

국부변수 조절을 통한 프레임의 탄소성 하중-제하 비선형 해석

Elasto-plastic Loading-unloading Nonlinear Analysis of Frames by Local Parameter Control

박 문 식*

Park, Moon-Shik

(논문접수일 : 2000년 7월 18일 ; 심사종료일 : 2001년 11월 2일)

요 지

대변형 탄소성 프레임의 해석은 운동학적, 재질적, 수치해법상으로 매우 복잡하여 정확하고 효율적인 요소나 알고리즘이 부족하다. 본 논문에서는 3차원 보요소에 대하여 봉이론으로부터 유한요소를 만들고 소성을 적용하기 위하여 Cauchy 응력과 공학적변형률을 구성방정식에 적용하는 방법으로 객관화된 증분해법에 의한 보요소를 제안하였다. 특히 항복조건을 만족시키기 위하여 정확하고도 효율적인 소성방정식의 적분법을 개발하고 적용하였으며 연속법과 일차원 탐색 등을 고려하여 광역수렴성과 2차 수렴속도를 갖는 수치해법을 개발하고 예제를 통하여 확인하였다.

핵심용어 : 보요소, 기하학적비선형, 소성방정식, 연속법

Abstract

Even today, accurate and efficient algorithms for the large deformation analysis of elastoplastic frame structures lack due to the complexities of kinematics, material nonlinearities and numerical methods to cater for. The author suggests appropriate beam element based upon the incremental formulation from the 3D rod theory where Cauchy stress and engineering strain are variables to incorporate plasticity equations so that objectivity may be satisfied. A return mapping method which can integrate and satisfy yield criteria efficiently is suggested and a continuation method which has global convergency and quadratic speed is developed as well. Loading-unloading example problems are tested and the ideas are proved to be valuable.

Keywords : beam element, geometric nonlinearity, plasticity equation, continuation method

1. 서 론

금속 프레임 구조물의 탄소성 대변형 해석은 경량화된 자동차, 항공기, 선박, 해양구조물의 대변위 거동 및 충돌 등으로 인한 구조물 거동의 분석에 꼭 필요한 기술이다. 그러나 컴퓨터의 발전에도 불구하고 이러한

시뮬레이션 기술은 운동학적 비선형성 및 재료의 비선형성으로 인하여 정확하고 효율적인 계산법이 드문 실정이다. 또한 수치해석에 있어서도 평형경로상에 나타나는 강성도의 특이성(singularity)으로 인해 유한요소법에서 필수적인 강성행렬의 해를 구할 수 없게 되는 등 이를 극복할 수 있는 알고리즘을 필요로 하게 된다.

* 정회원 · 한남대학교 기계공학과, 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 3월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

재질의 거동에 있어서는 금속에 대한 소성조건을 만족 시켜야 하는데 기하학적 비선형성과 맞물려 이중으로 반복법(iteration)을 적용하게 되므로 이에 대한 효율 개선이 필요하다. 하중을 부여하는 과정상 정확한 평형을 유지하면서 변형을 진행시켰다면 일정 지점에 다달았을 때 역으로 제하(unloading)시킴으로써 결국 스프링백 혹은 잔류응력을 얻을 수 있는데 대변형 프레임에 대한 이러한 연구도 미약한 실정이다.

관련된 각 분야의 연구들을 살펴보면, 먼저 프레임 구조물의 모델링에 적합한 보요소(beam element)의 기하학적 비선형 정식화는 주로 벡터가 아닌 직교행렬로 표시되는 회전(rotation)의 처리와 변위 및 회전으로부터 유도되는 변형률, 그리고 선형탄성 응력-변형률 관계식을 적용한 변분방정식의 유도와 증분화 기법을 사용한다. 정식화는 연속체 방정식을 보요소로 응축하여 Lagrangian 법을 쓰는 경우와^{1),2)} 봉의 방정식(rod equation)으로부터 일반화 변형률을 정의하고 weak form을 만드는 경우가^{3),4)} 있다. 이들은 모두 기준좌표계의 설정에 따라 서로 다른 변형률 및 응력을 쓰게 되어 있고 사용코자 하는 재질의 가용한 구성방정식의 유형에 따라 상호간의 변환의 계산이 동반되므로 정확성 및 효율성에 있어서 서로 차이가 난다. 특히 공학적변형률에 대해서만 정의되는 소성(plasticity)의 항복조건(yield criteria)의 경우에는 대변형 보요소의 변분화가 매우 제한되고 엄밀한 변형률과 응력을 적용하여야만 효율적인 증분해석이 가능한데 이에 대한 연구는 미흡하였다.

연속체에 대한 탄소성 구성방정식의 적분은 미소증분에 대해서 일반화중간점(generalized mid-point) 알고리즘이 정립되었다.^{5),6)} 그러나 Newton-Raphson 법을 쓰게되는 대변형 해석에서는 증분이 커야 하중-변위 경로를 추적하는 계산시간이 줄어들게 되는데 이 경우 접선강성행렬에 들어가게 되는 구성방정식의 미분항이 구성방정식의 적분알고리즘과 맞지 않아 수렴이 되지 않는 경우가 있다. 따라서 증분이 큰 경우에도 수렴성이 좋아지도록 적분알고리즘 및 접선강성행렬의 계산을 개선할 필요가 있다.

하중-변위 경로상에서 극한점(limit)이나 분기점(bifurcation)을 지나게 되는데 이 때 강성행렬의 특이성을 나타내는 자유도를 선택하여 경로를 조절해주는 제한조건을 추가하는 방법으로 해석을 진행하는 연속법(continuation)이 연구되었다.⁷⁾ 따라서 이러한

알고리즘을 프레임구조물의 대변형 유한요소 해석에 맞게 적용하는 것이 필요하며 축차과정중의 발산도 막기 위하여 일차원 탐색등을 도입하면 수렴을 보장할 수 있는데 이에 대한 시도가 요구된다. 국부 자유도를 역방향으로 조절하면 제하를 시킬 수 있는데 스프링백 동안에도 기하학적 비선형을 겪으므로 증분 축차법에 의해 평형을 맞추어 주어야 한다. 제하를 계속하여 하중이 영이 되는 점에서의 응력을 구하면 바로 잔류응력을 얻게 된다.

