

철근 콘크리트 구조물의 비탄성 해석을 위한 9절점 퇴화 쉘 요소

A 9-node Degenerated Shell Element for Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Structures

이 상 진*

서 정 문**

Lee, Sang-Jin

Seo, Jeong-Moon

(논문접수일 : 2001년 2월 15일 ; 심사종료일 : 2001년 10월 22일)

요 지

본 논문은 철근 콘크리트 구조물의 비탄성 해석을 수행하기 위하여 개발된 9절점 퇴화 쉘 요소에 대하여 기술하였다. 개발된 쉘 유한요소는 퇴화고체기법과 함께 구조물에서 발생하는 횡 전단 변형효과를 고려하기 위하여 Reissner-Mindlin (RM)가정을 도입하였다. RM 가정을 바탕으로 한 퇴화 쉘 요소는 쉘의 두께가 얇거나, 즉 중횡비가 작거나, 균일하지 않은 유한요소망을 사용할 경우 구조물의 강성이 과대하게 계산되는 강성과대현상(Locking phenomenon)이 나타나게 된다. 강성과대현상은 선택적 감차 적분, 비 적합 모드, 가변형도 등을 사용하여 개선하는데 특히 가변형도법에 바탕을 둔 대체변형도는 많은 유한요소에 성공적으로 적용되어 왔다. 그러나 이와는 대조적으로 콘크리트의 비탄성 해석에 가변형도법을 도입하고 그 성능을 조사한 사례는 매우 적다. 따라서 본 연구에서는 가변형도법과 미시적 재료모델을 바탕으로 RM 쉘 요소를 정식화하고 이를 유한요소프로그램으로 개발하였다. 개발된 철근 콘크리트 쉘 요소의 성능은 수치예제를 통하여 검증하였다. 수치예제로부터 개발된 쉘요소를 이용하여 구해진 해석결과가 실험결과 또는 다른 해석결과에 근접함을 알 수 있다.

핵심용어 : 에퇴화 쉘 요소, 철근 콘크리트 구조물, 비 탄성해석, 가변형도, 미시적 재료모델

Abstract

An enhanced degenerated shell finite element (FE), which has been developed for inelastic analysis of reinforced concrete structures is described in this paper. Generally, Reissner-Mindlin (RM) assumptions are adopted to develop the degenerated shell FE so that transverse shear deformation effects is considered. However, it is found that there are serious defects such as locking phenomena in RM degenerated shell FE since the stiffness matrix has been overestimated in some situations. As remedies of locking phenomena, reduced integration, incompatible mode and assumed strain method have been used. Especially, the assumed strain method has been successfully used in many FEs. But contrarily, there is a few investigation on the performance of the assumed strains in the inelastic analysis of concrete structures. Therefore, shell formulation is provided in this paper with emphasis on the terms related to the stiffness matrix based on assumed strain method and microscopic concrete material model. Finally, the performance of the present shell element is tested and demonstrated with several numerical examples. From the numerical tests, the present result shows a good agreement with experimental data or other numerical results.

Keywords : *degenerated shell element, reinforced concrete structure, inelastic analysis, assumed strains, microscopic material model*

* 정회원 · 한국원자력연구소, 선임연구원, 공학박사
** 정회원 · 한국원자력연구소, 책임기술원, 공학박사

· 이 논문에 대한 토론을 2002년 3월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

철근콘크리트 구조물의 해석기법은 유한요소법의 개발과 함께 비약적으로 발전되어 왔다. 초기의 철근콘크리트 해석기법에 대한 연구는 콘크리트 재료의 거동을 정확히 표현하기 위한 재료모델(구성방정식)¹⁾의 개발에 치중하였다. 그 후 수치해석에 대한 이해와 발전이 급속도로 이루어지면서 재료모델뿐만 아니라 수치해석 기법 자체에 대한 개선과 수정에 관심을 가지게 되었다.

쉘 유한 요소를 개발하는데 있어 가장 널리 사용되고 있는 방식은 퇴화고체기법²⁾이다. 퇴화고체기법은 특정한 쉘 이론에 의지할 필요가 없어 매우 효과적으로 쉘 요소를 개발할 수 있다. 퇴화고체기법과 함께 Reissner-Mindlin(RM)가정³⁾이 구조물에서 발생하는 횡전단변형의 효과를 고려하기 위하여 널리 사용된다. RM가정을 바탕으로 유도되는 퇴화 쉘 요소는 다양한 형태의 구조물을 해석하는데 효과적이거나 구조물의 두께가 얇거나 균일하지 않은 유한요소망을 사용하면 강성과대현상⁴⁾(Locking Phenomenon)이 발생한다. 강성과 대현상은 이산화된 유한요소모델을 통하여 형성되는 구조물의 강성이 실제보다 높게 평가되는 현상을 말한다. 이러한 문제점은 선택적 감차적분⁵⁾, 비적합모드⁶⁾ 그리고 가변형도⁷⁾와 같은 대체 변형도를 이용하여 과대하게 계산되어지는 구조물의 강성행렬을 수정함으로써 해결하였다. 특히 가변형도법을 바탕으로 유도되는 대체변형도를 이용하여 많은 유한요소가 성공적으로 개발되었다. 그러나 이러한 성공에도 불구하고 대체변형도가 콘크리트 구조물의 해석을 위해 개발되는 쉘 요소에 적용된 사례는 매우 적어 이 분야에 대한 연구가 요망된다.

