

〈논 문〉

# 디지털 푸리에 변환에서 누설오차의 개선

## The Improvement of Leakage Error in Digital Fourier Transform

정의봉\* · 안세진\*\* · 장호엽\*\* · 장진혁\*\*

Weui-Bong Jeong, Se-Jin Ahn, Ho-Yeup Chang and Chin-Hyuk Chang

(2001년 2월 15일 접수 ; 2001년 5월 14일 심사완료)

**Key Words** : Leakage Error(누설오차), Digital Fourier Transform(디지털 푸리에 변환), Unit Impulse Response(단위충격응답함수), Frequency Response Function(주파수응답함수)

### ABSTRACT

An exact spectrum with no leakage error could be obtained when the period of the signal coincides perfectly with the record length. However, the record length will be determined regardless of the period of signal. The Leakage error due to this problem will give a distorted spectrum. In the conventional research, the method was proposed to estimate the three parameters, frequency, amplitude and phase angle, from the spectrum data for an undamped sinusoidal signal. In this paper, some techniques are proposed to estimate frequency, amplitude and damping ratios from the frequency response functions for damped signals. The validation of the proposed techniques is verified by several numerical examples.

### 1. 서 론

푸리에 변환(fourier transform, FT)은 시간 데이터가 무한한 시간에 걸쳐 있을 때에만 주파수 영역에서 그 연속성을 유지할 수 있다. 그러나, 일반적으로 진동계측기에서 사용하고 있는 고속 푸리에 변환(fast fourier transform, FFT)은 일종의 이산 푸리에 변환(discrete fourier transform, DFT)으로서, 계측기가 가진 기억 용량의 제한으로 인해 실제로는 충분한 시간, 즉 무한한 시간에 걸쳐 데이터를 받을 수 없기 때문에 주파수 영역의 데이터는 이산적인 성질을 가지게 된다. 이와 같은 주파수의 불연속으로 인하여 비록 스펙트럼 상에서 peak가 나타나는 주파수라 할 지라도 원래 시간 신호의 실제 주파수를 나타내 줄 수 없게 된다. 이러한 현상은 반드시 누설오차(leakage error)를 동반하게 되므로, 스펙트럼 상에서 peak이 나타나

는 주파수에 대한 크기(magnitude)도 실제 신호의 진폭(amplitude)보다 작게 나타나게 된다. 이러한 누설오차를 줄이기 위해서 각종 창함수(window function)가 사용되고 있지만, 이는 단지 누설오차를 줄이는 역할을 할뿐이다. 즉, 스펙트럼에서의 각 주파수에 대한 푸리에 계수가 실제 신호의 정확한 푸리에 계수라고 볼 수 없는 것이다. 누설오차를 개선하기 위한 지금까지의 연구는 저자가 아는 한 감쇠가 없는 신호만에 대하여 이루어지고 있으며, 근사식에 의한 직접법<sup>(1,2)</sup>과 정확한 식을 이용한 반복법<sup>(3)</sup>이 제시되어졌다.

본 논문에서는 감쇠를 가지는 신호가 디지털 푸리에 변환된 경우 누설오차를 개선하여 본래 신호의 정확한 주파수와 감쇠비, 그리고 진폭을 추정하는 방법을 제시하고자 한다.

### 2. 단위 충격 응답 함수

질량  $M$ , 감쇠비  $\xi$ , 비감쇠 고유진동수  $f_n$  을 갖는 1 자유도 감쇠 진동계의 단위 충격응답함수(unit impulse response function)  $h(t)$ 는 이미 알려져 있는 바와 같이 다음과 같다.

