)

### ABSTRACT

Dynamic response localization of simple mistuned periodic structures is presented in this paper. Mistuning in periodic structures can cause forced responses that are much larger than those of perfectly tuned structures. So mistuning results in the critical impact on high cycle fatigue of structures. Thus, it is of great importance to predict the mistuned forced response in an efficient way. In this paper, forced responses of coupled pendulum systems are investigated to identify the localization effect of periodic structures. The effects of mistuning and damping on the maximum forced response are examined. It is found that certain conditions of mistuning and coupling can cause strong localization and the localization becomes significant under weak damping. It is also found that the maximum forced response increases as the number of periodic structures increases.

### 1. 서론

각종 기계류나 구조물에서 주기적인 대칭형상을 갖는 경우들을 흔히 볼 수 있다. 터빈 블레이드나 헬리콥터 블레이드(Fig. 1), 그리고 항공기나 선박의 프로펠러 등이 그 대표적인 예이다. 이러한 주기적 구조물에서 각 부구조물 간에 존재하는 물성치의 차이는 일반적으로 무시하여 균일한 구조로 해석하기 쉽다. 그러나 실제 구조물에서는 가공오차나 마모, 결함 등에 의한 물성치의 차이가 항상 존재하며, 이러한 작은 물성치의 차이로도 동적반응에 커다란 차이를 보

일 수 있다. 이는 특정 구조물에 진동에너지가 집중되어 예기치 않게 파괴가 발생할 수 있으므로 구조물의 설계 시 이러한 영향을 고려하는 것이 필요하다.

주기적 구조물에 작은 물성치의 차이가 예기치 않은 큰 변형과 응력을 초래할 수 있다는 사실은 오랫동안 연구의 주제가 되어 왔다.<sup>(1-4)</sup> Ewins는 간단히

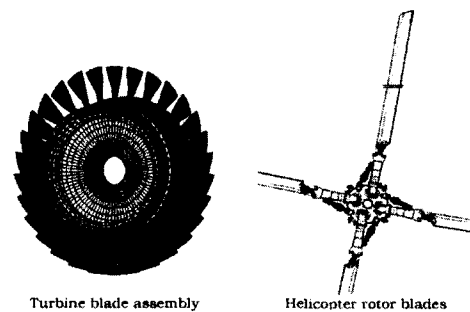


Fig. 1 Periodic structures

\* KOEI KOREA

\*\* 정회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070

이상화한 블레이드 모델에 대해 해석을 수행하여 구조물에 존재하는 작은 물성치의 불균일성이 균일하게 해석했을 때보다 큰 동적 변형을 초래함을 보였으며,<sup>(2)</sup> 물성치의 차이가 어느 이상이 되면 이러한 동적응답 국부화 현상은 다시 줄어들다는 사실을 밝혀냈다.<sup>(3)</sup> 어느 부구조물이 가장 큰 변형을 받게 될 것인가라는 문제에 대해서 Afolabi는 주변과의 물성치의 차이가 큰 부구조물에서 가장 큰 변형이 일어난다고 주장하였고,<sup>(5)</sup> Griffin 과 Hoosac은 이와는 다소 상반된 견해로 일정수준의 물성치 차이 하에서 가장 큰 동적변형이 발견된다고 주장하였다.<sup>(6)</sup> 이 상반된 견해에 대해 C. Pierre는 두 연구에 사용된 모델링과 변수가 다르기 때문이라는 결론을 내렸으며<sup>(7)</sup> 일련의 연구를 통해 인위적인 물성치의 조작으로 구조물의 동적응답을 최소화할 수 있음을 밝혀냈다.<sup>(8)</sup> 한편 이상의 논문들과는 달리, 최근에는 얼마나 큰 동적응답이 일어날 수 있는가에 대해서도 많은 연구가 이루어졌는데 그 중 Happawana는 특이 섭동법(singular perturbation method)을 사용하여 강한 연성이 작용하는 구조물에서의 동적응답을 해석적으로 구하였고,<sup>(9)</sup> Pierre와 Castanier는 축약 차수 모델링을 제시하여 터빈 블레이드의 동적응답 국부화 현상을 효율적으로 구하였다.<sup>(10)</sup> 그러나 이상의 여러 연구에도 불구하고, 어떠한 조건에서 국부화 현상이 가장 현저하게 나타날 수 있는가에 대해서는 명확한 결론을 내리지 못했으며 효율적인 모델링에 대해서도 많은 과제를 남기고 있다.