본 연구에서는 철근콘크리트 재료의 복합적인 거동을 개개의 재료 거동으로 표현하는 미시적 재료모델⁸⁾과 가변형도를 바탕으로 철근콘크리트 퇴화 쉘 요소를 정식화하고 이를 유한요소해석프로그램으로 개발하였다. 개발된 쉘 요소의 성능은 벤치마크검사를 통하여 검증하고 분석하였다.

2. Reissner-Mindlin 가정

본 연구에서는 쉘의 횡전단변형도 효과를 고려하기 위하여 RM가정을 도입하였다. 도입된 가정을 정리하면 다음과 같다.

- a) 중층(Mid-surface)에 수직인 법선은 변형 후에도 직선을 유지한다. 그러나 변형 후 중층에 반드시 수직일 필요는 없다고 가정한다.
- b) 중층에 수직인 법선방향 응력은 0이라고 가정 한다.

위의 가정은 쉘과 판의 경우에 동일하게 사용되며 그림 1과 같이 도시할 수 있다.

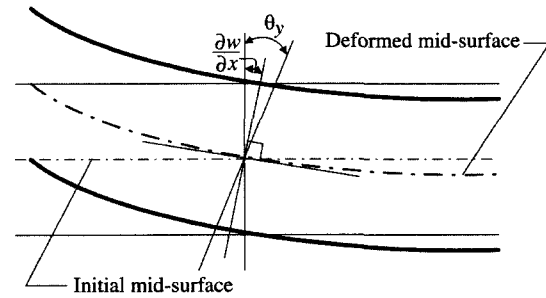


그림 1 Reissner-Mindlin 가정

RM가정을 바탕으로 개발된 쉘 유한요소는 전단변형의 효과를 고려하므로 전단변형을 고려하지 않는 쉘 요소에 비하여 유연하다.

3. 요소개발에 사용된 좌표계

본 연구에서는 콘크리트 퇴화 쉘 요소를 개발하기 위하여 네가지의 좌표계를 사용하였다. 도입된 좌표계들은 쉘의 형상과 요소의 강성행렬에 관련된 항들을 효율적으로 계산하기 위한 것이며 다음과 같다.

- a) 전체좌표계 : 전체좌표계는 이산화된 쉘의 절점좌표를 정의하기 위하여 사용되며 직교기준벡터에 의해서 정의된다. 이 좌표계는 전체변위벡터, 전체강성행렬, 전체하중벡터 등을 표현할 때 사용하였다.
- b) 국부좌표계 : 국부좌표계는 변형도와 응력을 계산할 때 사용하였으며 다음과 같은 방법으로 정의한다. 먼저 국부좌표계의 세 번째 벡터를 두 접선벡터 $\bar{x}_{,\xi_1}$ 와 $\bar{x}_{,\xi_2}$ 의 정규화된 외적 벡터곱을 사용하여 결정한다.

$$\hat{e}_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{\bar{x}_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \times \bar{x}_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2)}{|\bar{x}_{,\xi_1}(\xi_1, \xi_2) \times \bar{x}_{,\xi_2}(\xi_1, \xi_2)|} \quad (1)$$

세 번째 단위벡터가 정해지면 두 번째의 단위벡터를 구하기 위한 기준벡터가 필요하다. 본 연구에서는 $x_{\xi_3}(0,0)$ 를 기준벡터로 사용하였다.

$$\hat{e}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\hat{e}_3 \times \bar{x}_{\xi_1}(0,0)}{|\hat{e}_3 \times \bar{x}_{\xi_1}(0,0)|} \quad (2)$$

벡터 \hat{e}_1 는 벡터 \hat{e}_2 와 \hat{e}_3 에 모두 직교해야 하기 때문에 국부좌표계의 첫번째 단위벡터는 다음의 방법으로 구할 수 있다.

$$\hat{e}_1(\xi_1, \xi_2) = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 \quad (3)$$