\* 정희원, 부산대학교 기계공학부  
E-mail : wbjeong@hyowon.cc.pusan.ac.kr  
Tel : (051) 510-2337, (051) 517-3805

\*\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

$$h(t) = \frac{1}{2\pi M \sqrt{1-\zeta^2} f_n} e^{-2\pi\zeta f_n t} \sin 2\pi \sqrt{1-\zeta^2} f_n t \quad (1)$$

$$= A e^{-\sigma t} \sin 2\pi f_d t$$

여기서 미지수로는 진폭  $A$ , 감쇠율  $\sigma$ , 감쇠 고유진동수  $f_d$ 가 있으며, 이들을 구하고 나면 질량  $M$ , 감쇠비  $\zeta$ , 비감쇠 고유진동수  $f_n$ 을 각각의 관계식을 통하여 구할 수 있다. 먼저  $m$ 을 "기록시간(record length)  $T$  내의 파의 개수"라고 정의하면, 거의 모든 경우에  $m$ 은 정수가 아닌 실수(만약  $m$ 이 정수이면, 기록시간과 신호의 주기가 정수배가 되므로 누설오차가 발생하지 않는다.)가 되며,

$$m = \frac{T}{T_{\text{period of signal}}} = \frac{1/\Delta f}{1/f_d} = f_d T \quad (2a)$$

$$= p + q$$

단,

$$f_d = (p+q)\Delta f \quad (2b)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서  $p$  (스펙트럼에서 최대 peak가 나타나는 이산 주파수의 일련번호, 기지량)는  $m$ 의 정수부,  $q$ (구하고자 하는 주파수 오차, frequency error, 미지량)는  $m$ 의 소수가 되며, 결국  $q$ 를 구하면 감쇠 고유진동수  $f_d$ 를 알 수 있게 된다. Fig. 1에서는  $q$ 에 따른 누설오차(leakage error)의 변화를 보여준다. 비감쇠 신호의 경

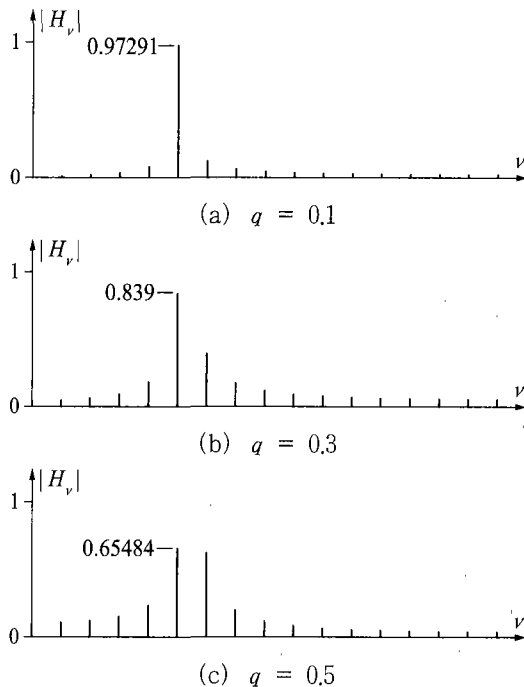


Fig. 1 Typical Example of Leakage Error with the variation of  $q$

우  $q$ 의 범위는  $-0.5 \leq q \leq 0.5$ 가 된다. 또, 스펙트럼 상에서 표시되는 주파수  $f_\nu$ 는

$$f_\nu = \nu \Delta f = \frac{\nu}{T}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

로 바꾸어 쓸 수 있다.

한편, 식 (1)을 이산시간 데이터의 형태로 바꾸기 위하여 시간데이터의 개수를  $n$ , 시간간격  $\Delta t$  라고 하면, 시간  $t$ 는

$$t_k = k\Delta t = \frac{kT}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

이므로 식 (2)~(4)를 이용하면 식 (1)을 다음과 같은 이산화된 식으로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$h_k = A e^{-\sigma kT/n} \sin 2\pi m k/n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

