다층 층간분리된 적층보의 자유진동해석

Free Vibration Analysis of Multi-Delaminated Beams

이 성 희* 박 대 효** 백 재 욱*** 한 병 기****
Lee, Sung-Hee Park, Tae-Hyo Baek, Jae-Wook Han, Byoung-Kee
(논문접수일 : 2001년 1월 19일 ; 심사종료일 : 2001년 6월 9일)

요 지

본 연구에서는 다층 층간분리된 적층보의 자유진동해석을 수행하였다. 적층보에 존재하는 다층 층간분리가 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위해 층간분리단에서의 연속조건을 유도하고, 층간분리된 각각의 분할보의 경계에서 유도된 연속조건을 이용하여 진동수 방정식을 유도하였다. 이론해석결과의 검증을 위해 범용 프로그램을 이용한 유한요소해석을 수행하였으며, 서로 잘 부합됨을 보였다. 고유진동수 변화는 다층 층간분리의 크기와 위치 및 형태에 따라 변하였다. 얻어진 결과로부터 다층 층간분리가 적층보의 동적특성에 미치는 민감도와 층간분리의 위치와 크기를 탐지하는데 활용될 수 있는 가능성을 제시하였다.

핵심용어 : 다층 층간분리, 적층보, 고유진동수, 반복관계, 진동수 방정식, 유한요소해석, 동적특성

Abstract

In the present study, free vibration analysis of multi-delaminated beams is performed. In order to investigate the effects of multi-delaminations on the dynamic characteristics of multi-delaminated beams, the general kinematic continuity conditions are derived from the assumption of constant curvature at the multi-delamination tip. Frequency equations of multi-delaminated beams are obtained by dividing the global multi-delaminated beam into beam segments and by imposing recurrence relation from the continuity conditions on each sub-beam. The comparisons between the results of numerical analysis obtained by finite element analysis and those of present analysis give good agreement with each other. It is shown that the effects of multi-delaminations on free vibration characteristics of laminated beams could be used to detect their sizes, types and locations from the results.

Keywords : *multi-delaminations, laminated beams, natural frequencies, recurrence relation, frequency equations, finite element analysis, dynamic characteristics*

1. 서 론

복합재료는 구조물의 성형, 제작과정 혹은 사용 중에 외부에서 가해지는 저속충격 등에 의해 육안으로 식별하기 어려운 섬유 파단(fiber breakage), 모재 변형 및 균열(matrix deformation and cracking), 섬유 박리(debonding), 섬유 인출(fiber pull-out), 층간분리(delamination) 같은 결함이 내부에 발생될 수 있다. 특히, 층간분리는 복합재 적층구조물에서 흔히 발생되는 파손형태이다. 복합재료의 충격시 충돌속

* 정회원 · 한국생산기술연구원, 선임연구원
** 정회원 · 한양대학교 토목공학과, 조교수
*** (주)승화이엔씨 기술연구소, 연구원
**** 정회원 · 홍익대학교 기계공학과, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 3월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

도가 충분히 크게되면 복합재료에는 국부적인 구멍이 발생하여 충격체가 뚫고 지나가지만 속도가 충분히 크지 않으면 외견상 손상이 보이지 않더라도 복합재료 내부에는 두 면의 섬유방향 차이에 의한 강성의 불일치로 층간분리가 발생될 수 있다. 층간분리 형태의 결함이 구조물에 존재하면 전체적인 강성과 강도가 저하되고 대칭 구조물에서도 층간분리 영역은 국부적인 비대칭 형태가 되어 굽힘/신장의 연계강성이 존재하여 기하학적인 비선형 거동을 유발한다. 이로 인해 적층 구조물은 좌굴 하중이 감소하게 되고 설계하중보다 낮은 하중에서 전체적인 파손이 야기 될 수 있다. 따라서 복합재 구조물의 안전한 사용을 위해서는 정적 및 동적 하중 또는 환경적인 영향에 의해 발생되는 다양한 형태의 손상들을 검출, 평가, 해석하는 것이 필수적이라 할 수 있다.

이를 위해 최근 기능적인 요소들을 복합재료와 통합함으로써 원위치손상검출(in-situation damage detection) 혹은 사용중 건전성 감시(in-service health monitoring)를 가능케 한 연구들이 활발히 행해지고 있다. 이러한 연구를 살펴보면 구조부재의 재료인자를 획득하기 위해 동적특성 결과를 이용한 비파괴 시험법으로의 활용연구[1]와 스트레인 게이지를 사용한 진동측정방법[2),3)]을 들 수 있다. 또한 구조물의 고유진동수를 측정함으로써 대략적인 결함의 위치 및 손상 정도를 찾을 수 있는 좀 더 구체적인 연구로는 Stamos 등[4]과 Cawley와 Adams[5]가 발표한 연구결과를 들 수 있다. 즉, 전체거동을 대변하는 고유진동수의 저하를 이용하여 손상된 적층 복합재 구조물의 건전성 여부를 평가할 수 있게 하는 도구로써 Stamos 등은 역방법(inverse method)을 제안했고, Cawley와 Adams는 모드매개변수(고유진동수, 감쇠비 및 모드형상)를 이용한 구조물의 사용성 여부 평가방법이 비파괴 검사방법으로 활용될 수 있음을 제시했다. 그러나 층간분리에 관한 진동특성 연구들에서는 적층 복합재 구조물에 발생할 수 있는 실제적인 층간분리 형상이나 특성이 고려되지 않고 단일 층간분리나 부재의 길이방향으로 한 부분만 존재하는 다층 층간분리로 한정되어 수행됨에 따라 실제 구조물에서 발생할 수 있는 모든 경우의 영향이 고려되지 못하였다. 일 예로 건설분야에서 적용되고 있는 교량의 이동하중이 고려된다면 보의 종방향으로 다양하게 존재하는 다층 층간분리 해석이 필수적이다.

따라서 본 연구에서는 양단고정과 양단단순지지 경계조건을 갖는 직교적층 적층보에 여러 형태의 다층 층간분리가 내재된 경우에 대하여 진동특성 변화를 살펴보고자 한다. 또한 적층 복합재 구조물의 고유진동수를 측정/비교를 통해 일정 사용시간동안의 안전성을 확보하고 구조물 내부에 결함이 존재할 경우 결함에 대한 크기와 위치 정보를 사전에 탐지할 수 있도록 진동해석을 이용한 이론 해석적 방법을 제시하고자 한다.