본 논문에서는 봉이론 방정식으로부터 유도된 변분방정식을 이용하며 소성의 적용이 가능하도록 Cauchy 응력과 공학적변형률을 적용하여 물질객관성(material objectivity)이 정확히 만족되도록 정식화를 유도하고 큰 증분에 대해서도 수렴이 되도록 일반화 중간점 알고리즘을 개선하며 이를 국부 자유도 조절을 통한 연속법을 사용함으로써 하중-제하 대변형 프레임 구조물의 해석이 가능하도록 하고자 한다.

2. 보요소의 유한요소 정식화

2.1 보요소 정식화

초기에 길이가 L 이고 단면적이 A 인 그림 1과 같은 직선 각주형(prismatic) 보요소의 변형을 표현하기 위한 운동학을 기술하자. 보요소 단면의 도심을 지나는 중립선상의 한점에 직교좌표계를 생각하고 그 좌표의 단위벡터를 $\{E_i, i=1,2,3\}$ 라고 하면 이들은 변형중 단면 왜곡이 없고 따라서 평면으로 유지됨을 가정하면 그림 1에서와 같이 $\{t_i, i=1,2,3\}$ 으로 된다. 그러나 단면의 전단은 허용하므로 t_i 는 변형된 중립축과 접선일 필요는 없다. 변형후의 보요소 임의점의 위치벡터를 초기의 좌표값 (X_1, X_2, S) 으로 표기하면 다음과 같다.

$$x(X_1, X_2, S) = x_0(S) + X_\alpha t_\alpha(S) \quad \alpha = 1, 2 \quad (1)$$

여기서 x_0 는 변형된 중립축의 위치를 나타내며 E_i 가 회전하여 t_i 가 되었으므로 다이아딕(dyadic) 곱 \otimes 을 이용하면 직교변환행렬은 $R = t_i \otimes E_i$ 로 표시된다. 따라서 변형된 중립축의 곡률텐서(외대칭행렬 \tilde{K} 혹은 크로스(cross) 곱 $K \times$) 및 변형률벡터 Γ 는 다음과 같이 표현된다.³⁾

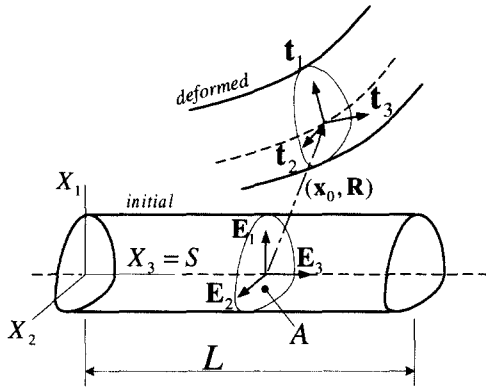


그림 1 각주형 보요소의 변형 형상

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \times = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{dS} \quad (2)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{x}_0}{dS} - \mathbf{E}_3 \quad (3)$$

기본적인 운동학적 관계식 (1), (2), (3)을 이용하면 다음과 같은 변형미분텐서들을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}_{,\alpha} \otimes \mathbf{E}_\alpha + \mathbf{x}_{,3} \otimes \mathbf{E}_3 = \mathbf{R}[\mathbf{1} + (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{K} \times \mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_3] \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{1} = (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{K} \times \mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_3 \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{L} = \mathbf{R}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ 이다. 소성 구성방정식에 적합한 응력-변형률 모델은 변형률 자체는 크지 않지만 변위 및 회전은 큰 경우를 가정하면 Lagrangian 변형률텐서 Ψ 와 공학적변형률텐서 $\tilde{\mathbf{e}}$ 를 같다고 놓고 즉,

$$\Psi = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \cong \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \tilde{\mathbf{e}} \quad (6)$$

이므로 재관화 Cauchy 응력 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 과 공학적변형률 $\tilde{\mathbf{e}}$ 을 소성방정식 혹은 유동법칙에 적용할 수 있다.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} = \mathbf{L} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cong \mathbf{R}^T \mathbf{P} \quad (7)$$

여기서 기호 : 는 내적(inner product)이고 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 는

Cauchy 응력텐서를, \mathbf{P} 는 제1의 Piola-Kirchhoff 응력을 의미하며 \mathbf{L} 는 탄성재질의 경우는 Lamé 상수들로 이루어진 4차 구성텐서(constitutive tensor)이다. 탄소성인 경우의 구성텐서는 다음절에서 유도하기로 한다.

한편 봉이론과 관련시키기 위하여 식(7)에 의한 단면의 합력은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{n} = \int_A \mathbf{T}_3 dA; \quad \mathbf{N} = \mathbf{R}^T \mathbf{n} = \int_A \tilde{\mathbf{s}}_3 dA \quad (8a, 8b)$$

$$\mathbf{m} = \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{T}_3 dA; \quad \mathbf{M} = \mathbf{R}^T \mathbf{m} = \int_A \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{s}}_3 dA \quad (9a, 9b)$$

여기서 $\mathbf{T}_3 = \mathbf{P} \mathbf{E}_3$ 는 3방향의 트랙션벡터이며 $\tilde{\mathbf{s}}_3 = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{E}_3 = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{,3} \mathbf{E}_i$, $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times$ 와 같은 표기법이 사용되었다. 벡터 $\tilde{\mathbf{s}}_3$ 는 전단응력 2개와 수직응력 1개를 갖는 벡터로써 보요소의 단면의 응력성분을 갖고 있다. 따라서 식(7)은 벡터형으로 변형률 벡터를 $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{\Gamma} + \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{K} = 2\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha 3} \mathbf{E}_\alpha + \tilde{\mathbf{e}}_{33} \mathbf{E}_3$ 로, $\mathbf{C}_3 = \text{Diag}(G, G, E)$ 로 놓고 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{s}}_3 = \mathbf{C}_3 \tilde{\mathbf{e}}_3 \quad (10)$$