결과적으로 국부좌표계의 직교집합은 요소내부의 어떤 위치에서도 생성될 수 있다. 전체좌표계와 관계된 항을 국부좌표계와 관계된 항으로 변환하기 위해서는 방향코사인 행렬을 사용한다. 이때 두 좌표계 사이의 방향코사인 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$\Theta = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial x'_1 & \partial x_1 / \partial x'_2 & \partial x_1 / \partial x'_3 \\ \partial x_2 / \partial x'_1 & \partial x_2 / \partial x'_2 & \partial x_2 / \partial x'_3 \\ \partial x_3 / \partial x'_1 & \partial x_3 / \partial x'_2 & \partial x_3 / \partial x'_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

c) 절점좌표계 : 절점좌표계는 각 절점에 생성한다. 이 절점좌표는 각 절점에서 발생하는 회전변위를 측정할 때 사용하며 다음과 같은 방법으로 정의한다. 절점 a 에서의 절점단위벡터 \hat{v}_3^a 는 쉘의 상층면과 하층면의 위치벡터(x_{top}^a 와 x_{bot}^a)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{v}_3^a = \frac{x_{top}^a - x_{bot}^a}{|x_{top}^a - x_{bot}^a|} \quad (6)$$

참고로, 벡터 \hat{v}_3^a 는 쉘의 중층면에 수직일 필요가 없다. 먼저 수직인 절점단위벡터가 구해지면 절점좌표계의 첫번째 단위 벡터 \hat{v}_1^a 을 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$\hat{v}_1^a = \hat{e}_2 \times \hat{v}_3^a \quad (7)$$

그러나 벡터 \hat{v}_3^a 가 x_2 방향으로 놓여 있다면, 벡터 \hat{v}_1^a 는 다음과 같이 정의된다.

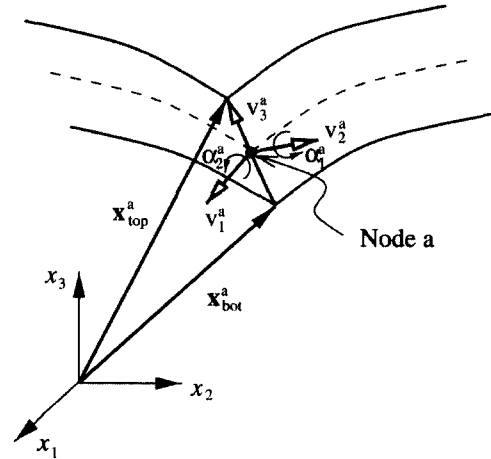


그림 2 쉘의 절점좌표계

$$\hat{v}_1^a = \hat{v}_3^a \times \hat{e}_1^a \quad (8)$$

벡터 \hat{v}_2^a 는 벡터 \hat{v}_1^a 와 \hat{v}_3^a 에 직교하기 때문에 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$\hat{v}_2^a = \hat{v}_3^a \times \hat{v}_1^a \quad (9)$$

이렇게 정의된 절점좌표계는 그림 2에 도시된 바와 같이 요소의 두 회전 변위(α_1, α_2)가 벡터 \hat{v}_1^a 와 \hat{v}_2^a 에 관계되기 때문에 다섯 개의 자유도를 가지는 퇴화 쉘 요소에서는 중요하다.

d) 요소 고유좌표계 : 요소 고유좌표계는 유한요소의 보간함수를 표현하기 위하여 사용한다. 그리고 요소 고유좌표계의 첫 번째와 두 번째 축은 쉘의 중층면과 법선방향에 놓여 있는 면내에 있다.

4. 쉘의 형상에 대한 정의

쉘 요소의 형태는 두 개의 위치벡터로 표현되어 질 수 있다. 그림 3에서 보는 바와 같이 이 두 개의 벡터는 고체 쉘요소가 퇴화 쉘요소로 퇴화하기 전의 상층면과 하층면을 나타내는 위치벡터이다.

두 위치벡터 x_{top}^a 와 x_{bot}^a 를 이용하면 쉘 요소의 형상은 다음과 같이 정의된다.