2. 이론의 정식화

다층 층간분리된 적층보의 회전관성 및 전단변형효과가 무시된 고유진동수를 평가하기 위해 Fig. 1과 같은 층간분리 모델에 대한 모드해석을 수행한다[6]. 이론해석을 위한 기하학적 형상은 Fig. 1에서 보이는 바와 같이 층간분리부는 보의 종방향으로 일정한 크기를 갖는다고 가정하고 층간분리에 따른 국부적인 연계강성(Bij)의 효과는 작다고 가정하여 본 연구에서는 고려하지 않는다. 적층보 내부의 층간분리로 인해 보는 다수의 영역으로 구분되는데 즉, 양단과 내부 그리고 층간분리가 존재하는 영역과 존재하지 않는 영역으로 구별되면서 내부영역에서 확장되어 나간다. 좌표축은 양단영역에서는 끝단에 원점이 존재하며 전체 층간분리가 존재하는 내부영역에서는 중앙에 원점이 존재한다. NT는 다층 층간분리된 보의 전체 영역의 개수를 의미하며, 각 영역(NR=…, j-1, j, j+1, …)은 nd개의 보로 구성된다.

적층판의 평형방정식에 고전적인 보의 가정을 적용하고 보의 두께 대 길이의 비가 작은 경우에는 회전관성과 전단변형의 효과를 무시할 수 있으므로 각각의 분리보의 운동방정식은 다음과 같다[7].

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1b}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x \tag{1c}$$

여기서, u와 w는 각각 x와 z방향의 변위, N_x, M_x, Q_x

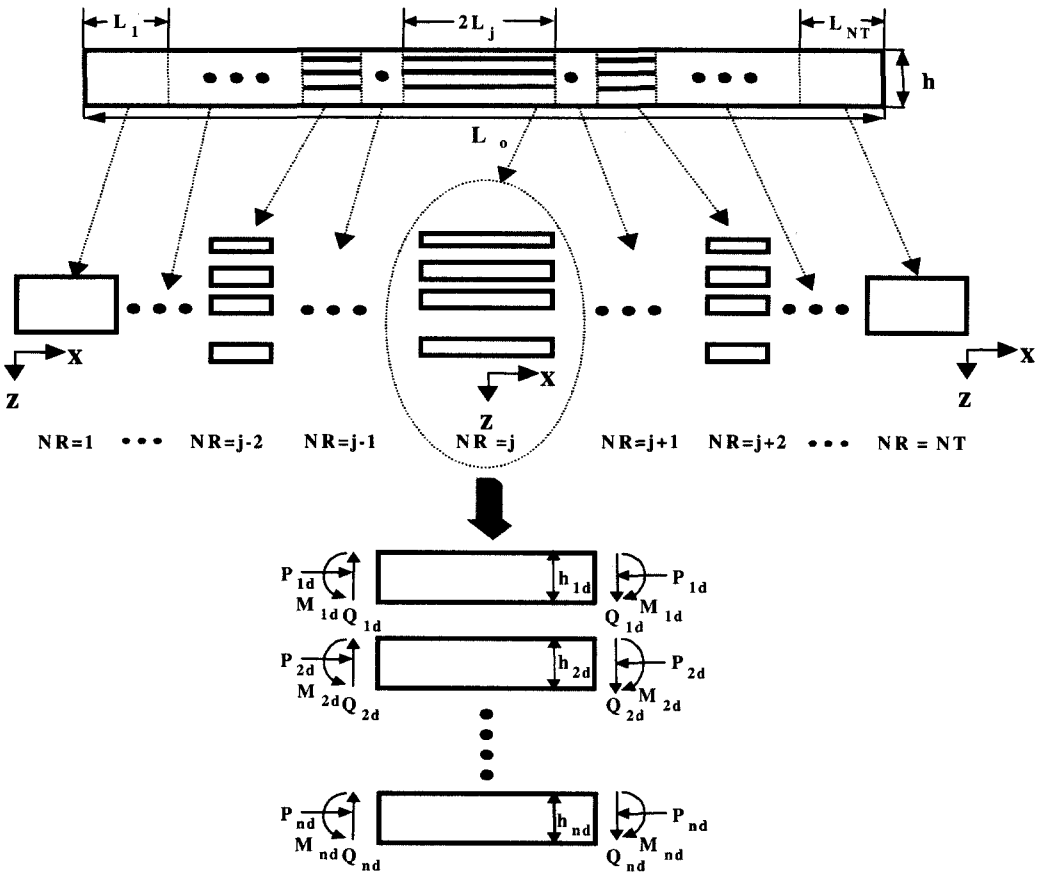


Fig. 1 Geometry and sign convention of multi-delaminated beam

는 각각 길이방향의 합력(resultant force), 합모멘트(resultant moment) 및 전단력(shear force) 성분이고, q는 분포하중, h는 적층보의 두께 그리고 ρ는 밀도이다. 합력과 합모멘트의 중립면에 대한 변형률 ε^o과 곡률 κ 관계는 다음과 같다.

$$N = A\varepsilon^o + B\kappa \tag{2a}$$

$$M = B\varepsilon^o + D\kappa \tag{2b}$$

여기서, A, B, D는 각각 신장강성(extensional stiffness), 연계강성(coupling stiffness) 및 굽힘강성(bending stiffness)행렬이고, ε^o는 중립면의 변형률 벡터 $(\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o, \varepsilon_{xy}^o)$을, κ는 중립면의 곡률변화율벡터 $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$를 나타낸다. 식(2)에서 강성계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$(A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} Q(1, z, z^2)dz \tag{3}$$

여기서, Q는 각층의 재료강성행렬이다. 한편 층간분리부가 있는 영역에서는 각각의 적층보에 대한 횡방향 변위에 따른 종방향 변위가 고려되어야 한다. 적층보의 종진동 운동방정식은 보의 중립축에 대한 종방향 변위와 변형률의 관계를 이용함으로써 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_x^o = \frac{\partial u_o}{\partial x} \tag{4}$$

연계강성을 무시한 식(2a)와 식(4)를 식(1a)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 적층보의 종방향 운동방

정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_o}{\partial t^2} \tag{5}$$

여기서, $c^2 = \rho h / A_{11}$이다. 식(5)를 변수 분리한 후 적층보의 길이로 종방향 변위와 x좌표를 무차원화하여 적층보의 종진동 지배운동미분방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{\partial^2 U_i(\xi)}{\partial \xi^2} + c_i^4 U_i(\xi) = 0 \tag{6}$$

여기서, 아래 첨자 i는 적층보의 번호, ξ는 적층보의 길이로 무차원화된 x방향좌표, 보의 영역 길이로 무차원화된 종방향변위 U_i는 $(u_0/L)_i$이고, 진동수파라미터 c_i는 $[(\rho h / A_{11})L^2\omega^2]_i^{1/4}$를 의미한다. 식(6)의 일반해는 다음과 같이 표현된다.