이 식을 푸리에 변환하면, 복소 푸리에 계수  $H_\nu$ 는

$$H_\nu = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k e^{-j2\pi f_\nu kT/n}$$

$$= \frac{A}{j} \left[ \frac{1 - e^{-[\sigma T - j2\pi(m-\nu)]}}{n[1 - e^{-[\sigma T - j2\pi(m-\nu)]/n}]} - \frac{1 - e^{-[\sigma T + j2\pi(m+\nu)]}}{n[1 - e^{-[\sigma T + j2\pi(m+\nu)]/n}]} \right]$$

$$= \frac{A}{j} [U_{\nu, m} - U_{\nu, -m}] \quad (6)$$

단,

$$U_{\nu, m} = \frac{1 - e^{-[\sigma T - j2\pi(m-\nu)]}}{n[1 - e^{-[\sigma T - j2\pi(m-\nu)]/n}]} \quad (6a)$$

$$U_{\nu, -m} = \frac{1 - e^{-[\sigma T + j2\pi(m+\nu)]}}{n[1 - e^{-[\sigma T + j2\pi(m+\nu)]/n}]} \quad (6b)$$

$$, \nu = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$$

가 된다. 여기서  $\nu$ 는 푸리에 계수의 일련번호이다.

한편, 이론적으로 스펙트럼에서 최대 peak가 나타나는 주파수를  $p$ 번째 주파수  $f_p$ 라 했을 때,

$$f_p = \sqrt{1-2\zeta^2} f_n \quad (7)$$

가 된다.  $f_p$ 는 감쇠의 정도에 따라 실제 감쇠 고유 주파수  $f_d$  보다 낮게 나타나고,  $f_d$  또한 비감쇠 고유 주파수  $f_n$  보다 낮다. 따라서, 감쇠가 있는 경우의  $q$ 의 추정엔 감쇠가 없는 경우의 조건  $-0.5 \leq q \leq 0.5$ 를 사용할 수 없음을 알 수 있다.

### 3. 근사식에 의한 직접 계산법

감쇠가 있는 경우에 푸리에 계수의 근사식을 구하기 위해서 데이터의 개수가 충분히 많다고 가정하면, 식 (6)에

서  $n \rightarrow \infty$ 로 근사하면 다음식과 같다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_\nu = \frac{A}{j} [1 - e^{-(\sigma T - j2\pi(m-\nu))}] \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - e^{-\frac{-(\sigma T - j2\pi(m-\nu)) \frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} \right]^{-1} - \frac{A}{j} [1 - e^{-(\sigma T + j2\pi(m+\nu))}] \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - e^{-\frac{-(\sigma T + j2\pi(m+\nu)) \frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} \right]^{-1} \quad (8)$$

식 (8)에  $m = p + q$ 를 대입해서 정리하면,

$$H_\nu = \frac{A}{j} \left[ \frac{1 - e^{-(\sigma T - j2\pi(m-\nu))}}{\sigma T - j2\pi(m-\nu)} - \frac{1 - e^{-(\sigma T + j2\pi(m+\nu))}}{\sigma T + j2\pi(m+\nu)} \right] = A \left[ \frac{1 - e^{-\sigma T} \cdot e^{j2\pi(p+q-\nu)}}{2\pi(p+q-\nu) + j\sigma T} + \frac{1 - e^{-\sigma T} \cdot e^{-j2\pi(p+q+\nu)}}{2\pi(p+q+\nu) - j\sigma T} \right] \quad (9)$$

와 같이 쓸 수 있다. 식 (9)를 계산에 용이한 형태로 다음과 같이 바꾸어 보자.

$$H_\nu = \frac{Z_R + jZ_I}{2\pi(p+q-\nu) + j\sigma T} + \frac{Z_R - jZ_I}{2\pi(p+q+\nu) - j\sigma T} = \frac{4\pi(p+q)Z_R + 2\sigma TZ_I + j4\pi\nu Z_I}{4\pi^2(p+q-\nu)(p+q+\nu) + \sigma^2 T^2 + j4\pi\sigma T\nu}$$