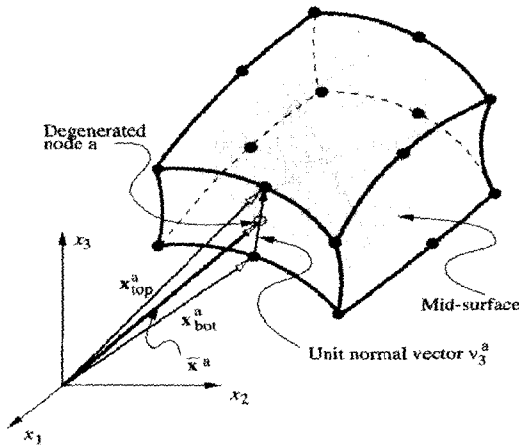


그림 3 쉘의 형상

$$x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\left(\frac{1+\xi_3}{2} \right) x_{top}^a + \left(\frac{1-\xi_3}{2} \right) x_{bot}^a \right] \quad (10)$$

위의 식을 정리하면 쉘의 형상은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$x(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[\bar{x}^a + \frac{\xi_3 h^a}{2} \hat{v}_3^a \right] \quad (11)$$

따라서 쉘의 형상을 벡터의 형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^9 N_a \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{Bmatrix} + \sum_{a=1}^9 \frac{\xi_3 h^a}{2} \begin{Bmatrix} \hat{v}_{3x}^a \\ \hat{v}_{3y}^a \\ \hat{v}_{3z}^a \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $\hat{v}_{3x}^a, \hat{v}_{3y}^a, \hat{v}_{3z}^a$ 는 벡터 \hat{v}_3^a 의 전체좌표계에 대한 성분을 나타낸다.

5. 쉘의 변위장에 대한 정의

변위장은 쉘의 자유도에 따라서 다르게 정의될 수 있다. 본 연구에서는 절점당 다섯 개의 자유도를 가지는 쉘 요소에 대한 변위장에 대하여 기술하였다. 본 연구에 사용된 절점의 병진변위값은 전체좌표계에 준하고 회전변위의 경우는 절점좌표계 v^a 에 준하는 것으로

정의한다. 따라서 변위장은 다음과 같이 표현된다.

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_1, \xi_2) \left[u^a + \frac{\xi_3 h^a}{2} \bar{V}^a \alpha^a \right] \quad (13)$$

여기서 변환행렬은 $\bar{V}^a = [\hat{v}_1^a, \hat{v}_2^a]$ 이고 병진변위벡터는 $u^a = [u_1^a, u_2^a, u_3^a]$ 그리고 회전변위벡터는 $\alpha^a = [\alpha_1, \alpha_2]$ 이다. 따라서 쉘 요소의 전체좌표계에 준하는 변위장은 절점변위벡터를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^9 N_a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2\xi_3 h^a \hat{v}_{1x}^a & 1/2\xi_3 h^a \hat{v}_{2x}^a \\ 0 & 1 & 0 & 1/2\xi_3 h^a \hat{v}_{1y}^a & 1/2\xi_3 h^a \hat{v}_{2y}^a \\ 0 & 0 & 1 & 1/2\xi_3 h^a \hat{v}_{1z}^a & 1/2\xi_3 h^a \hat{v}_{2z}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

6. 쉘의 변형도에 대한 정의

쉘은 곡면을 가지는 구조이므로 변형도를 국부좌표계에 준하여 나타내면 편리하다. 이때 변형도는 국부변위 성분 u_i 를 사용하여 정의한다. 쉘의 법선방향 x_3 에 대한 응력을 0이라고 가정하면 국부변형도 벡터는 다섯 개의 국부변형도항을 가진다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{33} \\ \dots \\ \epsilon'_{12} \\ \epsilon'_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_{1,1} \\ u'_{2,2} \\ u'_{2,1} + u'_{1,2} \\ \dots \\ u'_{2,3} + u'_{3,2} \\ u'_{1,3} + u'_{3,1} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서 u'_1, u'_2, u'_3 는 국부좌표계 x'_i 의 단위벡터와 관련한 변위성분이며 변위 그래디언트(gradient) $u'_{i,j}$ 는 $\partial u_i / \partial x'_j$ 이다. 가정된 변위장이 전체좌표계를 통하여 표현되기 때문에 변위 그래디언트는 먼저 전체 좌표계에 준하여 계산하는 것이 편리하다. 그러므로 전체 좌표계에 준한 변위 그래디언트는 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right)^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} = J_{kj}^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \quad (16)$$

위의 식을 명시적인 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_1 \\ \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_2 \\ \partial u_1/\partial x_3 & \partial u_2/\partial x_3 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial \xi_1 & \partial u_2/\partial \xi_1 & \partial u_3/\partial \xi_1 \\ \partial u_1/\partial \xi_2 & \partial u_2/\partial \xi_2 & \partial u_3/\partial \xi_2 \\ \partial u_1/\partial \xi_3 & \partial u_2/\partial \xi_3 & \partial u_3/\partial \xi_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서 J 는 Jacobian행렬을 나타내며 다음과 같다.