$$U_i(\xi) = H_{1i} G_{1i}(\xi) + H_{2i} G_{2i}(\xi) \tag{7}$$

여기서, H_{1i}, H_{2i}는 경계조건과 연속조건들로부터 결정되는 미지수를 의미하며, $G_{1i}(\xi)$, $G_{2i}(\xi)$는 각각 $\sin c_i^2\xi$, $\cos c_i^2\xi$이다. 적층보의 횡진동 운동방정식을 구하기 위해서는 다음과 같은 횡방향변위와 곡률과의 관계식을 사용한다.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{8}$$

식(1c)를 x에 대해 미분한 후 식(1b)에 대입하고, 이 식에서 축방향 합력과 및 분포력에 관계하는 항을 무시한 후 식(8)과 연계강성이 무시된 식(2b)를 대입하고 정리하면 적층보의 횡진동 운동방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -(\rho h / D_{11}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{9}$$

식(9)를 변수분리한 후 층간분리보의 길이로 무차원화된 횡방향 변위와 x좌표를 대입하고 정리하면 다음과 같은 횡진동 지배운동미분방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^4 W_i(\xi)}{\partial \xi^4} - k_i^4 W_i(\xi) = 0 \tag{10}$$

여기서, W_i는 $(w/L)_i$이고, 진동수 파라미터 k_i는 $[(\rho h / D_{11})L^4\omega^2]_i^{1/4}$이다. 식(10)의 일반해는 다음과 같이 표현된다.

$$W_i(\xi) = \sum_{k=1}^{4} \Gamma_{ki} F_{ki}(\xi) \tag{11}$$

여기서, Γ_{ki}, $(k=1\sim4)$는 임의 상수이며, $F_{ki}(\xi)$, $(k=1\sim4)$는 다음과 같다.

$$F_{1i}(\xi) = \sin k_i\xi, \quad F_{2i}(\xi) = \cos k_i\xi,$$
$$F_{3i}(\xi) = \sinh k_i\xi, \quad F_{4i}(\xi) = \cosh k_i\xi$$

한편, 적층보의 양단 경계에서 식(11)은 주어진 경계조건에 따라 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$W_{i=B_{1i}} (F_{1i} - F_{3i}) + B_{2i}(F_{2i} - F_{4i}) : \text{고정} \tag{12a}$$

$$W_i = B_{1i}(F_{1i} + F_{3i}) + B_{2i}(F_{2i} + F_{4i}) : \text{자유} \tag{12b}$$

$$W_i = B_{1i}(F_{1i} + F_{3i}) + B_{2i}(F_{1i} - F_{3i}) : \text{단순지지} \tag{12c}$$

층간분리가 적층보의 고유진동수에 미치는 영향을 알기 위해서는 층간분리부에서의 각 적층보간의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건 및 종방향 변위와의 연계관계가 필요하다.

첫 번째로 일정한 크기의 다층 층간분리부가 있는 다 층간분리 영역에서의 각 적층보 사이의 횡방향 변위에 대한 기하학적 연속조건은 다음과 같다.

$$\{W_{1d} = W_{2d} = \cdots = W_{nd}\}_{NR=j} \tag{13}$$

$$\left\{\frac{\partial W_{1d}}{\partial \xi} = \frac{\partial W_{2d}}{\partial \xi} = \cdots = \frac{\partial W_{nd}}{\partial \xi}\right\}_{NR=j} \tag{14}$$

아래 첨자 nd는 j번째 영역에서 층간분리로 인해 구분된 보의 전체 개수를 의미한다. 층간분리가 있는 내부 영역의 양단경계 ($\xi=\pm1$)에서 식(13)과 식(14)의 연속조건을 적용하면, 분리보들 사이의 횡방향 변위에 대한 계수간의 관계식을 구할 수 있다.

$$\{\Gamma_k\}_{id}=[S_{kq}]_{id,\,nd}\{\Gamma_q\}_{nd},$$
$$(i=1,2,\cdots nd-1,\ k,q=1,2,3,4) \tag{15a}$$

$$[S_{kq}]_{id,\,nd}=\begin{bmatrix} F_1(-1) & F_2(-1) & F_3(-1) & F_4(-1) \\ F_1(+1) & F_2(+1) & F_3(+1) & F_4(+1) \\ \frac{\partial F_1}{\partial\xi}(-1) & \frac{\partial F_2}{\partial\xi}(-1) & \frac{\partial F_3}{\partial\xi}(-1) & \frac{\partial F_4}{\partial\xi}(-1) \\ \frac{\partial F_1}{\partial\xi}(+1) & \frac{\partial F_2}{\partial\xi}(+1) & \frac{\partial F_3}{\partial\xi}(+1) & \frac{\partial F_4}{\partial\xi}(+1) \end{bmatrix}^{-1}_{i=j} \times \begin{bmatrix} F_1(-1) & F_2(-1) & F_3(-1) & F_4(-1) \\ F_1(+1) & F_2(+1) & F_3(+1) & F_4(+1) \\ \frac{\partial F_1}{\partial\xi}(-1) & \frac{\partial F_2}{\partial\xi}(-1) & \frac{\partial F_3}{\partial\xi}(-1) & \frac{\partial F_4}{\partial\xi}(-1) \\ \frac{\partial F_1}{\partial\xi}(+1) & \frac{\partial F_2}{\partial\xi}(+1) & \frac{\partial F_3}{\partial\xi}(+1) & \frac{\partial F_4}{\partial\xi}(+1) \end{bmatrix}_{i=j+1} \tag{15b}$$

즉, 식(15)는 다층 층간분리 영역에서 id번째와 영역의 맨 하부에 있는 nd 번째 보의 횡진동시 계수간의 관계식을 의미한다.