따라서 본 논문에서는 동적응답 국부화 현상이 현저해지는 조건을 규명하는 데 연구목적을 두고 주기적 구조물과 상사성을 지닌, 연성된 진자에서의 동적 반응을 살펴 보았다. 우선 2장에서는 간단한 연성된 진자 예제에 대해 운동방정식을 세우고 그러한 시스템에서 물성치 차이 및 연성 정도, 감쇠력의 변화에 따른 동적응답의 변화를 조사함으로써 동적응답 국부화 현상이 크게 나타나는 조건을 제시하였으며, 3장에서는 실제 구조물과 같이 2개 이상으로 구성된 주기적 시스템에서 얼마나 큰 동적응답이 나타날 수 있을지를 살펴 보았다.

## 2. 주기적 구조물의 이상화 및 운동 방정식

본 장에서는 주기적 구조물들의 고유진동수, 연성

도, 감쇠력 등 작은 물성치의 차이가 동적응답에 얼마나 큰 차이를 줄 수 있는지를, 간단한 연성된 진자 시스템을 통해 살펴보려 한다. 주기적 구조물의 각 부구조물은 서로 약하지만 연성되어 있고 가공오차나 마모, 결합 등에 의한 각 부구조물 간 물성치 차이를 무시할 수 없으므로, Fig. 2와 같이 조금의 길이차이를 갖는 연성된 진자로 이상화하여 모델링 하였다. 여기서 각 진자는 동일 주파수( $\omega$ )로 외부 가진력을 받으며 약한 비례 감쇠( $c$ )의 영향을 받고 있다고 가정한다.

이 시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \dots \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} + c \begin{bmatrix} l_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dots \\ \dot{\theta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_r + 2k_r a^2 & -k_r a^2 & \dots & -k_r a^2 \\ -k_r a^2 & k_r + 2k_r a^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_r a^2 & 0 & \dots & k_r + 2k_r a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \cdot F \sin \Omega t \\ l_2 \cdot F \sin \Omega t \\ \dots \\ l_n \cdot F \sin \Omega t \end{Bmatrix} \quad (1)$$

해석의 편의를 위해 다음과 같은 무차원 매개변수 및 변수들을 도입한다.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &\equiv \frac{l_i}{l} \\ \beta &\equiv \frac{k_r a^2}{k_r} \\ \gamma &\equiv \frac{Tc}{m} \\ \tau &\equiv \frac{t}{T} \\ \omega &\equiv T\Omega \\ f &\equiv \frac{lF}{k_r} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서,

$$T = \sqrt{\frac{ml^2}{k_r}}$$

또한  $\alpha_i$ 는 각 구조물에서의 물성치 차이를 대표하는 변수이고,  $\beta$ 는 부구조물간 연성정도를 나타내는 변수이며,  $\gamma$ 는 감쇠 정도를 나타내는 변수이다. 이상에서

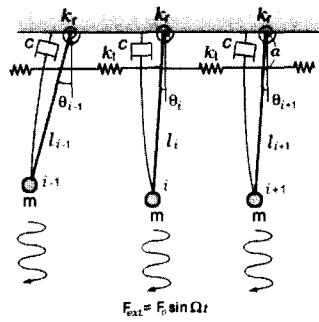


Fig. 2 Multiple coupled pendulum system

정의된 무차원 변수 및 매개변수들을 사용하여 식 (1)의 운동방정식을 무차원화하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \alpha_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & \dots & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta & 0 & \dots & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 f \sin \omega t \\ \alpha_2 f \sin \omega t \\ \vdots \\ \alpha_n f \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (3)$$

이 무차원 방정식의 정상상태 동적응답은 다음과 같은 형태로 얻을 수 있다.

$$\theta_i = a_i \cos \omega t + b_i \sin \omega t, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

이를 식 (3)에 대입하여 풀면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{b} - \omega \mathbf{C} \mathbf{a} &= \mathbf{f}, \\ (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{a} - \omega \mathbf{C} \mathbf{b} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \alpha_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & \dots & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta & 0 & \dots & 1+2\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} f$$