$$J = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial \xi_1 & \partial x_2/\partial \xi_1 & \partial x_3/\partial \xi_1 \\ \partial x_1/\partial \xi_2 & \partial x_2/\partial \xi_2 & \partial x_3/\partial \xi_2 \\ \partial x_1/\partial \xi_3 & \partial x_2/\partial \xi_3 & \partial x_3/\partial \xi_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

좌표 x_i 와 변위 u_i 는 식(11)과 (13)에 각각 정의되어 있으므로 국부좌표계에 준하는 변위 그래디언트는 이계 텐서 변환을 사용하여 다음과 같이 구한다.

$$f'_{ij} = \theta_{im} \theta_{jn} f_{mn} \quad (19)$$

여기서 f_{ij} 와 f'_{ij} 는 각각 전체좌표계에서의 변위 그래디언트와 국부좌표계에서의 변위 그래디언트를 나타내고 θ_{ij} 는 식(5)로부터 구하였다. 위의 변환식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \partial u'_1/\partial x'_1 & \partial u'_2/\partial x'_1 & \partial u'_3/\partial x'_1 \\ \partial u'_1/\partial x'_2 & \partial u'_2/\partial x'_2 & \partial u'_3/\partial x'_2 \\ \partial u'_1/\partial x'_3 & \partial u'_2/\partial x'_3 & \partial u'_3/\partial x'_3 \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_1 & \partial u_3/\partial x_1 \\ \partial u_1/\partial x_2 & \partial u_2/\partial x_2 & \partial u_3/\partial x_2 \\ \partial u_1/\partial x_3 & \partial u_2/\partial x_3 & \partial u_3/\partial x_3 \end{bmatrix} \Theta^T \quad (20)$$

국부변형도는 국부좌표계에 준하는 변위 그래디언트를 식(15)에서 (20)에 기술한 방법으로 구할 수 있다. 기술한 변형도와 변위의 관계를 사용하여 개발된 RM 퇴화 헬 요소는 전술한 바와 같이 강성과대현상을 일으킬 수 있으며, 또한 감차적분을 사용할 경우 영에너지 모드가 발생하기도 한다. 이러한 문제점들은 대체변형도를 도입함으로써 해결되는데 본 연구에 도입된 대체변형도⁹⁾는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{13} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 P_i(\xi_1) Q_j(\xi_2) \epsilon_{13}^{\circ} \\ \bar{\epsilon}_{23} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 P_i(\xi_2) Q_j(\xi_1) \epsilon_{23}^{\circ} \\ \bar{\epsilon}_{12} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi_1) Q_j(\xi_2) \epsilon_{12}^{\circ} \end{aligned} \quad (21)$$

표 1 가변형도를 형성하기 위한 보간함수

a	$P_a(\xi)$	$Q_a(\xi)$
1	$0.5(1+\sqrt{3}\xi)$	$0.5\xi(\xi+1)$
2	$0.5(1-\sqrt{3}\xi)$	$0.5(1+\xi^2)$
3	-	$0.5\xi(\xi-1)$

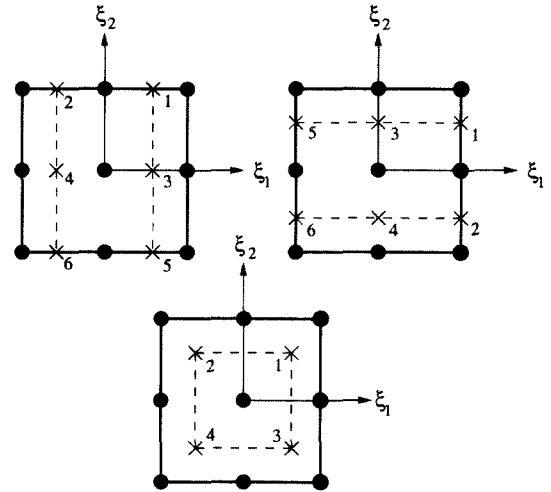


그림 4 표본점의 위치

여기서 보간함수는 표 1과 같으며 $\delta=2(j-1)+i$ 는 가변형도를 형성하기 위하여 추출되는 변형도의 채취점의 위치를 나타낸다. $\bar{\epsilon}_{11}$ 과 $\bar{\epsilon}_{22}$ 는 각각 $\bar{\epsilon}_{13}$ 과 $\bar{\epsilon}_{23}$ 과 같은 보간함수를 사용하여 구한다. 채취점에서 계산되는 변형도 ϵ_{ij}° 는 식(15)~(20)의 관계를 이용하여 구한다. 채취된 변형도 ϵ_{ij}° 의 위치는 그림 4에 도시하였다.