두 번째로 종방향 변위의 계수간의 관계식을 얻기 위해서는 다음과 같은 기하학적 및 역학적 조건식이 적용된다.

$$\sum_{id=1}^{nd}(b\,A_{11\,id})\frac{\partial U_{id}}{\partial\xi}=0 \tag{16}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial U_{1d}}{\partial\xi}-\frac{\partial U_{id}}{\partial\xi}\right)}{\beta_{1d,\,id}}=\frac{\left(\frac{\partial U_{1d}}{\partial\xi}-\frac{\partial U_{nd}}{\partial\xi}\right)}{\beta_{1d,\,nd}},$$
$$(id=2,3,\cdots,nd-1) \tag{17}$$

여기서, $\beta_{id,\,nd}$ 다층 층간분리부에서의 id번째 보와 nd 번째 보의 중립축사이의 거리를 층간분리부 보의 길이로 무차원화 한 값을 의미한다. 이때 본 연구의 해석모델은 진동시 층간분리부의 각 보의 상대적 변위가 없는 구속모델로 가정하였으므로 보의 횡진동시 종방향 변위는 전체 보의 중립면을 기준으로 식(16)과 같은 조건식을 만족해야 한다. 또한 횡진동시 층간분리부의 양단 경계에서 곡률은 일정하다고 간주 할 수 있으므로 식(17)과 같은 기하학적 관계식이 적용될 수 있다. 따라서 식(17)을 식(16)에 대입하고 정리하면 층간분리된 영역에서 첫 번째 보와 마지막 번째 보와의 종방향 변위간의 기하학적 관계식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$U_{nd,\,\xi}=\frac{1}{\eta_{nd,\,1d}}\frac{\partial U_{1d}}{\partial\xi} \tag{18a}$$

$$\eta_{nd,\,1d}=-\frac{\sum_{id=2}^{nd-1}\frac{\beta_{1d,\,id}}{\beta_{1d,\,nd}}A_{11\,id}+A_{11\,nd}}{\sum_{id=1}^{nd-1}A_{11\,id}-\sum_{id=2}^{nd-1}\frac{\beta_{1d,\,id}}{\beta_{1d,\,nd}}A_{11\,id}} \tag{18b}$$

마찬가지 순차적인 방법으로 두 번째 보와 마지막 번째 보, 임의의 번째와 마지막 번째 보의 종방향 변위의 기하학적 관계식도 얻을 수 있다.

세 번째로 층간분리된 영역에서 분리보들 간의 종방향 변위는 횡방향 변위와 다음과 같은 기하학적 관계를 갖는다.

$$U_{id}=U_{nd}-\beta_{id,\,nd}\frac{\partial W_{nd}}{\partial\xi},\ (i=1,2,\cdots,nd-1) \tag{19}$$

즉, 층간분리가 진동시 횡방향 진동에 따른 종방향 진동을 구속하는 식으로 나타난다. 이것은 횡방향 진동과 종방향 진동은 각각 독립적인 현상이 아니라 서로 종속적인 관계가 있음을 나타낸다. 종방향 변위의 기하학적 관계식들을 식(19)의 조건식에 대입한 후에 층간분리가 있는 내부 영역의 양단경계 ($\xi=\pm1$)에 적용하면 종방향과 횡방향 변위에 대한 계수간의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{H_k\}_{id}=[R_{kq}]_{id,\,nd}\{\Gamma_q\}_{nd},\ (k=1,2,\ q=1,2,3,4) \tag{20}$$

식(20)은 종방향 변위의 계수를 횡방향 변위의 계수로 표현을 가능하게 하는 조건식이다. 다층 층간분리가 있는 적층보의 진동수 방정식을 구하기 위해서는 층간분리가 있는 영역과 없는 영역의 경계에서는 다음과 같은 연속조건이 만족되어야 한다. 이것은 j번째 영역과 $j+1$ 번째 영역의 연결부분에서의 연속조건식이다.

$$\begin{Bmatrix} W_jL_j \\ \frac{\partial W_j}{\partial \xi} \\ M_j \\ V_j \end{Bmatrix}_{\xi=1} = \begin{Bmatrix} W_{j+1}L_{j+1} \\ \frac{\partial W_{j+1}}{\partial \xi} \\ M_{j+1} \\ V_{j+1} \end{Bmatrix}_{\xi=-1} \tag{21}$$

여기서, M_j과 V_j는 각각 j번째 영역의 굽힘 모멘트와 전단력을 의미한다. 층간분리가 존재하는 영역에서의 굽힘모멘트와 전단력은 다음과 같다.

$$M_j = \sum_{id=1d}^{nd} \left\{ (b\,D_{11}/L)\left[\frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial \xi^2}\right]\right\}_{id} + \sum_{id=1d}^{nd-1} \alpha_{id\,nd}\left[b\,A_{11}\frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}\right]_{id} \tag{22}$$

$$V_j = \sum_{id=1d}^{nd} \left\{ (b\,D_{11}/L^2)\frac{\partial^3 W(\xi)}{\partial \xi^3}\right\}_{id} \tag{23}$$

여기서, $\alpha_{id,nd}$는 층간분리부에서의 id 번째 보와 nd 번째 보간의 거리를 나타낸다. 층간분리가 없는 영역에서는 식(22)의 축방향 변위로부터 발생되는 모멘트 성분만을 제외시키면 된다. 층간분리가 있는 영역($NR=2$)과 양단 경계영역($NR=1, NT$)과의 관계식을 구하기 위해 식(22)와 식(23)을 식(21)에 대입하고 정리하면, 층간분리가 있는 영역의 왼쪽 경계에서 4개의 선형연립방정식이 구성되고 이를 행렬의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$[F_{kq^L}]\{B_q\}_{NR=1} = [P_{mk^L}]\{\Gamma_k\}_{NR=2},$$
$$(k,m=1,2,3,4,\ q=1,2) \tag{24}$$

식(24)의 좌변은 경계조건을 포함하고 있는 식이다. 고정 경계조건을 예를 들면 식(25)와 같이 표현된다.

식(25)에서는 층간분리된 영역에서 i 번째 보를 위첨자로 표현했다. 다른 경계조건에 대한 것은 같은 방법으로 구할 수 있다. 그리고 우변의 경우는 층간분리가 있는 경우이므로 네 개의 계수가 나타나고 전단력과 모멘트도 식(22)와 식(23)처럼 모멘트의 합과 전단력의 합이 포함되어야 한다. 또한 모멘트 성분에서는 굽힘변형에의한 모멘트 성분과 축방향 변위에 의해발생된 모멘트 성분도 함께 고려되어야 하므로 식(22)를 사용하여 식(21)에 대입하고 정리하면 식(26)과 같은