단,

$$Z_R = A[1 - e^{-\sigma T} \cos 2\pi q] \\ Z_I = Ae^{-\sigma T} \sin 2\pi q$$

식 (10)으로부터  $\nu = p$  와  $\nu = p \pm 1$ 을 대입하여  $H_{p \pm 1}$ 을 구해보면

$$H_p = \frac{4\pi(p+q)Z_R + 2\sigma TZ_I + j4\pi p Z_I}{4\pi^2 q(2p+q) + \sigma^2 T^2 + j4\pi\sigma T p} \quad (11a)$$

$$H_{p \pm 1} = \frac{4\pi(p+q)Z_R + 2\sigma TZ_I + j4\pi(p \pm 1)Z_I}{4\pi^2(q \mp 1)(2p+q \pm 1) + \sigma^2 T^2 + j4\pi\sigma T(p \pm 1)} \quad (11b) \\ \approx \frac{4\pi(p+q)Z_R + 2\sigma TZ_I + j4\pi p Z_I}{4\pi^2(q \mp 1)(2p+q \pm 1) + \sigma^2 T^2 + j4\pi\sigma T(p \pm 1)}$$

이 된다. 식 (11b)에서 최대 peak이 나타나는 위치인  $p$ 가  $p \gg 1$  이므로  $p \pm 1 \approx p$ 로 근사시켜도 전체값에는 크게 영향을 미치지 않는다. 이제 식 (11a), (11b)로부터 감쇠율  $\sigma$ 와 주파수 오차  $q$ 를 구하기 위한 관계식을 유도해보자. 우선 두 계수의 절대값의 비를  $R_\pm$ 라고 두고 다음과 같은 전개가 가능하다.

$$R_- = \left| \frac{H_p}{H_{p-1}} \right| = \left| \frac{(q+1)(2p+q-1) + (\sigma T/2\pi)^2}{q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2 + j2(\sigma T/2\pi)p} + \frac{j2(\sigma T/2\pi)(p-1)}{q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2 + j2(\sigma T/2\pi)p} \right| \quad (12a)$$

$$R_+ = \left| \frac{H_p}{H_{p+1}} \right| = \left| \frac{(q-1)(2p+q+1) + (\sigma T/2\pi)^2}{q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2 + j2(\sigma T/2\pi)p} + \frac{j2(\sigma T/2\pi)(p+1)}{q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2 + j2(\sigma T/2\pi)p} \right| \quad (12b)$$

식 (12a), (12b)의 절대값을 없애기 위해 양변을 제곱하고,  $p \gg 1$ ,  $p \gg q$  임을 이용하여,  $p \pm 1 \approx p$ ,  $2p+q \pm 1 \approx 2p$ 로 근사해서 정리하면,

$$R_-^2 = \frac{[(q+1)(2p+q-1) + (\sigma T/2\pi)^2]^2}{[q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2} + \frac{[2(\sigma T/2\pi)(p-1)]^2}{[q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2} \quad (13a) \\ \approx \frac{[2p(q+1) + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2}{[q \cdot 2p + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2}$$

$$R_+^2 = \frac{[(q-1)(2p+q+1) + (\sigma T/2\pi)^2]^2}{[q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2} + \frac{[2(\sigma T/2\pi)(p+1)]^2}{[q(2p+q) + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2} \quad (13b) \\ \approx \frac{[2p(q-1) + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2}{[q \cdot 2p + (\sigma T/2\pi)^2]^2 + [2(\sigma T/2\pi)p]^2}$$

위 식에서 좌변의  $R_-^2$  와  $R_+^2$ 은 스펙트럼으로부터 알수 있는 기지량이므로, 미지수는  $\sigma$ 와  $q$ 이다. 따라서 식 (13a), (13b)로부터  $\sigma$ 에 관한 식을 유도하기 위해서 이 두 식을 연립하여  $q$ 를 소거하면,

$$\sigma = \frac{\pi}{T} \sqrt{-\left(\frac{R_+^2 - R_-^2}{R_+^2 + R_-^2 - 2}\right)^2 + \frac{8}{R_+^2 + R_-^2 - 2}} \quad (14)$$