봉이론은 위 식에서 정의된 내력합력과 외력벡터 $\bar{\mathbf{n}}$, 외력모멘트 $\bar{\mathbf{m}}$ 를 사용하면 다음과 같이 벡터방정식으로 표현된다.

$$\frac{d\mathbf{n}}{dS} + \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{dS} + \frac{d\mathbf{x}_0}{dS} \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{0} \quad (12)$$

식(11), (12)의 weak form을 식(8), (9), (10)을 대입하여 구하고 증분변위 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta \mathbf{x}_0, \Delta \boldsymbol{\theta})$ 에 대해 Taylor 급수에 의한 선형화를 도입하면 표준 유한요소법의 절차를 따라 다음과 같이 요소 증분 평형방정식을 얻을 수 있다.³⁾

$$([\mathbf{k}_{ab}^M] + [\mathbf{k}_{ab}^G]) \{\Delta \mathbf{x}_b\} = \{\mathbf{p}_a\} - \{\mathbf{f}_a\} \quad (13)$$

여기서 a, b 는 보요소의 절점을 나타낸다. 식(13)의 해 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta \mathbf{x}_0, \Delta \boldsymbol{\theta})$ 를 이용한 형상개정은 중립축의 위치벡터는 $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_0$ 와 같이 더해지나 회전은 $\exp(\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 로써 회전증분벡터 $\Delta \boldsymbol{\theta}$ 의 외대칭행렬 $\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 을 exponential 사상 및 복합변환을 해야 한다. 실제 프로그램상에서는 \mathbf{R} 을 저장하지 않고 quaternion 표기법을 사용하면 메모리를 줄일 수 있다. 식(13)의 상첨자 M 는 재질점선강성행렬을, G 는 기하점선강성행렬을 나타내었고 서브행렬 및 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{k}_{ab}^M = \int_L \mathbf{B}_a^T (\Delta \mathbf{A} \Delta^T) \mathbf{B}_b dS \quad \mathbf{k}_{ab}^G = \int_L \mathbf{V}_a^T \mathbf{S} \mathbf{V}_b dS \quad (14a, b)$$

$$\mathbf{p}_a = \int_L N_a \left\{ \frac{\bar{\mathbf{n}}}{\bar{\mathbf{m}}} \right\} dS \quad \mathbf{f}_a = \int_L \mathbf{B}_a^T \left\{ \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{m}} \right\} dS \quad (14c, d)$$

또한 위 식들에서 $N_a, \mathbf{B}_a, \mathbf{V}_a$ 는 각각 절점 a 의 형상함수, 변형률-변위관계행렬, 변위미분행렬이고 \mathbf{S} 와 $\mathbf{\Lambda}$ 는 응력합력조합행렬과 직교행렬조합행렬로서 모두 다음과 같다.

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{dN_a}{dS} \mathbf{1} & \frac{dN_a}{dS} \tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{0} & \frac{dN_a}{dS} \mathbf{1} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} \frac{dN_a}{dS} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{dN_a}{dS} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & N_a \mathbf{1} \end{bmatrix}_{9 \times 6} \quad (15a, b)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{n}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{m}}^T \\ \tilde{\mathbf{n}} & \mathbf{0} & \mathbf{n} \otimes \frac{d\mathbf{x}_0}{dS} - (\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{x}_0}{dS}) \mathbf{1} \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (15c, d)$$

한편 식(14a)에서 행렬 \mathbf{D} 는 식(10)을 식(8)과 (9)에 대입하므로써 다음과 같이 얻어지는 것으로써

$$\Delta \mathbf{N} = \int_A \mathbf{C}_3 \Delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_3 dA = \int_A \mathbf{C}_3 (\Delta \boldsymbol{\Gamma} + \tilde{\mathbf{L}}^T \Delta \mathbf{K}) dA \quad (16a)$$

$$\Delta \mathbf{M} = \int_A \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{C}_3 \Delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_3 dA = \int_A \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{C}_3 (\Delta \boldsymbol{\Gamma} + \tilde{\mathbf{L}}^T \Delta \mathbf{K}) dA \quad (16b)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{N} \\ \Delta \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{\Gamma} \\ \Delta \mathbf{K} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D} = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_3^T \tilde{\mathbf{L}}^T \\ \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{C}_3 & \tilde{\mathbf{L}} \mathbf{C}_3 \tilde{\mathbf{L}}^T \end{bmatrix} dA \quad (16c, d)$$

식(16d)에서 탄성인 경우 상수행렬이지만 소성을 포함하는 경우 다음절에서 구해질 탄소성영역에 대해 단면적분을 필요로 한다. 식(14)들의 수치적분은 선형 형상함수를 쓰는 요소의 경우 완전적분, 즉 2점 적분에서는 과도한 전단변형에너지로 인한 잠김(locking) 현상이 나타나므로 감차적분을 해야 함을 상기하자.

2.2 소성방정식의 적분법

본 절에서는 식(13)을 풀어서 얻은 형상증분 값을 가지고 얻은 새 형상이 요소의 각 점에서 탄성 혹은 소성인가에 따라 소성인 경우 항복조건을 만족시켜 주는 탄소성 구성방정식의 적분법 즉 항복면으로의 재귀사상(return mapping) 알고리즘과 이로부터 식(16d)의 구성행렬에 대입하도록 하여 식(13)의 재질점선강성행렬의 정확도 및 연속법상의 수렴속도를 높여 주는 방법을 강구하고자 한다.