7. 콘크리트의 구성방정식

본 연구에서는 콘크리트의 비탄성 거동을 표현하기 위하여 Maekawa등⁸⁾에 의해서 제시된 미시적인 재료 모델을 도입하였다. 이 모델에 대한 개념은 참고문헌^{8),10)}에 자세히 설명되어 있으나 본 고에서는 논문의 완성도를 높이기 위하여 간략하게 정리하여 기술하였다. 도입된 미시적 재료모델은 철근콘크리트 구조물의 거동을 철근과 콘크리트의 거동특성으로 나누어 나타냈으며 등가응력-등가변형도의 관계를 이용하여 다차원의 값으로 표현되는 응력과 변형도값을 일차원의 관계로 표현하였다. 콘크리트는 균열이 일어나는 시점을 기준으로

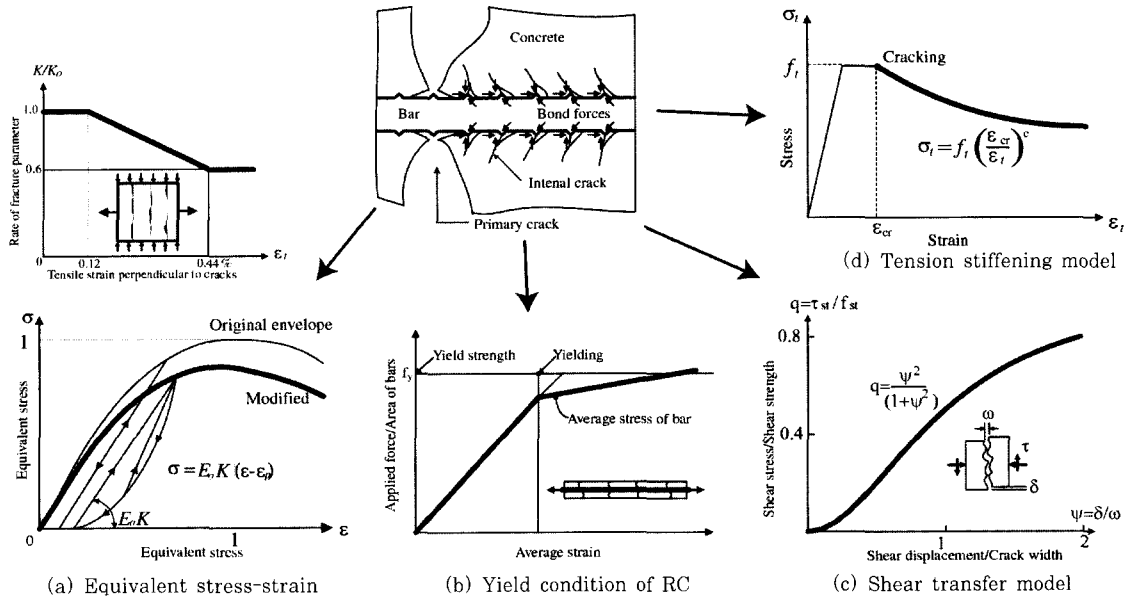


그림 5 미시적 재료모델의 개념도

로 재료적 거동에 큰 변화가 생긴다. 따라서 도입된 모델은 그림 5에서 도시된 바와 같이 콘크리트의 재료특성을 적절히 표현하기 위하여 균열 발생전과 후에 나타나는 콘크리트의 거동을 표현할 수 있는 재료모델로 구성되어 있다. 도입된 재료모델은 등가응력-등가변형도의 관계를 이용하여 콘크리트의 응력과 변형도의 수준을 결정하고, 콘크리트에 균열이 발생하면 부착응력을 고려하는 인장증강모델과 균열면에서의 전단전달메카니즘 그리고 고압축응력하에서의 파괴매개변수를 수정한 압축응력하에서 균열된 콘크리트모델 등으로 콘크리트의 재료적 거동을 표현하게 된다. 또한 균열발생을 측정하는 균열기준은 압축-인장영역에는 Niwa¹¹⁾가 제안한 응력포락선을 도입하였고 인장-인장의 영역에는 Aoygi-Yamada¹²⁾가 제안한 응력포락선을 사용하였다. 도입된 미시적인 모델은 응력이 균열 기준값에 도달하고 주변변형도 또한 한계변형도값에 이르면 균열이 발생한 것으로 간주한다. 한편으로 균열면에서 철근이 항복하면 철근의 다른 부분이 항복하지 않았더라도 철근의 평균응력과 평균변형도는 탄성의 영역을 벗어난다. 이때 철근의 평균응력은 그림 5(b)에서 보는 바와 같이 자연히 항복강도보다 낮아지게 된다. 따라서 철근콘크리트의 항복은 부재의 인장강성이 전체적으로 감소될 때나 균열면에서 철근의 응력이 항복강도에 도

달했을 때로 정의된다.