$$\begin{Bmatrix} W_jL_j \\ \frac{\partial W_j}{\partial \xi} \\ M_j \\ V_j \end{Bmatrix}_{\xi} = \begin{bmatrix} \{F_1^i(\xi^i)-F_3^i(\xi^i)\}L^i & \{F_2^i(\xi^i)-F_4^i(\xi^i)\}L^i \\ \frac{\partial\{(F_1^i(\xi^i)-F_3^i(\xi^i)\}}{\partial\xi} & \frac{\partial\{F_2^i(\xi^i)-F_4^i(\xi^i)\}}{\partial\xi} \\ \frac{bD_{11}^i}{L^i}\frac{\partial^2\{F_1^i(\xi^i)-F_3^i(\xi^i)\}}{\partial\xi^2} & \frac{bD_{11}^i}{L^i}\frac{\partial^2\{F_2^i(\xi^i)-F_4^i(\xi^i)\}}{\partial\xi^2} \\ \frac{bD_{11}^i}{L^{i^2}}\frac{\partial^3\{F_1^i(\xi^i)-F_3^i(\xi^i)\}}{\partial\xi^3} & \frac{bD_{11}^i}{L^{i^2}}\frac{\partial^3\{F_2^i(\xi^i)-F_4^i(\xi^i)\}}{\partial\xi^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma_1^i \\ \Gamma_2^i \end{Bmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{Bmatrix} W_{j+1}L_{j+1} \\ \frac{\partial W_{j+1}}{\partial \xi} \\ M_{j+1} \\ V_{j+1} \end{Bmatrix}_{\xi} = \sum_{id=nd}^{nd} \begin{bmatrix} F_1^{id}(\xi^{id})L^{id}\Gamma_1^{id} + F_2^{id}(\xi^{id})L^{id}\Gamma_2^{id} + F_3^{id}(\xi^{id})L^{id}\Gamma_3^{id} + F_4^{id}(\xi^{id})L^{id}\Gamma_4^{id} \\ \frac{\partial\{F_1^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi}\Gamma_1^{id} + \frac{\partial\{F_2^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi}\Gamma_2^{id} + \frac{\partial\{F_3^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi}\Gamma_3^{id} + \frac{\partial\{F_4^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi}\Gamma_4^{id} \\ \frac{bD_{11}^{id}}{L^{id}}\left\langle \frac{\partial^2\{F_1^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^2}\Gamma_1^{id} + \frac{\partial^2\{F_2^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^2}\Gamma_2^{id} + \frac{\partial^2\{F_3^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^2}\Gamma_3^{id} + \frac{\partial^2\{F_4^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^2}\Gamma_4^{id}\right\rangle + \alpha_{id,nd}\,bA_{11}^{id}\left\langle \frac{\partial\{G_1^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi}H_1^{id} + \frac{\partial\{G_2^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi}H_2^{id}\right\rangle \\ \frac{bD_{11}^{id}}{L^{id^2}}\left\langle \frac{\partial^3\{F_1^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^3}\Gamma_1^{id} + \frac{\partial^3\{F_2^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^3}\Gamma_2^{id} + \frac{\partial^3\{F_3^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^3}\Gamma_3^{id} + \frac{\partial^3\{F_4^{id}(\xi^{id})\}}{\partial\xi^3}\Gamma_4^{id}\right\rangle \end{bmatrix} \tag{26}$$

층간분리영역에서의 영역간 연속조건식을 얻는다. 그리고, 각 보의 종방향 변위 및 횡방향 변위를 의미하는 식(7), 식(11)을 식(15), 식(20)에 대입하고 그 결과를 식(26)에 대입하고 정리하면 식(24)의 우변을 얻을 수 있다. 식(24)를 횡방향 변위계수에 관해 표현하면 다음과 같다.

$$\{\Gamma_k\}_{NR=2}=[Q_{kq^L}]\{B_q\}_{NR=1} \tag{27}$$

여기서, $[Q_{kq^L}]=[P_{mk^L}]^{-1}[F_{kq^L}]$이며, 위 첨자는 보의 왼쪽에 대한 성분을 의미한다. 마찬가지 방법으로 층간분리가 있는 영역의 오른쪽 경계에서 4개의 선형연립방정식을 구성하고 이를 행렬의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$[F_{kq^R}]\{B_q\}_{NR=NT}=[P_{mk^R}]\{\Gamma_k\}_{NR=2},$$
$$(k,m=1,2,3,4,\ q=1,2) \tag{28}$$

마찬가지로 식(28)를 횡방향 변위계수에 관해 표현하면 다음과 같다.

$$\{\Gamma_k\}_{NR=2}=[Q^R_{kl}]\{B_l\}_{NR=NT} \tag{29}$$

여기서, $[Q_{kq^R}]=[P_{mk^R}]^{-1}[F_{kq^R}]$이며, 행렬로 표현했을 때 4×2행렬이 된다. 식(27)과 식(29)를 등가 시키면 다음과 같은 4개의 선형연립방정식을 얻을 수 있다.

$$[[Q^L_{kq}]\ [Q^R_{kq}]]\begin{Bmatrix}\{B_q\}_{NR=1}\\ \{B_q\}_{NR=NT}\end{Bmatrix}=0,$$
$$(k=1,2,3,4,\ q=1,2) \tag{30}$$

따라서 층간분리가 있는 보의 진동수방정식은 식(30)의 행렬(4×4)를 행렬식(determinant)으로 취함으로써 구할 수 있다.

3. 수치결과 및 고찰

본 연구에서는 다층 층간분리가 적층보의 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하기 위해 진동해석을 수행하였다.

적층보의 물성치와 적층순서는 Table 1에 제시하였고, 각각의 경계조건에 대한 층간분리가 없는 보의 고유진동수를 Table 2에 표현하였다. 또한 해석 결과에서 사용되는 층간분리에 대한 무차원화된 파라미터 값은 Fig. 2에 제시하였다.

Fig. 2와 해석결과에서 $\bar{h}$는 층간분리부 상부보의 두께를 전체보 두께로, δ는 층간분리부의 길이를 전체보 길이로, χ는 보의 왼쪽 경계부터 층간분리부 또는 전체 층간분리부 중심까지의 길이를 전체보 길이로, s는

Table 1 Material properties and configurations of laminated beams

Material	Glass-Epoxy		
Property	E_{11}	40.7	GPa
	E_{22}	9.75	GPa
	G_{12}	4.65	GPa
	ν_{12}	0.30	
	ρ	1990	kg/m^3
Stacking sequence	Cross-ply	[0/90]5S	
Geometry	Length	1000	mm
	Width	25	mm
	Height	2.5	mm
	One ply thickness	0.125	mm

Table 2 Natural frequencies of laminate beams without delaminations for each boundary condition(Hz)

Layup	b.c.	Mode			
		1st	2nd	3rd	4th
C	CF	1.519	9.519	26.655	52.232
	CC	9.666	26.644	52.233	86.344
	FF	9.666	26.644	52.233	86.344
	SS	4.234	17.056	38.375	68.222

* C : Cross-ply
* CF : Clamped-Free, CC: Clamped-Clamped,
FF : Free-Free, SS: Simply Supported