이 얻어진다. 즉, 식 (14)로부터 감쇠율  $\sigma$ 를 계산할 수 있다. 이제  $q$ 를 계산하기 위해서  $\sigma$ 를 식 (13a), (13b)의 근사하기 전 식에 각각 대입해보자. 이유는  $q$ 는 작은 값이므로 근사에 영향을 많이 받는다. 따라서 근사 전의 식에 대입하면 좀 더 좋은 정확한 값을 얻을 수 있다. 유도된  $q$ 관계식은 다음과 같다. 우선 식 (13a)에 대입해서 얻어지는  $q$ 를  $q_a$ 라고 정의하고  $(p+q_a)$ 에 관해서 정리하면,

$$\alpha(p+q_a)^4 - 2\beta(p+q_a)^2 + \gamma = 0 \quad (15)$$

단,

$$\alpha = R_-^2 - 1 \\ \beta = R_-^2 \left[ p^2 - \left(\frac{\sigma T}{2\pi}\right)^2 \right] - \left[ (p-1)^2 - \left(\frac{\sigma T}{2\pi}\right)^2 \right] \\ \gamma = R_-^2 \left[ p^2 + \left(\frac{\sigma T}{2\pi}\right)^2 \right]^2 - \left[ (p-1)^2 + \left(\frac{\sigma T}{2\pi}\right)^2 \right]^2$$

식 (15)에서  $R_-^2$ 과  $\sigma, T$  그리고  $p$ 는 각각 기지량이고

미지수는  $q_a$  뿐이다. 따라서 식 (15)를  $(p+q_a)^2$ 에 관한 이차방정식으로 보고 근의 공식에 대입하면,  $q_a$  관계식을 유도할 수 있다. 즉,

$$q_a = \sqrt{\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}} - p \quad (16)$$

이 된다. 여기서 복호는 절대값을 푸는 과정에서 생긴 것이므로 식 (12a)에 대입하여 만족하는 값을 선택한다. 다음으로 식 (13b)에 대입해서 얻어지는  $q$ 를  $q_b$ 라 정의하고  $(p+q_b)$ 에 관해서 정리하면,

$$\alpha'(p+q_b)^4 - 2\beta'(p+q_b)^2 + \gamma' = 0 \quad (17)$$

단,

$$\begin{aligned} \alpha' &= R_+^2 - 1 \\ \beta' &= R_+^2 \left[ p^2 - \left( \frac{\sigma T}{2\pi} \right)^2 \right] - \left[ (p+1)^2 - \left( \frac{\sigma T}{2\pi} \right)^2 \right] \\ \gamma' &= R_+^2 \left[ p^2 + \left( \frac{\sigma T}{2\pi} \right)^2 \right]^2 - \left[ (p+1)^2 + \left( \frac{\sigma T}{2\pi} \right)^2 \right]^2 \end{aligned}$$

이 된다. 마찬가지로 방법으로 식(17)로부터  $q_b$ 에 관한 식을 유도하면,

$$q_b = \sqrt{\frac{\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha'\gamma'}}{\alpha'}} - p \quad (18)$$

이 된다. 여기서도 복호는 절대값을 푸는 과정에서 생긴 것이므로 식 (12b)를 만족하는 값을 선택한다.

이상과 같이 구한  $q_a$ 와  $q_b$ 는 수치적으로 다소 약간의 차이를 가지게 된다. 따라서 본 논문에서는 두 값의 평균을 구하고자 하는  $q$ 로 두었다. 즉,

$$q = \frac{q_a + q_b}{2} \quad (19)$$

이제  $q$ 와 감쇠율  $\sigma$ 가 결정되었으므로 감쇠고유진동수와 감쇠비, 그리고 진폭이 다음의 식으로부터 결정될 수 있다.