도입한 미시적 모델은 표준 퇴화셀 요소에 적용되었으며 층개념^{9), 13), 14)}을 도입하여 철근을 쉘 요소 임의의 층에 존재할 수 있게 하였다.

층이 존재하는 두께방향으로 수치적분을 취함으로써 재료의 이방성에 따른 두께 방향의 응력상태를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 다층개념을 도입함으로써 각 층의 중층면에서 응력을 계산하였고 계산된 응력은 각 층의 두께별로 그 응력이 일정하다고 가정하였다. 계산된 층 두께에 따른 응력은 그림 6과 같다.

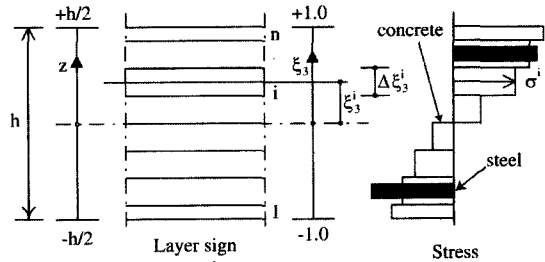


그림 6 쉘 단면의 다층 개념

참고로 이러한 방법으로 구해진 응력을 두께방향으로 적분하게 되면 힘의 항들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 N_i &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_i dz = \frac{h}{2} \sum_{\xi=1}^n \sigma_i^{\xi} \Delta \xi_3^{\xi} \\
 M_i &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_i z dz = \frac{h^2}{4} \sum_{\xi=1}^n \sigma_i^{\xi} \xi_3^{\xi} \Delta \xi_3^{\xi} \\
 Q_i &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_i dz = \frac{h}{2} \sum_{\xi=1}^n \tau_i^{\xi} \Delta \xi_3^{\xi}
 \end{aligned} \tag{22}$$

여기서 n 은 쉘의 단면을 이루고 있는 층의 수를 나타내고 h 는 쉘 단면의 전체두께를 나타낸다.

8. 평형방정식

가상일의 원리¹⁵⁾를 사용하면 고체에 대한 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\delta \epsilon^T \sigma - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) d\Omega - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} = 0 \tag{23}$$

위의 식에서 σ 는 응력, \mathbf{b} 는 물체력, \mathbf{f} 는 외부하중, $\delta \mathbf{u}$ 는 가상의 변위, $\delta \epsilon$ 은 가상의 변형도이다. 유한요소법을 이용한 이산화된 영역에서 변위와 변형도는 보간함수를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}, \quad \delta \epsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \tag{24}$$

여기서 \mathbf{N} 은 보간함수행렬을 나타내고 \mathbf{B} 는 변형도-변위관계의 행렬을 나타낸다. 식(24)을 식(23)에 대입하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} (\mathbf{B}^T \sigma - \mathbf{N}^T \mathbf{b}) d\Omega - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} = 0 \tag{25}$$

위의 식은 임의의 가상의 변위에 대하여 성립하여야 하므로 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega - \mathbf{f} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \tag{26}$$

결과적으로 잔여력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} - \mathbf{P} = 0 \tag{27}$$

여기서 \mathbf{K} 는 내력을 나타내고 \mathbf{P} 는 외력을 나타낸다.

9. 비선형 해석알고리즘

비선형방정식을 수치적인 방법으로 풀기 위해서는 일반적으로 Newton-Rapson(NR)법을 사용한다. 이때 비선형방정식은 다음과 같은 방법으로 선형화⁹⁾된다.

$$\partial \mathbf{K}(\mathbf{U}_m^i) \Delta \mathbf{U}_m^i = \mathbf{R}_m - \mathbf{K}(\mathbf{U}_m^i) \tag{28}$$

여기서 $\partial \mathbf{K}(\mathbf{U}_m^i)$ 는 변위 \mathbf{U}_m^i 값에 대한 접선강성행렬을 나타낸다. 아래첨자 m 은 현재 m 번째 하중스텝을 나타내고 윗첨자 i 는 현재 반복계산 수를 나타낸다. 참고로 접선강성행렬은 내력함수를 미분하여 구하게 된다. 이렇게 선형화된 방정식은 그 해를 구하기 위하여 주로 NR법을 이용한다. NR법은 기본적으로 각 증분단계의 접선강성, 내력, 그리고 불평형력등의 항을 이용하여 주어진 수렴 조건을 만족할 때까지 반복계산한다. 비선형해석은 여러 단계의 증분을 가지므로 임의의 증분단계 m 에 대하여 NR법을 정리하면 다음과 같다.