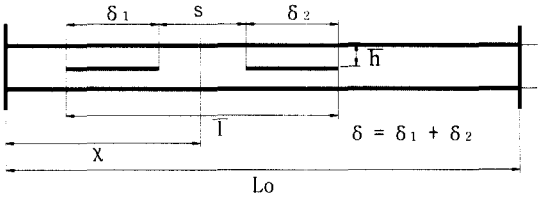


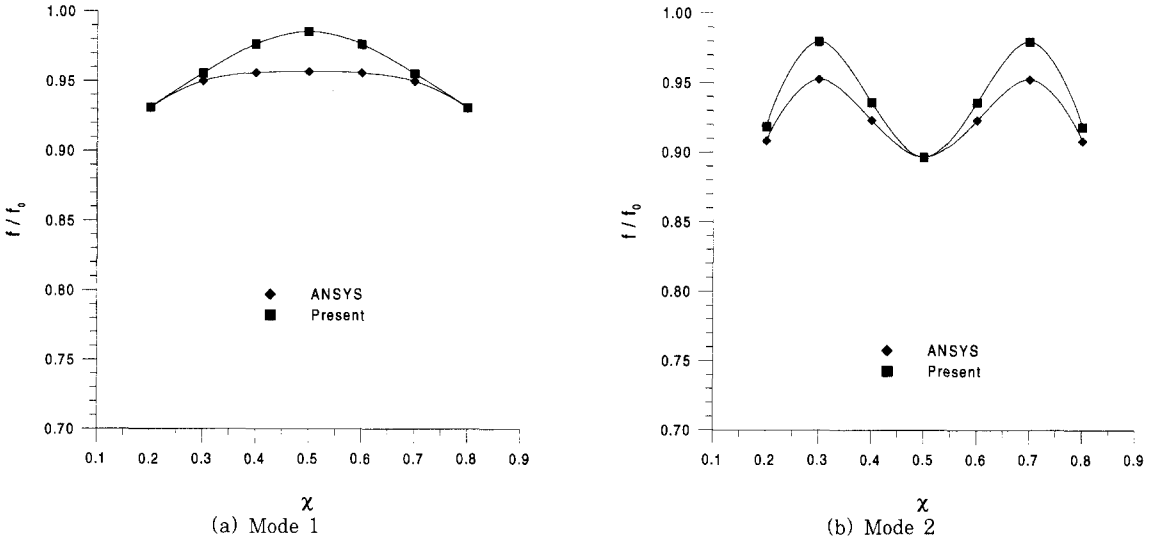
Fig. 2 Normalized parameters for multiple delaminations

층간분리부와 층간분리부 사이의 길이를 전체보 길이로, $\bar{l}$는 전체 층간분리부의 길이를 전체보 길이로 무차원화된 값이며, 층간분리가 있는 보의 고유진동수 f는 층간분리가 없는 보의 고유진동수 f_0로 무차원화되어 그래프의 종축에 표시된다.

한편 본 연구에서는 이론해석 결과의 신뢰성을 검증하기 위해 범용 유한요소 프로그램인 ANSYS를 사용하여 진동해석을 수행한 결과를 본 해석결과와 비교하여 Fig. 3에 제시하였다. 요소는 Linear layered structural shell99 요소를 사용하였으며, 부재의 물성치 및 기하학적 형상은 이론해석에 사용하는 것과 동일하게 하였다. 그리고 모드해석을 위한 전체 요소의 개수는 수렴성을 검토하여 1000개로 하였다. 그리고 층간분리부를 구현하기 위한 모델링 방법에 대한 그림을 Fig. 4에 제시하였다. 즉, 층간분리된 층과 건전층 사이의 경계를 보여주는 것으로 각각의 요소는 경계지점에서 주절점(master node)과 종속절점(slave node)을 사용한 결과, 동일한 자유도를 가지게 되었다. 일정길이(20%)의 단일 층간분리부가 왼쪽 지지점에서 오른쪽 지지점으로 이동함에 따라 유한요소에 의한 결과와 잘 부합됨을 알 수 있다.

다층 층간분리된 적층보에 대한 고유진동수 변화를 고찰하기 위하여 Fig. 5와 같은 층간분리 형상을 선정하였다. 전체 20%의 층간분리부가 보의 종방향으로 1개, 2개, 4개 분할 형성된 것이 Fig. 5(a)이고, 보의 횡방향으로 1개, 2개, 4개 분할 형성된 것이 Fig. 5(b)이다. 보의 종방향으로 분할 형성시 각각의 층간분리부 사이의 간격은 0.1%로 작게 부여하였다. 전체 20% 층간분리를 가지는 보가 보의 중심에서 종방향으로 분기되어 각각 10%씩 양단경계지점으로 이동하는 경우가 Fig. 5(c)이고, 10%씩 보의 횡방향으로 나란하게 형성되어 왼쪽 지지점에서 오른쪽 지지점으로 이동하는 경우가 Fig. 5(d)이다. 각각의 층간분리형상에 대한 고유진동수 변화 결과를 Fig. 6~9에 제시하였으며 해석 결과에서 보듯이 층간분리부의 위치 및 분포양상 변화는 고유진동수 저하에 직접적인 영향이 있음을 알 수 있었다. 또한 층간분리부가 지지점에 근접할수록 고유진동수의 저하가 큼을 알 수 있다. 이러한 이유는 경계조건이 양단고정일 경우 고정단에서 최대 모멘트가 발생되므로 결과적으로 층간분리부가 고정단 부근에 근접하면 고유진동수 저하에 미치는 영향은 크게 된다. Fig. 8는 경계조건을 단순지지 보로 사용했기 때문에 위와 같은 점을 볼 수 없다. 이러한 영향성은 외팔보에서도 동일하게 발생된다.

한편, Fig. 6에서 보듯이 동일 위치에서 층간분리부가 보의 종방향으로 2개, 4개로 분할되면 고유진동수



(a) Mode 1 (b) Mode 2

Fig. 3 Comparison of non-dimensional frequencies for clamped-clamped laminated beams with single delamination($\delta=0.2$, $\bar{h}=0.5$)