$$f_d = m\Delta f = (p+q)\Delta f \quad (20)$$

$$f_n = \sqrt{f_d^2 + \frac{\sigma^2}{4\pi^2}} \quad (21)$$

$$\zeta = \frac{\sigma}{2\pi f_n} \quad (22)$$

$$A = \left| H_p \div \left[ \frac{1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)/n}]} - \frac{1 - e^{-(\sigma T + 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T + 2\pi(2p+q))/n}]} \right] \right| \quad (23)$$

이상으로 누설오차를 갖는 단위 충격응답함수의 푸리에 계수 근사식으로부터 실제 감쇠 고유진동수 및 비감쇠 고유진동수, 감쇠비, 그리고 진폭을 직접 계산할 수 있다. 그

러나 이 방법으로 구한 결과는 누설오차가 상당히 개선되어 실제값에 가깝게 접근할 수는 있지만 정확한 결과라고는 할 수 없다. 따라서, 다음 절에서는 근사시키지 않은 푸리에 계수의 정확한 식으로부터 감쇠 및 비감쇠 고유진동수, 감쇠비, 그리고 진폭을 정확하게 찾아내는 방법에 대하여 언급하고자 한다.

#### 4. 정확식에 의한 반복 계산법

이 방법은 푸리에 계수의 근사하지 않은 정확식을 사용하여, 컴퓨터 프로그램을 이용한 반복계산으로 주파수오차  $q$ 와 감쇠율  $\sigma$ 를 정확하게 찾아내도록 한다.  $m=p+q$ 임을 고려하여 앞에서 언급된 단위 충격응답함수의 푸리에 계수인 식 (6)에  $\nu=p$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} H_p &= \frac{A}{j} \left[ \frac{1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)/n}]} - \frac{1 - e^{-(\sigma T + 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T + 2\pi(2p+q))/n}]} \right] \\ &= \frac{A}{j} [U_{p,m} - U_{p,-m}] \end{aligned} \quad (24)$$

단,

$$\begin{aligned} U_{p,m} &= \frac{1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)/n}]} \\ U_{p,-m} &= \frac{1 - e^{-(\sigma T + 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T + 2\pi(2p+q))/n}]} \end{aligned}$$

이 되고,  $\nu=p\pm 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} H_{p\pm 1} &= \frac{A}{j} \left[ \frac{1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T - 2\pi(q\pm 1))/n}]} - \frac{1 - e^{-(\sigma T + 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T + 2\pi(2p+q\pm 1))/n}]} \right] \\ &= \frac{A}{j} [U_{p\pm 1,m} - U_{p\pm 1,m}] \end{aligned} \quad (25)$$

단,

$$\begin{aligned} U_{p\pm 1,m} &= \frac{1 - e^{-(\sigma T - 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T - 2\pi(q\pm 1))/n}]} \\ U_{p\pm 1,-m} &= \frac{1 - e^{-(\sigma T + 2\pi q)}}{n[1 - e^{-(\sigma T + 2\pi(2p+q\pm 1))/n}]} \end{aligned}$$

를 얻는다. 그리고 위의 두 푸리에 계수의 절대값의 비를  $R_{\pm}$ 로 정의하면,

$$R_- = \left| \frac{H_p}{H_{p-1}} \right| = \left| \frac{U_{p,m} - U_{p,-m}}{U_{p-1,m} - U_{p-1,-m}} \right| \quad (26a)$$

$$R_+ = \left| \frac{H_p}{H_{p+1}} \right| = \left| \frac{U_{p,m} - U_{p,-m}}{U_{p+1,m} - U_{p+1,-m}} \right| \quad (26b)$$

이 되고, 식 (26a),(26b)에서  $H_p, H_{p\pm 1}$ 는 스펙트럼으로부터 알 수 있는 값이므로, 결국 미지수는 감쇠율  $\sigma$ 와  $q$ 뿐이