이로부터 정상상태의 동적응답 크기를 결정하는  $a_i$  와  $b_i$ 를 구하고 확대계수(magnification factor)를 다음과 같이 정의하여 구한다.

$$k_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} / f \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

### 3. 수치해석 결과

본 절에서는 2절에서 유도된 식들을 사용하여, 동적응답 국부화 현상이 크게 나타나는 조건을 규명하는데 목적을 두고, 우선 간단한 2개의 연성된 진자 예제에 대해 물성치 차이 및 연성 정도, 감쇠력의 크기에 따른 동적응답의 변화를 살펴보았다.

Fig. 3은 구조물에서의 물성치 차이가 미치는 영향을 알아보기 위한 것으로서 진자의 길이비( $\alpha$ )에 따른 동적반응의 변화를 표시하였다. 여기서 감쇠력( $\gamma$ ) 및 연성정도( $\beta$ )는 거의 미약하다고 볼 수 있는 값으로 0.01과 0.005를 사용하였다. Fig. 3(a)는 두 진자의 길이차이가 거의 없는(0.1%) 경우의 동적반응을 그린 것으로서 일반적으로 예측되듯이 두 진자의 동적응답은 거의 차이를 보이지 않는다. 그러나 Fig. 3(b)의 경우를 보면, 1%의 길이차이에 의해 두 진자의 동적응답은 큰 차이를 보이게 된다는 사실을 알 수 있다. 이는 약하게 존재하는 구조물의 연성이 응답을 한쪽으로 국부화(localize)시켜 큰 동적반응의 차이를 만든 것이라 볼 수 있다. 한편 Fig. 3(c)에서와 같이 5% 이상의 길이차이를 보이는 경우에는 다시 두 진자의 동적응답의 차이가 줄어드는 것을 알 수 있다. 이를 통해 국부화 현상은 물성치의 차이가 어느 정도 작은 특정 영역에서 발생함을 알 수 있으며 따라서 주기적 구조물과 같은, 물성치의 차이가 크지 않은 구조물에서 중요한 의미를 가질 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 4에서는 의 경우 이러한 최대 동적응답의 변화 양상을 전체적으로 보여주며 이 경우 길이차이가 1% 근방인 영역에서 동적응답 국부화 현상이 가장