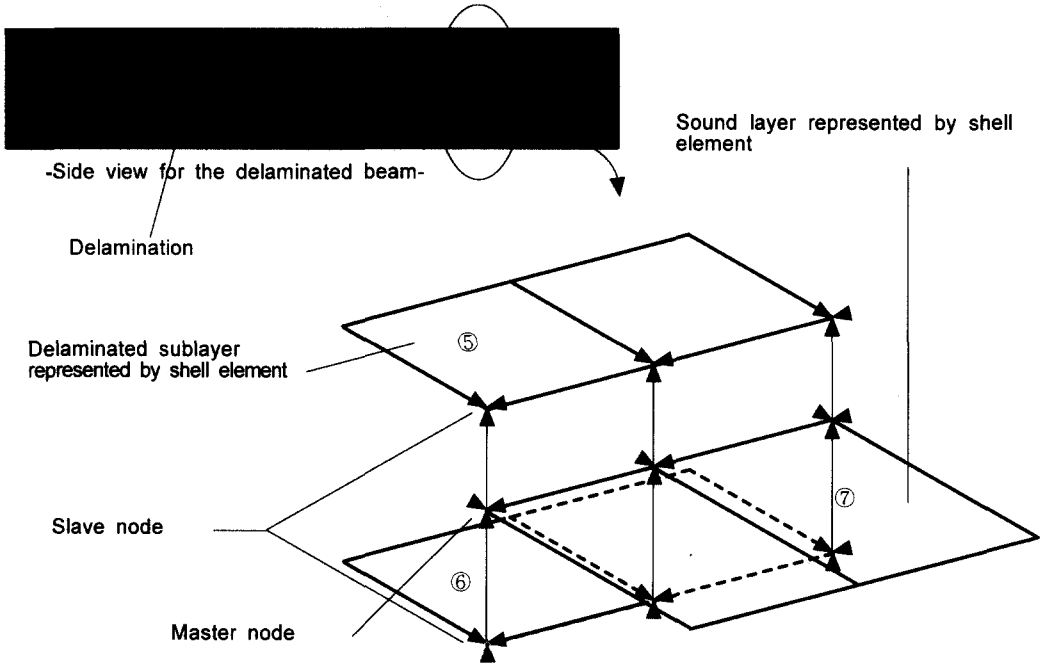


Fig. 4 Representation of a delamination in ANSYS modeling

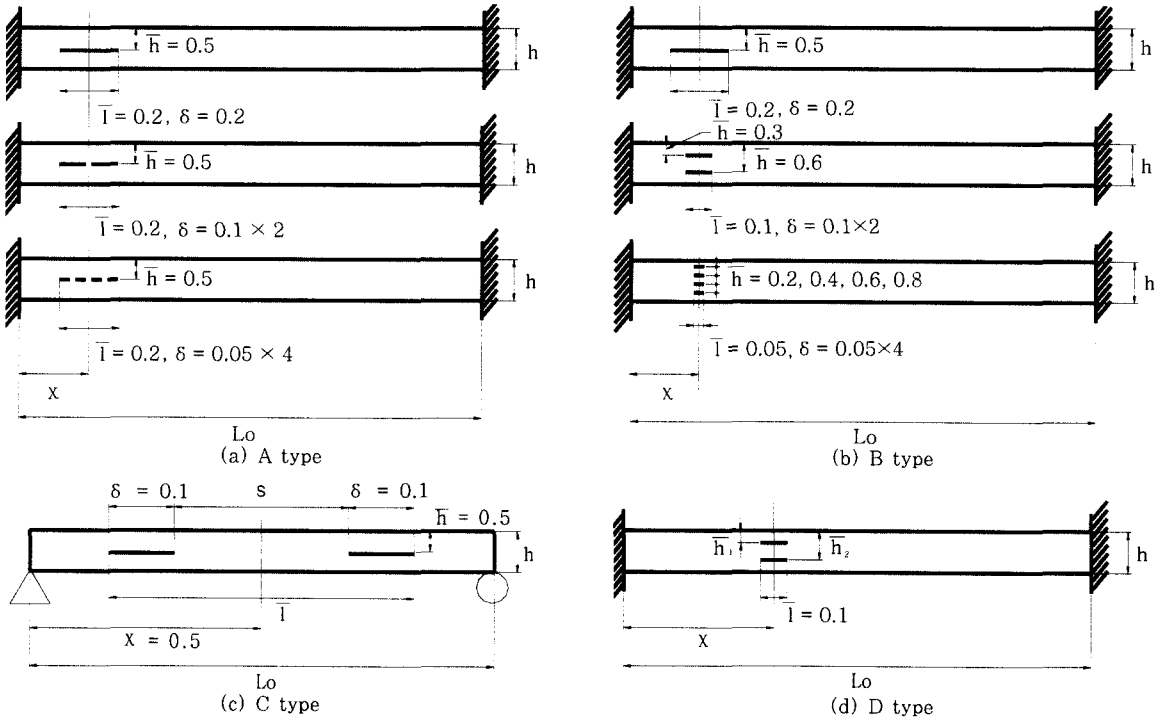


Fig. 5 Configurations of multi-delaminated beams

저하 폭이 현저히 줄어드는 경향을 보인다. 따라서, 층간분리부는 분할될수록 고유진동수 저하 폭은 현저히 줄어든다는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 Fig. 7에서도 볼 수 있다. 층간분리가 횡방향으로 2개, 4개로 분할되어 동일 위치에 놓이면 고유진동수 저하 폭은 현저히 줄어든다.

Fig. 8은 층간분리부의 종방향 분포양상에 대한 결과를 알 수 있다. 보의 중심에 위치한 층간분리부가 분기되어 양단경계지점으로 간격 s를 넓히면서 각각 이동함에 따라 1차 모드에서 최대 3.1%의 고유진동수 저하를 보이는 반면, 고차모드로 진행될수록 고유진동수 변화에 굴곡이 생김을 알 수 있는데 이러한 이유는 진동모드형상 때문이다. 층간분리부의 종방향 분포양상에 따른 결과를 확연하게 드러내기 위해서 경계조건을

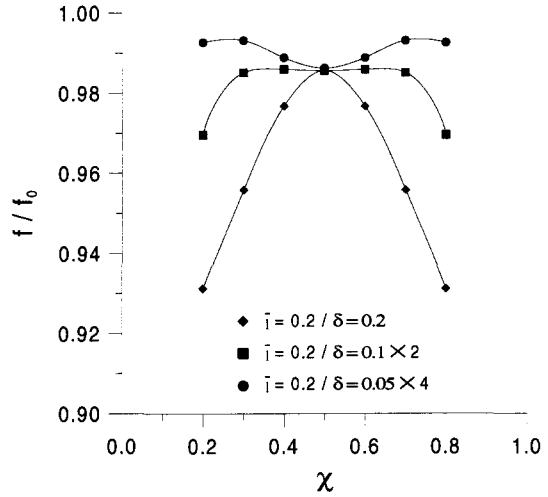


Fig. 6 Normalized fundamental natural frequency vs. χ of clamped-clamped laminated beams (A type)