다. 따라서 이 두 식을 연립하여  $\sigma$ 와  $q$ 를 구할 수 있다. 그러나 이 식에서 수치적으로는 해를 구하기 어려우므로 컴퓨터 프로그램에 의한 반복 계산법으로 구해야 한다. 그러기 위해서 식 (26a), (26b)을  $\sigma$ 와  $q$ 에 관한 함수식으로 바꾸면 다음과 같아진다.

$$G_-(q, \sigma) = \left| \frac{U_{p,m} - U_{p,-m}}{U_{p-1,m} - U_{p-1,-m}} \right| - R_- = 0 \quad (27a)$$

$$G_+(q, \sigma) = \left| \frac{U_{p,m} - U_{p,-m}}{U_{p+1,m} - U_{p+1,-m}} \right| - R_+ = 0 \quad (27b)$$

따라서 식 (27a), (27b)를 동시에 만족하는  $q$ 와  $\sigma$ 를 구하면 된다. 이는 이원 비선형 연립방정식에 대한 bisection법(이하 이변수 bisection법으로 표기함)을 이용하면 구할 수 있다. 감쇠가 없는 경우에는  $q$ 의 범위가 정해져 있지만, 감쇠가 있는 경우에는 그렇지 않으므로 이변수 bisection법을 사용하기 위해서는  $q$ 와  $\sigma$ 의 초기범위를 결정하는 것이 정확한 값의 수렴에 매우 중요하다. 따라서 본 논문에서는 이 초기값으로 앞서 언급한 근사식의 직접 계산 결과를 이용하였다. 이변수 bisection법<sup>(4)</sup>의 계산과정은 다음과 같다.

- (1)  $q$ 의 범위 ( $q_L, q_U$ )를 정한다.
- (2) 다음의 근  $\sigma_{qL}, \sigma_{qU}, \sigma_{qM}$ 을 일변수 bisection법으로 구한다.

$$G_-(q_L, \sigma_{qL}) = 0, \quad G_-(q_U, \sigma_{qU}) = 0, \quad G_-(q_M, \sigma_{qM}) = 0$$

단,

$$q_M = \frac{q_L + q_U}{2}$$

- (3)  $G_+(q_L, \sigma_{qL}) \cdot G_+(q_M, \sigma_{qM}) < 0$ 이면  $(q_U, \sigma_{qU}) \leftarrow (q_M, \sigma_{qM})$   
 $G_+(q_U, \sigma_{qU}) \cdot G_+(q_M, \sigma_{qM}) < 0$ 이면  $(q_L, \sigma_{qL}) \leftarrow (q_M, \sigma_{qM})$
- (4) 수렴할 때까지 ②~③을 반복한다.

이상과 같은 방법으로  $q$ 와  $\sigma$ 를 구하고 나면, 근사식의 직접계산법에서와 마찬가지로 식 (20)~(23)을 사용하여 구하고자하는 감쇠 고유진동수 및 비감쇠 고유진동수, 감쇠비, 그리고 진폭을 정확히 계산할 수 있다.

### 5. 수치해석 예

진폭  $A=1.0$ , 감쇠비  $\xi=0.1$ 을 갖는 신호를 기록시간  $T=1\text{sec}$ , 샘플링 개수  $n=2048$ 개로 하고, 인위적으로 여러 크기의 누설오차를 갖도록(Table 1에서 실제값의  $q$ 가

Table 1 Parameters estimated by direct method

	$f_d$	$\sigma$	$\xi$	$q$	$A$
실제값	47.6000	30.0586	0.1000	0.6000	1.0000
	47.8000	30.1849	0.1000	-0.2000	1.0000
	48.0000	30.3112	0.1000	0.0000	1.0000
	48.2000	30.4375	0.1000	0.2000	1.0000
	48.4000	30.5638	0.1000	0.4000	1.0000
예측값	47.6228	30.5605	0.1016	0.6229	1.0168
	47.8053	29.9195	0.0991	-0.195	0.9911
	48.0018	30.2325	0.0997	0.0018	0.9974
	48.2034	30.5489	0.1004	0.2034	1.0037
	48.4101	30.8683	0.1010	0.4101	1.0100