여기서는 연속체요소에 대해 정립된 일반화중간점 알고리즘을 보요소에 맞도록 응축(degeneration)시키고 큰 증분에 대해서도 수렴이 되도록 적분법을 개선할 것이다. 다루게 될 재료의 모델은 von Mises의 J_2 소성론이며 등축(isotropic) 및 운동학적(kinematic) 경화가 있는 것이다. 상첨자 e 는 탄성부분을, 상첨자 p 는 소성부분을 나타내는 흔히 쓰이는 표기법을 이용하면 연속체에 대한 적분문제는 다음과 같은 미분방정식을 푸는 것이다.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^p \quad (17a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \mathbf{L}_{ijkl} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{kl}^e \quad (17b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}} \quad (17c)$$

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \boldsymbol{\alpha}_{ij}, \rho) = \left[\frac{3}{2} (\boldsymbol{\sigma}'_{ij} - \boldsymbol{\alpha}'_{ij}) (\boldsymbol{\sigma}'_{ij} - \boldsymbol{\alpha}'_{ij}) \right]^{1/2} - \rho (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (17d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} = \frac{2}{3} H_\alpha \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}^p \quad (17e)$$

$$\dot{\rho} = H_p \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (17f)$$

여기서 기호 '는 편차텐서, ϕ 는 항복조건식이며 α_{ij} 는 운동학적경화모델에서 정의되는 중심이동텐서를, ρ 는 등축경화모델에서 정의되는 항복면의 반경이고 이들의 경화계수는 각각 H_α, H_p 이며 혼합모델에 대해서는 $H_\alpha = \zeta H, H_p = (1-\zeta)H$ 로 쓰고 인장시험에서 $H = EE_T / (E - E_T)$ 와 같이 얻는다. 그리고 식(17)들에서 $\bar{\epsilon}^p$ 는 유효소성변형률이며 γ 는 소성을 구별해주는 파라미터로써 탄소성 모두에 대해 다음과 같은 Kuhn-Tucker 부등제한식을 항상 만족시켜야 한다.

$$\phi \leq 0; \dot{\phi} = 0; \dot{\gamma} \geq 0 \quad (18a,b,c)$$

식(17), (18)을 보요소로 응축시키기 위해 보이론의 역학조건 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{12} = 0$ 을 이용하고 운동학적 조건 $\dot{\epsilon}_{kk}^p = 0$ 이 되도록 $\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_{22}^p = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{33}^p$ 로 가정하고 독립변수들만 모아 텐서표기법을 프로 그래밍에 유리하도록 벡터표기로 $\sigma = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\}^T, \alpha = \{\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}\}^T, \epsilon = \{\epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}\}^T$ 로 바꾸면 다음처럼 정리된다.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (19a)$$

$$\dot{\sigma} = C\dot{\epsilon}^e \quad (19b)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} m(\sigma, \alpha) \quad (19c)$$

$$\phi = (\xi \cdot P\xi)^{1/2} - \rho(\bar{\epsilon}^p) \quad (19d)$$

$$\alpha = \dot{\gamma} H_\alpha Qm(\sigma, \alpha) \quad (19e)$$

$$\dot{\rho} = \dot{\gamma} H_p \beta(\sigma, \alpha) \quad (19f)$$

여기서 기호 \cdot 는 닷트(dot) 곱이고

$$C = \text{Diag}(2G, 2G, E), \quad \xi = \sigma - \alpha = \{\xi_{13}, \xi_{23}, \xi_{33}\}^T,$$

$$P = \text{Diag}(3, 3, 1), \quad Q = \text{Diag}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1) \text{이며}$$

$$m = \partial\phi/\partial\sigma = P\xi/(\xi \cdot P\xi)^{1/2}, \quad \beta = \partial\bar{\epsilon}/\partial\gamma$$

이고 응력을 편차텐서로 변환하지 않았고 따라서 항복면은 타원체면이 된다. 한편 식(18)의 소성조건식은 식(19)를 이용하면 $\omega = m \cdot Qm$ 라 할 때 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\gamma} = m \cdot C\dot{\epsilon} / (m \cdot Cm + \omega H_\alpha + \beta H_p) \text{ if } \phi = 0; \\ \dot{\gamma} = 0 \text{ if } \phi < 0 \quad (20a,b)$$

응축된 미분방정식(19)와 (20)이라 할지라도 매우 많은 적분변수를 갖게 된다. 앞으로의 복잡한 수식전개를 위해 또 한번 표기법을 $\Sigma = \{\sigma^T, \alpha^T, \rho\}^T, E = \{\epsilon^T, 0^T, 0\}^T$ 로 사용하면 식(19)는 다음과 같이 된다.

$$\dot{\Sigma} = G(\dot{E} - \dot{\gamma} \nabla\phi) \quad (21a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\nabla\phi \cdot G\dot{E}}{\nabla\phi \cdot G \nabla\phi} \quad (21b)$$

여기서 $G = \text{Diag}(C, H_\alpha Q, H_p \beta), \nabla\phi = \partial\phi/\partial\Sigma = \{m^T, -m^T, -1\}^T$ 이다. 응력과 변형률에 대해서는 $\dot{\sigma} = C^{ep}\dot{\epsilon}$ 와 같이 표현되는 것처럼 $\dot{\Sigma} = G^{ep}\dot{E}$ 로 표현한다면 보요소에 대한 시간미분항의 탄소성구성행렬은 다음과 같이 계산된다.

$$G^{ep} = G - \frac{G \nabla\phi \otimes G \nabla\phi}{\nabla\phi \cdot G \nabla\phi} \quad (22)$$

이제 식(21)을 사용하여 적분하는 알고리즘을 전개한다. 현재 상태에서 Σ_n, E_n 및 γ_n 을 알고 있고 식(13)을 풀어 $\Delta E = E_{n+1} - E_n$ 를 구했다면 제안할 일반화 중간점 알고리즘은 다음과 같다.