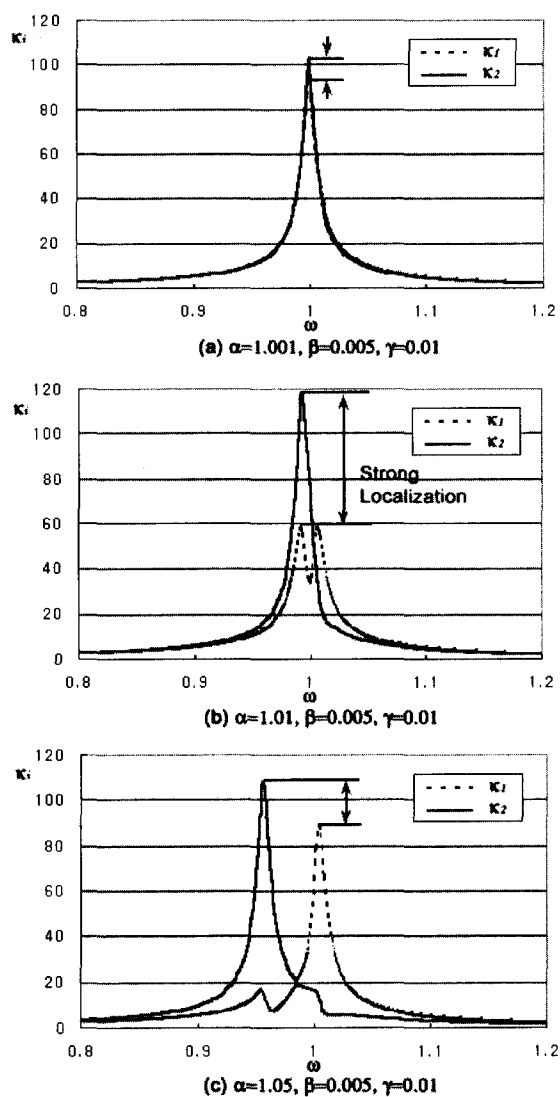


Fig. 3 Magnification factor variation due to length-ratio

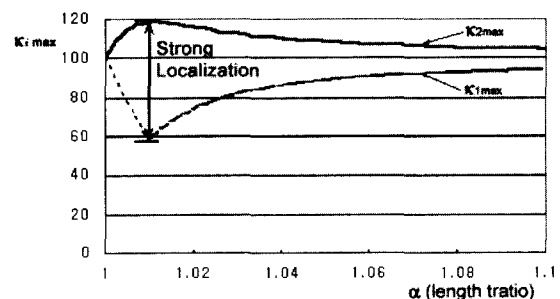


Fig. 4 Comparison of maximum pendulum amplitudes

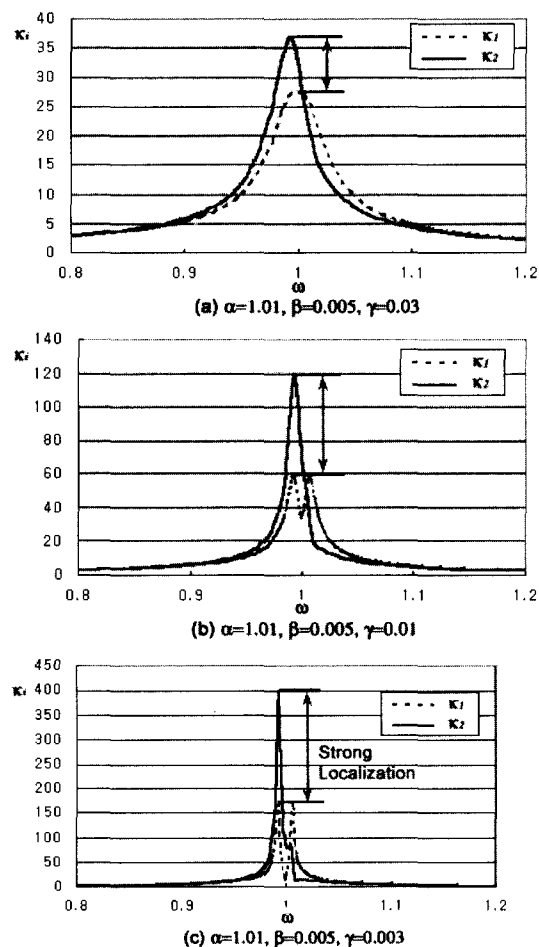


Fig. 5 Magnification factor variation due to damping

크게 나타남을 볼 수 있다. 한편 구조물에 작용하는 감쇠력이 동적응답에 어떠한 영향을 미치는지를 알아보기 위해 Fig. 5에서는 감쇠 정도에 따른 진자의 동적응답의 변화를 살펴 보았다. Fig. 5(a) ~ (c)를 보면 감쇠가 작아지면 두 진자에 나타나는 동적 응답의 크기도 모두 증가하며 이와 동시에 두 진자의 동적응답 크기의 차도 증가하는 것을(즉 동적응답 국부화 현상이 커지는 것을) 알 수 있다.

Fig. 6은 세 경우의 감쇠값에 대해  $\beta$ , 즉, 연성정도의 변화까지를 포함한 최대 동적반응을 보여주는데, 가로축은 구조물의 물성치 차이를 대표하는 값( $\alpha$ )이고 세로축은 연성정도( $\beta$ )를 의미한다. 이 그림에서는 색의 진한 정도에 따라 최대 동적응답이 크게 나타나는 영역을 의미한다. 그림에서 보는 바와 같이 작은