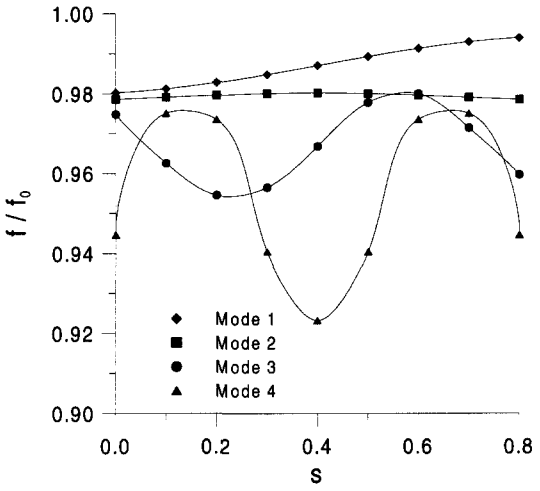


Fig. 8 Natural frequency variations of laminated beams with longitudinal double delamination (C type, SS)

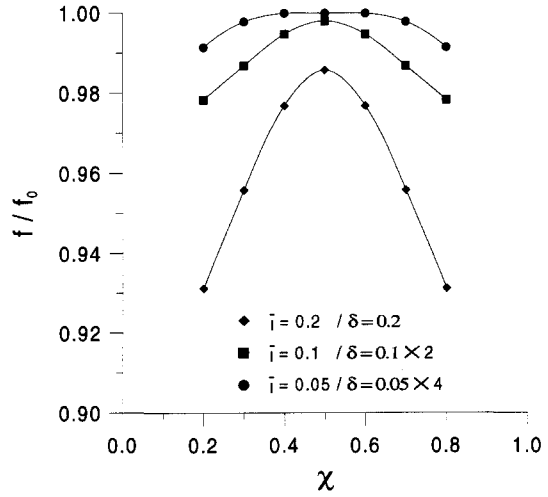


Fig. 7 Normalized fundamental natural frequency vs. χ of clamped-clamped laminated beams with B type delaminations

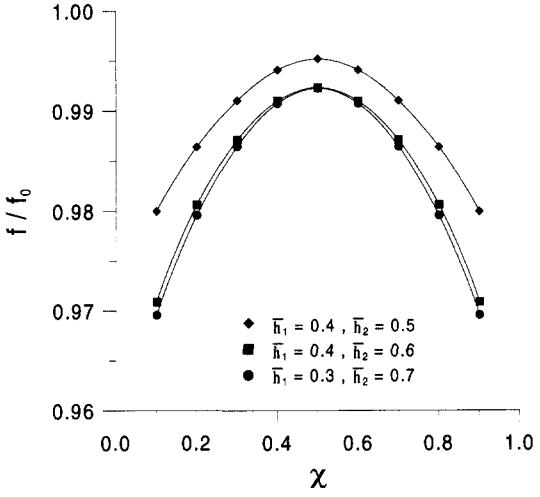


Fig. 9 Normalized fundamental natural frequency vs. χ for the D type delamination(clamped-clamped)

단순지지 보로 사용한 결과를 보면 층간분리부의 분포양상은 집중된 것보다 분산된 경우가 고유진동수 저하 폭이 줄어든다. 그리고, 위치에 따른 고유진동수 변화 굴곡양상은 층간분리부의 길이가 작아짐에 따라 고차 모드에서도 점점 굴곡이 완만해진다는 것을 볼 수 있다.

Fig. 9는 이중 층간분리부의 각각의 상부보 두께변화에 따른 고유진동수 변화를 나타낸다. 상부보 두께를 각각 변화시키면서 모든 경우를 살펴보면 전체 적층보 두께에 대해서 1/3씩 배치되었을 때 가장 큰 고유진동수 저하를 보인다. 이것은 단일 층간분리부가 중립면 부근에 위치할 경우 최대의 고유진동수 저하를 보이는 것과 같은 경향의 결과이다. 즉, 다층 층간분리는 보의 전체 두께에 대해서 균등히 배치될 때 최대의 고유진동수 저하를 보인다.

본 연구는 다층 층간분리가 있는 적층보의 진동해석을 수행하여 고유진동수 저하를 평가하였다. 이러한 결과로부터 층간분리부의 위치와 크기 변화에 따른 고유진동수 저하를 평가할 수 있고(직접법 : direct method), 이에 상관되어 손상 보의 진동수를 비교/분석함으로써 층간분리부의 위치와 크기를 대략적으로 평가할 수 있을 것이다(역방법 : inverse method).

4. 결 론

본 연구에서는 적층보 내부에 다층 층간분리 형상에 기인된 고유진동수 저하를 평가하여 다음과 같은 결론을 얻는다.

1) 양단고정보에 존재하는 다층 층간분리부는 경계조건의 영향 때문에 지지점에 근접할수록 고유진동수 저하가 커진다.
2) 층간분리부가 보의 종방향과 횡방향으로 2개, 4개로 분할되어 배치됨에 따라, 고유진동수 저하 폭은 줄어든다.
3) 층간분리부의 길이가 작아짐에 따라 위치에 따른 고유진동수 변화형상은 굴곡이 완만해진다.
4) 층간분리부의 분포양상은 집중된 것보다 분산된 경우가 고유진동수 저하 폭이 줄어든다.
5) 층간분리는 전체 두께에 대해서 균등히 배치될 때 최대의 고유진동수 저하를 보인다.
6) 본 연구는 다층 층간분리된 적층보의 고유진동수 저하를 평가하고, 비교/분석함으로써 층간분리의 위치와 크기를 탐지하는데 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Jävelä, P., Laitinen, K. W., Purola, J. J., and Törmälä, P., "Studies on Lightweight Glass Fibre-Resin Composite by Destructive and Nondestructive Methods," *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, 1984, pp.557~573
2. Pavic, G., "Measurement of Vibration by Strain Gauge, Part I : Theoretical Basis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, 1985, pp.153~163
3. Pavic, G., "Measurement of Vibration by Strain Gauge, Part II: Selection of Measurement Parameters," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, 1985, pp.165~188
4. Stamos, B., Kostopoulos, V., and Paipetis, S. A., "Identification of Delamination by Eigen frequency Degradation-An Inverse Problem," *AGARD Conference Proceedings 530*, Debonding/Delamination of Composites, 1992, pp.20-1~20-7
5. Cawley, P. and Adams, R. D., "A Vibration Technique for Non-Destructive Testing of Fibre Composite Structures," *Journal of Composite Materials*, Vol. 13, 1979, pp.161~175
6. 이성희, "층간분리가 있는 복합재 보-기둥의 동적특성," 박사학위논문, 홍익대학교 대학원 기계공학과, 1998
7. Reddy, J. N. and Miravete, A., *Practical Analysis of Composite Laminates*, CRC press. 1995