초기값 설정:

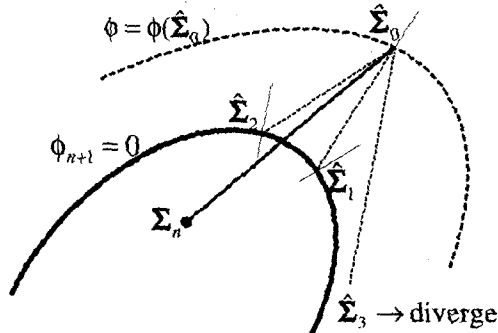
$$\hat{\Sigma}_0 = \Sigma_n + \tau G(\Sigma_n) \Delta E, \quad \gamma_0 = \gamma_n, \quad \phi_0 = \phi(\hat{\Sigma}_0) \quad (23a)$$

항복면 에러조절 값 설정:

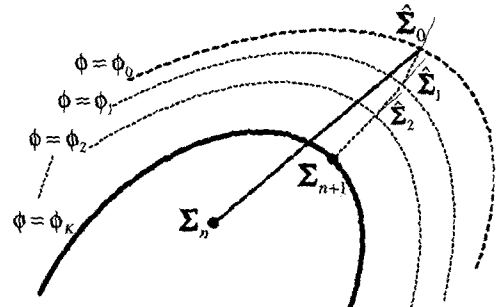
$$\{\phi_k | \phi_0 > \phi_1 > \dots > \phi_K = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K\} \quad (23b)$$

각각의 k 에 대해 다음을 계산:

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} + \Delta\gamma \quad (23c)$$



(a) 일반적 항복면 알고리즘



(b) 제안된 항복면 알고리즘

그림 2 탄소성 적분 알고리즘의 비교(타원형 항복면이고 경화가 없는 경우)

$$\hat{\Sigma}_k \approx \hat{\Sigma}_{k-1} + \Delta \hat{\Sigma} \quad (23d)$$

여기서, $\Delta \hat{\Sigma} = -\Delta \gamma \mathbf{G}(\hat{\Sigma}_k) \phi(\hat{\Sigma}_k)$ 이고

$$\phi(\hat{\Sigma}_k) = \phi(\Delta \gamma) = \phi_k \quad (23e)$$

$k = K$ 가 되면

$$\Sigma_{n+1} = \hat{\Sigma}_K; \phi(\Sigma_{n+1}) = \phi_K = 0; \gamma_{n+1} = \gamma_K \quad (23f)$$

여기서 식(23c)의 $\Delta \gamma$ 값은 식(23e)의 두 번째 방정식을 만족하도록 구하는데 이 방정식은 식(23d)를 식(19d)에 대입하고 $\Delta \gamma$ 에 대해 정리하면 2차 방정식이 유도되고 근의 공식을 이용하여 음수인 해를 버리고 양수인 해를 취하면 된다. 이 방법은 증분이 큰 경우에도 항복면의 에러조절을 통하여 항복면 재귀가 가능하므로 기존의 방법들이 그림 2(a)와 같이 발산하는 것에 비해 그림 2(b)와 같이 수렴하게 된다. 한편 증분이 커진 경우 적분은 했다 하더라도 식(22)와 같은 구성행렬은 식(23) 알고리즘의 미분과는 상당히 다르다. 그러므로 식(14a)의 재질점선강성행렬이 부정확해지게 되는데 이로 인해 수렴하지 않을 수 있다. 본 논문에서는 수학적 유도과정을 통해 알고리즘 (23)에 맞게 $d\Sigma_{n+1} = \bar{\mathbf{G}}^{ep} dE_{n+1}$ 의 형태의 구성행렬 $\bar{\mathbf{G}}^{ep}$ 을 다음과 같이 구했다.

$$\bar{\mathbf{G}}^{ep} = \bar{\mathbf{G}} - \frac{\bar{\mathbf{G}} \nabla \phi(\hat{\Sigma}) \otimes \bar{\mathbf{G}} \nabla \phi(\hat{\Sigma})}{\nabla \phi(\hat{\Sigma}) \cdot \bar{\mathbf{G}} \nabla \phi(\hat{\Sigma})} \quad (24)$$

여기서 $\bar{\mathbf{G}} = [\mathbf{G}^{-1}(\hat{\Sigma}) + \tau \Delta \gamma \mathbf{W}^2 \phi(\hat{\Sigma})]^{-1}$ 이며 미소 증

분에 대해서는 ($\Delta \gamma \rightarrow 0$) 식(22)로 됨을 보일수 있다. 이제 이 식을 식(16d)에 맞도록 식(24)에서 $d\sigma_{n+1} = \bar{\mathbf{C}}^{ep} dE_{n+1}$ 에 해당하는 $\bar{\mathbf{C}}^{ep}$ 를 추출하고 이로부터 $\bar{s}_3 = \sigma_{n+1}$, $d\bar{s}_3 = \bar{\mathbf{C}}_3^{ep} dE_3$ 에 맞게 $\bar{\mathbf{C}}_3^{ep}$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\bar{\mathbf{C}}_3^{ep} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{A} \quad (25)$$

여기서 $\mathbf{A} = \text{Diag}(1/2, 1/2, 1)$ 이고 식(25)가 소성을 겪고 있을 때는 식(16d)의 $\mathbf{C}_3 \leftarrow \bar{\mathbf{C}}_3^{ep}$ 에 대입하면 된다.

3. 국부변수 조절 연속법

극한점 및 분기점등을 지날 수 있는 비선형 수치해법은 하중증분과 축차법에 의한 수정을 반복하는 Newton-Raphson 법에 의해서는 해결 될 수 없다. 여기서는 하중증분 대신에 문제가 되는 강성행렬의 특이성을 제거해 주는 자유도를 선택하여 제한식을 추가한 증가방정식(augmented equation)을 푸는 방법으로써의 예측자(predictor, Euler법), 그리고 광역수렴이 보장되도록 한 최적화 문제로 부터의 일차원 탐색을 통한 수정자(corrector, quasi-Newton법)를 조합한 일종의 원호길이법(arc length method)을 제안한다.

외부하중이 항상 어떤 기준하중 벡터에 비례하는 경우에 그 비례상수를 λ 라고 할 때 식(13)이 평형을 이루고 있는 상태에서는 다음과 같다.