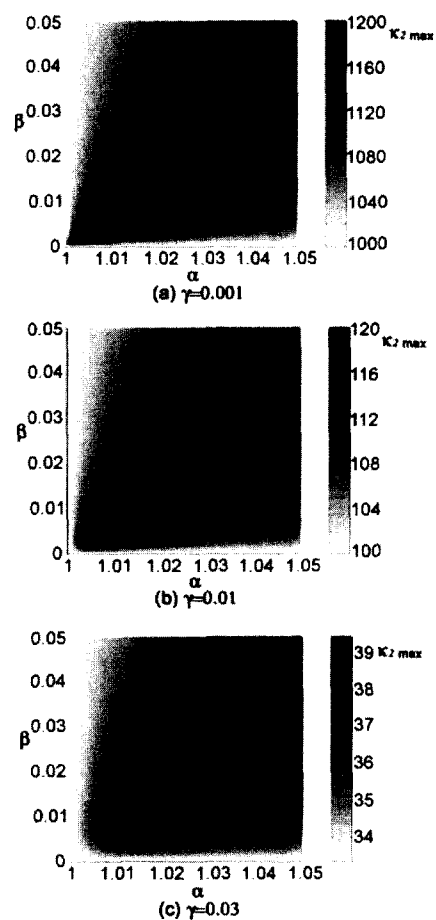


Fig. 6 Maximum amplitudes of the pendulum

연성이 작용하는 주기적 구조물에서, 동적응답 국부화 현상이 두드러지게 나타나는 특정 영역이 있으며 이 보다 구조물간의 연성이 커지거나 물성치의 차이가 커지는 경우에는 이 현상이 다시 약해짐을 알 수 있다. 따라서 이 결과는 동적응답 국부화 현상이 발생할 수 있는 시스템의 조건을 시사하며, 작은 감쇠력이 작용하는 구조물에서 연성정도에 대략 비례하는 특정 물성치 차이에서 동적응답 국부화 현상이 강하게 나타남을 알 수 있다.

감쇠가 작음하게 되면 Fig. 6(b)와 Fig. 6(c)에서 보여주듯이 최대 동적응답이 일어나는 부분은 우상단으로 이동하게 된다. 그러나 그 크기는 감쇠가 증가함에 따라 급속히 감소하는 것을 알 수 있다.

일반적으로 주기적 구조물은 여러 개의 부구조물로 구성되어 있으므로 다음에는 부구조물의 개수에 따라 동적응답 국부화 현상이 어떻게 변화하는 지 살

Table 1 Maximum responses with respect to number of coupled elements when  $\beta$  is 0.005

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$
	$X_{1,max}$	$X_{2,max}$	$X_{3,max}$	$X_{4,max}$	$X_{5,max}$
$n=2$	1,000	1,000			
( $\beta = 0.005$ )	62.14				
$n=3$	1,000	1,000			
( $\beta = 0.005$ )	69.24	69.24			
$n=4$	1,000	1,000	1,001		
( $\beta = 0.005$ )	65.95	92.97	70.96		
$n=5$	1,000	1,000	1,004		1,004
( $\beta = 0.005$ )	85.19	85.19	78.44		78.44

Table 2 Maximum responses with respect to number of coupled elements

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$
	$X_{1,max}$	$X_{2,max}$	$X_{3,max}$	$X_{4,max}$	$X_{5,max}$
$n=2$	1,000	1,000			
( $\beta = 0.012$ )	52.45				
$n=3$	1,000	1,000			
( $\beta = 0.018$ )	53.13	53.13			
$n=4$	1,000	1,020	1,000		
( $\beta = 0.029$ )	55.11	75.93	55.11		
$n=5$	1,000	1,019	1,019	1,000	
( $\beta = 0.032$ )	59.20	71.03	71.03	59.20	

펴보려 한다. 이를 위해 앞에서 운동방정식이 유도된 진자 시스템에서 부구조물의 개수에 따른 최대 및 최소 동적응답이 어떻게 달라지는지를 살펴 보았다. 부구조물 개수에 따른 동적응답 국부화 현상의 해석을 위하여 작용하는 감쇠력( $\gamma$ )은 작은 값으로서 0.01로 두고, 각 진자가 갖는 길이와 연성정도를 변화시키며 부구조물의 최대 동적응답을 구하여 보았다.