Table 2 Parameters estimated by iterative method

	$f_d$	$\sigma$	$\xi$	$q$	$A$
실제값	47.6000	30.0586	0.1000	0.6000	1.0000
	47.8000	30.1849	0.1000	-0.2000	1.0000
	48.0000	30.3112	0.1000	0.0000	1.0000
	48.2000	30.4375	0.1000	0.2000	1.0000
	48.4000	30.5638	0.1000	0.40000	1.0000
예측값	47.6000	30.0586	0.10000	0.60000	1.0000
	47.8000	30.1849	0.10000	-0.2000	1.0000
	48.0000	30.3112	0.10000	0.00000	1.0000
	48.2000	30.4375	0.10000	0.20000	1.0000
	48.4000	30.5638	0.10000	0.40000	1.0000

달라지도록  $f_d = \sqrt{1 - \xi^2} f_n$ 을 변화시키면서 식 (1)에 의하여 시간응답을 만들고, 이 시간 데이터를 디지털 푸리에 변환시켜 스펙트럼을 만들었다. 그리고 누설오차를 포함하는 스펙트럼 데이터를 입력으로 하여  $\sigma$ 와  $q$ 를 직접계산법과 반복계산법으로 추정하였다. 즉, 직접계산법에서는 식 (14)와 식 (19)를 이용하였으며, 반복계산법에서는 식 (27a)와 식 (27b)를 이변수 bisection법으로 추정하였다.  $\sigma$ 와  $q$ 가 추정되면 식 (20)~(23)에서 감쇠고유진동수  $f_d$ , 감쇠비  $\xi$ , 진폭  $A$ 를 예측할 수 있다. 직접계산법으로 본래 신호의 특성을 예측한 결과를 Table 1에 나타내었다. 근사식으로 구한 결과이므로 정확성이 다소 떨어지만 비교적 본래 신호를 잘 예측함을 알 수 있다. 그러나 누설오차가 클수록 ( $q$ 가 클수록)  $q$ 의 예측오차가 커짐을 알 수 있다. 그리고 정확식에 의한 반복계산법으로 구한 결과를 Table 2에 나타내었다. 반복계산법의 초기값으로 직접법에 의한 결과가 사용되었다. 실제 신호의 감쇠, 비감쇠 고유진동수, 감쇠비 및 진폭을 아주 정확히 추정함을 확인할 수 있다.

## 6. 결론

- (1) 디지털 푸리에 변환에서 감쇠를 갖는 1자유도 신호의 누설오차 원인을 분석하였다.
- (2) 누설오차를 개선하기 위한 직접계산법과 반복계산법을 제시하였다.
- (3) 직접계산법은 누설오차가 큰 신호일수록 예측오차가 커지지만, 반복계산법은 누설오차의 크기에 관계없이 정확히 예측함을 알 수 있었다.
- (4) 직접계산법의 결과를 반복계산법의 초기치로 사용하면 유용함을 알 수 있었다.
- (5) 본 연구를 다자유도 신호로 확장할 필요가 있다.

## 후 기

본 연구는 산학협동재단 2000년도 학술연구비의 지원에 의하여 연구되었습니다.

## 참 고 문 헌

- (1) John C. Burgess, "On Digital Spectrum Analysis of Periodic Signals", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 58, No. 3, 1975, pp. 556~567.
- (2) Huang Dishan, "Phase Error in Fast Fourier Transform Analysis", Mechanical System and Signal Processing, 1995, 9(2), pp. 113~118.
- (3) 정의봉, 장진혁, 장다운, 1999, "디지털 푸리에 변환에서 비감쇠 신호의 누설오차 개선에 관한 연구", 대한기계학회 1999년 추계학술대회 논문집A, pp. 761~766.
- (4) 홍준표, 1994, "컴퓨터 수치해석", 문운당.