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (26)$$

여기서 \mathbf{F} , \mathbf{P} 는 조립된 시스템 행렬로써 각각 응력의 합력벡터 및 기준하중벡터이고 \mathbf{R} 는 비평형량하중 벡터이다. 식(26)에서 \mathbf{x} 는 식(13)에서와 같이 변위 및 회전을 자유도로 하는 시스템 자유도 벡터이다. 식(26)과 같은 평형경로상에서 경로를 추적하기 위해 스칼라 방정식을 추가한다.

$$g = g(\mathbf{x}, \lambda, \eta) = 0 \quad (27)$$

여기서 η 는 의사(pseudo) 원호길이인 조절매개변 수로써 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\eta)$, $\lambda = \lambda(\eta)$ 인데 증가된 시스템자유도를 $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \lambda)$ 라고 하면 식(26), (27)의 단위접선벡터 \mathbf{T} 는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{y}}{d\eta} / \left\| \frac{d\mathbf{y}}{d\eta} \right\| \quad (28)$$

국부조절에 의한 연속법에서는 경로조절 식(27)로써 다음의 식을 사용한다.

$$g = \mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_n) - h = 0 \quad (29)$$

여기서 $h = (\eta - \eta_n)$ 로써 조절파라미터의 전진스텝 이고 \mathbf{e}_m 은 m -자유도 값이 1인 증가된 시스템의 단위 벡터이다. 따라서 식(26)과 (29)를 이용하여 식(28)의 단위접선벡터 \mathbf{T} 는 방향을 고려하여 다음과 같이 구한다.⁷⁾

$$\mathbf{T} = \Xi \frac{\dot{\mathbf{y}}}{\|\dot{\mathbf{y}}\|}; \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{P} \\ \mathbf{e}_m & \end{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

여기서 기호 $\dot{\cdot}$ 는 η 에 대한 미분이고 Ξ 는 부호 값 으로서 보통은 +1 이지만 분기점 통과시 $\dot{\mathbf{y}}$ 의 부호가 바뀌므로 해석을 전진시키려면 $\Xi = -1$ 로 해 주는 것이 다. 제하의 경우에는 전환점에서 한번 교의로 $\Xi = -1$ 로 해주거나 하중을 국부조절 자유도로 선택하여 하중 이 영이 될 때까지 진행한다. 한편 행렬식(30)에서 \mathbf{K} 및 \mathbf{P} 는 각각 식(26)의 \mathbf{x} 와 λ 에 대한 편미분임을 상 기하자. 극한점에서의 식 (30)은 조절자유도 m 을 적절 히 선택함으로써 풀 수 있는데 기본원리는 \mathbf{T} 의 성분

값의 크기를 보아 가면서 가장 큰 자유도를 택하되 그 자유도가 이미 사용중이면 감소중이면 그렇지 않은 다음으로 큰 성분의 자유도를 취한다. 스카이라인 강성 행렬에 대해 조절자유도 m 이 바뀌면서 식(30)을 효 윽적으로 풀 수 있는 알고리즘이 개발되어 있다.

이와 같이 선택된 조절 자유도와 식(30)에 의한 미 분값을 가지고 식(29)에 맞추도록 다음과 같이 오일러에 측 및 뉴턴수정을 진행한다.

$$\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{T}_n \quad \text{Euler step} \quad (31a)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{y} \quad k=1,2,\dots \quad \text{Newton step} \quad (31b)$$

여기서 n 은 마지막 평형점을 가리키고 상침자 (k)는 오일러단계로 인해 벗어나는 평형점을 찾아가는 과 정 즉, 측차를 가리킨다. 평형경로를 가급적 빨리 추적 하기 위해서는 식(31a)에서 전진스텝 h 값을 크게 하 면 좋는데 선형구간에서는 매우 크게하고 비선형이 심한 구간에서는 식(31b)에 의한 측차의 수가 약 3회~8회 가 되도록 한다. 또한 동일한 스텝에 대해서 측차 횟수 는 비선형성의 척도가 되기도 하므로 이를 이용하면 가 속 혹은 감속시킬수 있다.

뉴턴 단계 (31b)에서 $\Delta\mathbf{y}$ 의 결정은 광역수렴성 및 이차수렴속도를 얻기 위해 먼저 식(31a), (31b)를 식(26)에 대입하여 다음으로부터 \mathbf{d} 값을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{P} \\ \mathbf{e}_m & \end{bmatrix} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}(\mathbf{y}^{(k-1)}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

식(32)에 의해 계산된 벡터 \mathbf{d} 는 뉴턴량 혹은 탐색 방향으로써 사용되어 $\Delta\mathbf{y}$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\Delta\mathbf{y} = \kappa \mathbf{d}, \quad \kappa \in (0,1) \quad \text{descent line search} \quad (33a)$$

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{d} \quad \text{quadratic correction} \quad (33b)$$

식(33a)는 식(33b)에 의한 수정이 발산 혹은 진동 하는 경우 감소방향 \mathbf{d} 를 사용하여 일차원탐색에 의한 최적화문제 $\min. z = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{y} + \kappa \mathbf{d}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{y} + \kappa \mathbf{d})$ 의 해인 κ 를 이용한 것이다. 즉 기하학적 그리고 탄소성에 의한

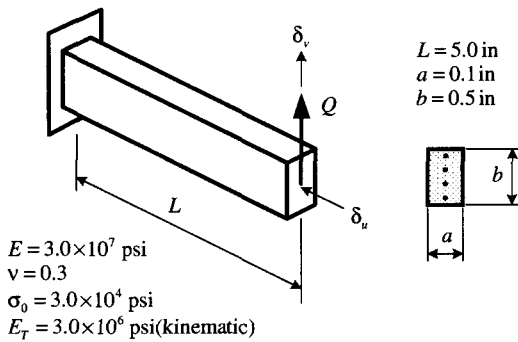
비선형성이 심한 문제의 경우 발산되지 않도록 식(33a)를 사용하여 수정해주고 해의 근처에서는 항상 (33b)를 사용하므로써 수렴이 보장되고 그 속도가 2차가 되는 연속법이 되는 것이다.