Table 1과 Table 2는 이를 통해 얻어진 결과를 표시한 것으로서 Table 1에서는 부구조물간 연성정도인  $\beta$ 의 값을 임의의 값 0.005에 고정시킨 결과이고 Table 2에서는  $\beta$ 도 같이 변화시키면서 해석한 결과를 나타낸다. 두 경우에 모두 각 부구조물이 균일하다고 보고 해석한 경우에 비해 (균일한 경우의 동적반응의 값은 모두 100임) 어느 정도 크기의 최대 동적응답이 나타날 수 있는가를 보여준다. 이 결과들을

보면 연성된 부구조물 개수가 많을수록 동적응답 국부화의 현상이 증가함을 알 수 있다. 동적응답 국부화 현상이 크게 일어나는 조건을 살펴보면, Table 1에서처럼  $\beta$ 가 고정된 경우에는, 다른 부구조물들의 길이가 거의 균일하고 한 부구조물만 약 1%의 길이차를 가질 때 가장 큰 동적응답을 보였으며 최대 동적응답은 부구조물의 개수가 증가할수록 증가하나 그 증가율은 점점 완만해지는 것을 확인할 수 있었다. Table 2에서처럼 구조물간 연성정도인  $\beta$ 의 변화까지 고려하면, 동적응답 국부화의 정도가  $\beta$ 를 일정하게 고정시켰을 때에 비해 더 커지는 것을 알 수 있다. 최대 동적응답은 부구조물의 개수  $n$ 이 증가함에 따라 더 큰  $\alpha$  값에서 (이 때 연성정도  $\beta$ 값도 증가하는데) 갖게 되는 것을 알 수 있다. 즉, 가장 큰 동적응답 국부화 현상은 더 큰 구조물간 연성과 더 큰 길이차이의 조건하에서 나타남을 의미한다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 작은 물성치 차이를 갖는 주기적 구조물의 동적응답 국부화 현상을 규명하기 위해 간단한 연성된 진자 시스템으로 해석을 수행하였다. 그 결과 고유진동수 근방에서, 작은 물성치의 차이에 의해서도 동적응답에 큰 차이가 발생할 수 있으며, 감쇠력이 작은 경우 그 현상이 현저해 지는 것을 알 수 있었다. 따라서 구조간 연성이 존재하는 주기적 구조물에 있어서, 작은 물성치의 차이는 구조물의 동적응답에 큰 영향을 미칠 수 있으며, 특히 감쇠력이 작은 주기적 구조물에서 중요한 문제로 부각될 수 있음을 알 수 있다. 또한 연성된 부구조물의 개수가 많을수록 더 큰 동적응답이 일어날 수 있으며, 이 경우 특정한 길이 차이와 연성 정도에서 동적반응 국부화 현상이 나타남을 확인할 수 있었다.

#### 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Ewins, D. J., 1970, "A Study of Resonance

Coincidence in Bladed Disks," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 12, pp. 305~312.

(2) Ewins, D. J., 1973, "Vibration Characteristics of Bladed Disk Assemblies," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 15, pp. 165~186.

(3) Ewins, D. J., 1969, "The Effect of Detuning upon the Forced Vibrations of Bladed Disks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 9, pp. 65~79.

(4) Pierre, C., and Dowell, E. H., 1987, "Localization of Vibrations by Structural Irregularity," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, pp. 549~564.

(5) Afolabi, D., 1985, "The Frequency Response of Mistuned Bladed Disk Assemblies," *Vibration of Blades and Bladed Disk Assemblies, Proceedings of Tenth Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Cincinnati, Ohio, USA.

(6) Griffin, J. H., and Hoosac, T. M., 1984, "Model Development and Statistical Investigation of Turbine Blade Mistuning," *Trans. of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 106, pp. 204~210.

(7) Wei, S. T., and Pierre, C., 1988, "Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry [Part I] Free Vibrations, [Part II] Forced Vibrations," *Trans. of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, pp. 429~449.

(8) Castanier, P., and Pierre, C., 1997, "Consideration on the Benefits of Intentional Blade Mistuning for the Forced Response of Turbomachinery Rotors," *Analysis and Design Issues for Modern Aerospace Vehicles*, Vol. 55, pp. 419~425.

(9) Happawana, G. S., Nwokah, O. D. I., Bajaj, A. K., and Azene, M., 1998, "Free and Forced Response of Mistuned Linear Cyclic Systems: A Singular Perturbation Approach," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, pp. 761~789.

(10) Castanier, P., and Pierre, C., 1997, "A Reduced Order Modeling Technique for Mistuned Bladed Disks," *Trans. of ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, pp. 439~447.