4. 수치해석 및 검증

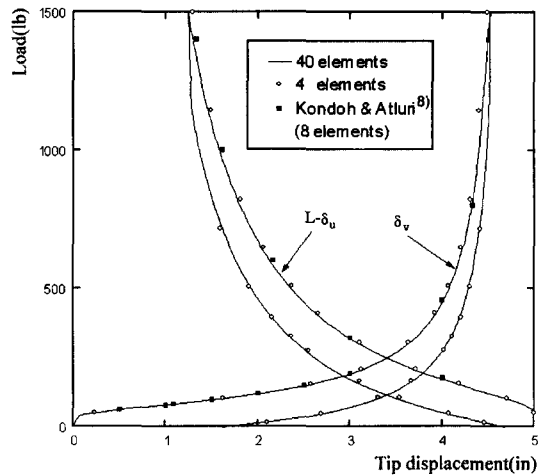
4.1 외팔보의 대변형 스프링백 해석

그림 3(a)와 같은 단순 외팔보에 수직하중을 작용시켜 대변형 탄소성 해석 및 스프링백과 잔류응력을 구

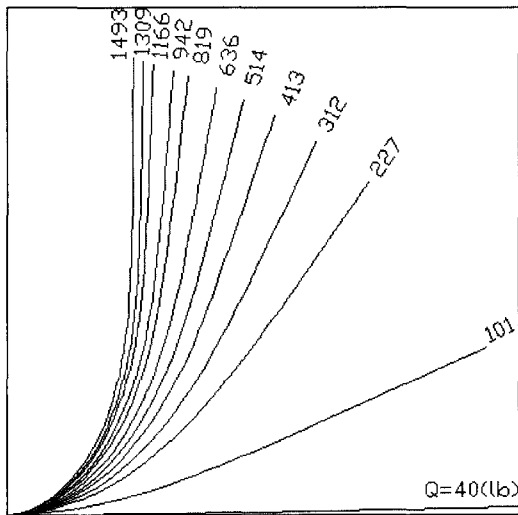
하고자 한다. 재질은 운동학적 경화를 겪는 탄소성 금속이고 물성치는 그림에 나와 있는 바와 같다. 변형은 1500lb 까지 하중을 주고 제거 했을 경우 이며 그림 3(b)에 하중-제하의 변위가 표시되어 있다. 여기에서 보면 소성변형으로 인한 히스테리 이력현상이 나타남을 알 수 있다. 이 문제는 하중이 가해지는 동안 변위에 대하여 구한 참고 값과⁸⁾ 비교하였는데 잘 일치함을 알 수 있다. 본 논문에서는 더 나아가 제하의 경우 및 그림 3(c)와 3(d)와 같은 변형-스프링백까지의 결과도 구할 수 있었다. 그림 3(e)에는 소성영역의 확산과 응력의 추이를 보여주고 있는데 여기서 문자 E는 탄성영역을,



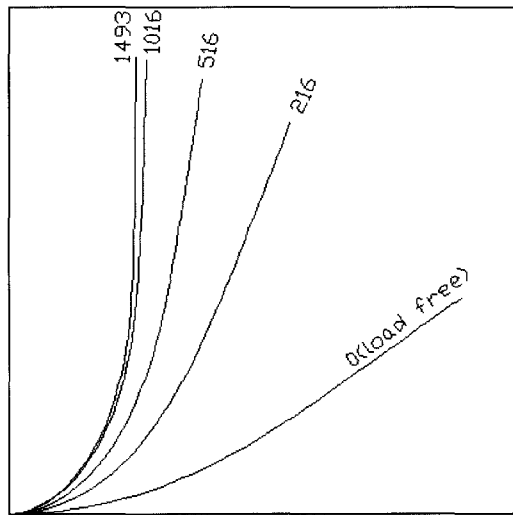
(a) 문제의 정의



(b) 해석된 평형경로의 하중-제하 사이클



(c) 하중 (loading) 동안의 변형



(d) 제하 (loading) 동안의 변형 및 스프링백

그림 3 외팔보의 대변형 스프링백 해석 (계속)

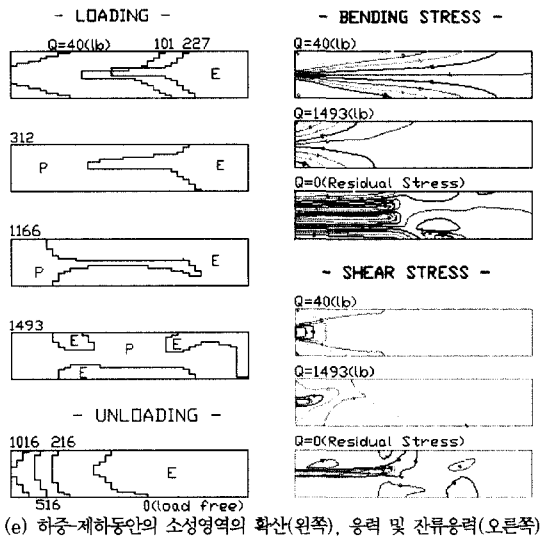


그림 3 외팔보의 대변형 스프링백 해석

문자 P는 소성영역을 가리킨다. 하중 초기 즉 Q=40lb에서는 대부분이 탄성영역이고 지지부 상하영역에 소성이 시작됨을 알 수 있다. 하중이 213, 1166, 1493 lb로 증가하면서 소성영역이 점점 많아지고 그 영역도 복잡한 모양을 하게 된다. 하중이 1493lb에서 0lb가 되는 동안에는 소성영역이 제거된다. 그림 3(e)의 오른쪽에는 축응력과 전단응력을 표시하였는데 하중동안 축응력은 최대 391ksi, 전단응력은 최대 51ksi까지 도달한다. 이는 초기항복응력이 30ksi였음을 감안하면 경화현상에 의한 것임을 알 수 있다. 스프링백 후 잔류응력은 일부 점에서 축응력이 최대 28ksi, 전단응

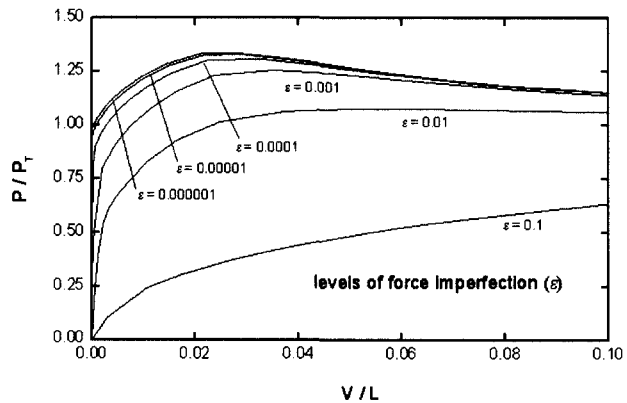
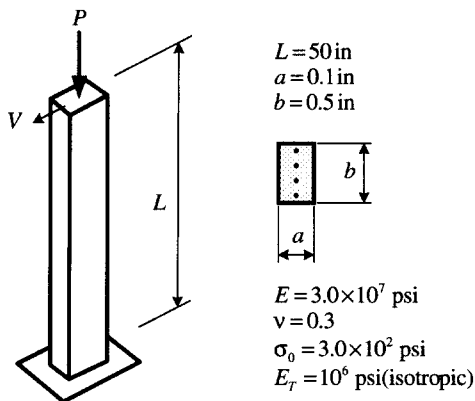


그림 4 기둥의 소성좌굴 해석

력이 최대 8.6ksi 정도 남았다.

4.2 기둥의 소성좌굴 해석

탄성이 아닌 변형경화를 겪는 재료로 된 기둥의 경우 압축하중을 받으면 탄성좌굴 즉, Euler 좌굴이 아닌 더 낮은 값에서 안정된 분기(bifurcation)인 소성좌굴을 겪는 것으로 알려져 있다. 여기서는 그림 4(a)와 같이 압축하중에 수직하는 미소비례하중의 불안전성을 주어 소성좌굴을 확인해 보기로 한다. 완전한 기둥에 대한 압축항복하중은 $P_0 = \sigma_0 A = 15 \text{ lb}$, Euler 좌굴하중은 $P_E = 493 \text{ lb}$ 이다. 불안전도 값 ϵ 을 영으로 접근시키면서 그 민감성 및 근사적인 분기점을 찾아본 것이 그림 4(b)이다. 하중경로가 매우 민감하게 바뀔 수 있고 $\epsilon = 0.01$ 에서는 거의 분기현상을 확인할 수 없을 정도이지만 $\epsilon = 10^{-6}$ 로 했을 때 양의 기울기를 갖는 분기점을 확인할 수 있다. 이 분기점은 Shanley의 점선강성좌굴하중 $P_T = 16.4 \text{ lb}$ 와 잘 일치하며 분기후에도 경로상에서 하나의 극한점을 발견할 수 있고 그 값은 $P/P_T \approx 1.34$ 에서 일어났다. 이 계산에서 13개의 보요소와 단면방향으로 20개의 적분점을 사용하여 계산의 정도를 높였는데 매우 복잡한 현상중의 하나인 소성좌굴의 이론해와 잘 일치하게 나왔다.

5. 결 론

대변위와 회전의 해석이 가능하고 탄소성 재질을 처리할 수 있도록 보요소를 개발하였다. 운동학적으로 회

전을 직교행렬로 처리하였고 Cauchy 응력과 공학적 변형률을 탄소성 구성방정식에 적용하여 정식화 함으로써 대변위와 소성을 접목시켰다. 수치해석상의 계산 시간의 단축을 위하여 큰 증분에서도 수렴이 좋은 소성방정식의 적분 알고리즘을 개발하였다. 예제를 통하여 소성적분 알고리즘이 잘 작동되며 비선형해석의 효율도 매우 좋음을 알 수 있었다. 또한 대변위 해석시 발생하는 분기점이나 극한점을 극복하면서 전체의 평형경로를 추적하기 위하여 국부자유도 조절에 의한 연속법을 제안하였다. 예제를 통하여 기하학적 비선형성, 소성방정식의 만족, 연속법에 의한 평형경로 추적등이 하중-제하 동안 모두 잘 진행이 되었고 스프링백을 시킴으로써 잔류응력을 얻을 수 있었다. 이는 보요소로써 3차원 유한요소해석과 비슷한 정도의 결과를 얻은 것으로써 매우 만족한 것으로 생각된다. 특히 본 논문에서 제안한 탄소성 구성방정식과 그 적분 알고리즘의 국부변수 조절을 통한 비선형 하중-경로의 추적법을 이용하면 또 다른 보나, 판, 셸 등의 구조요소에서 흔히 유도되는 타원형 항복조건을 잘 처리할 수 있을 것으로도 사료된다.

감사의 글

이 논문은 1999년도 한남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었습니다. 지원에 감사드립니다.

참고 문헌

1. K. J. Bathe and S. Bolourchi, "Large displacement analysis of three dimensional beam structures", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 14, 1979, pp.961~986
2. E. N. Dvorkin, E. Onate and J. Oliver, "On a nonlinear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 26, 1988, pp.1597~1613
3. J. C. Simo and L. Vu-Quoc, "A three dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, 1986, pp.79~116
4. A. Cardona and M. Geradin, "A beam finite element nonlinear theory with finite rotations", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 26, 1988, pp. 2403~2438
5. M. Ortiz and J. B. Martin, "Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: A unification of concepts", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 28, 1989, pp.1839~1853
6. J. C. Simo and S. Govindjee, "Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity", *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 31, 1991, pp.151~176
7. W. C. Rheinboldt and J. V. Burkardt, "A locally parameterized continuation process", *ACM Trans. Math. Softw.*, Vol. 9, 1983, pp. 215~235
8. K. Kondoh and S. N. Atluri, "Large-deformation, elastoplastic analysis of frames under non conservative loading, using explicitly derived tangent stiffness based on assumed stress", *Comput. mech.*, Vol. 2, 1987, pp.1~25.