- 1) 전 단계 $m-1$ 에서 외력 \mathbf{R}_{m-1} 과 내력 $\mathbf{K}(\mathbf{U}_{m-1}^i)$ 가 주어진 오차 내에서 평형을 이루었으면 이때의 변위 \mathbf{U}_m^0 를 현 하중증분단계 m 의 초기 변위값으로 사용한다.
- 2) 변위 \mathbf{U}_m^i 를 사용하여 내력 $\mathbf{K}(\mathbf{U}_m^i)$ 을 구한다.
- 3) 불평형력 $\mathbf{R}_m^i = \mathbf{R}_{m-1} - \mathbf{K}(\mathbf{U}_m^i)$ 을 구한다.
- 4) 수렴을 확인한다. 수렴이 이루어 졌으면 반복계산을 중지하고 다음 증분 단계 $m+1$ 로 넘어간다.
- 5) 접선강성행렬을 형성한다.
- 6) 변위증분값 $\Delta \mathbf{U}_m^i$ 을 계산하여 변위값 $\mathbf{U}_m^{i+1} = \mathbf{U}_m^i + \Delta \mathbf{U}_m^i$ 을 수정한다.
- 7) $i = i+1$ 을 한 뒤 다음 단계로 간다.

표준 NR법은 각 반복연산에 대하여 강성행렬을 형성하므로 수치적으로 그 계산시간이 긴데 접선강성행렬을 각 반복계산 단계마다 계산하지 않으면 계산시간을 줄일 수 있다.

따라서 그림 7에 도시된 바와 같이 초기의 접선강성행렬을 반복계산 과정에 지속적으로 사용할 수가 있으며 이러한 방법을 수정된 NR법이라고 하며 본 연구에서는 이 방법을 택하였다.

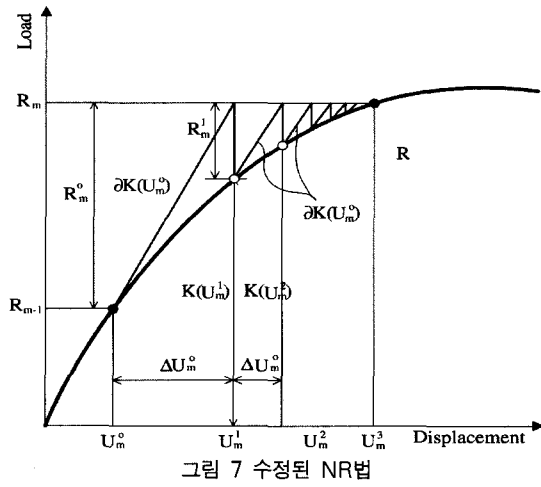


그림 7 수정된 NR법

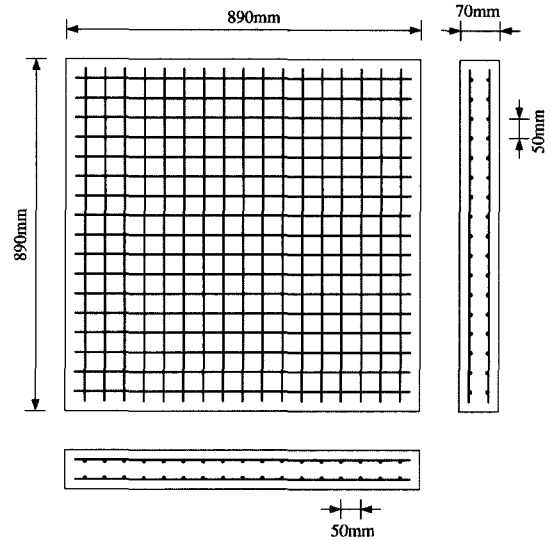


그림 8 판넬 시편의 형상

10. 수치예제

10.1 Vecchio & Collins 패널

Vecchio와 Collins¹⁶⁾가 시행한 패널 실험 결과를 이용하여 쉘 요소의 면내력에 대한 성능을 검증하였다. 그림 8에 도시된 바와 같이 실험체는 크기가 890mm × 890mm이며 두께가 70mm인 정방형 패널이며 상부와 하부에 각각 ρ_x 와 ρ_y 의 철근비로 배근되었다. 이 실험은 철근비, 하중조건, 콘크리트 강도등의 다양한 변수를 이용하여 패널의 구조적 거동을 조사하였다. 하중은 순수 전단력과 전단력과 인장력을 조합한 경우 그리고 전단력과 압축력을 조합한 경우의 세가지 하중조건으로 나누어진다. 그리고 순수전단을 받는 경우는 x 방향의 철근비와 y 방향의 철근비를 같게 한 경우와 x 방향의 철근비를 상수로 한 뒤 y 방향의 철근비를 변화

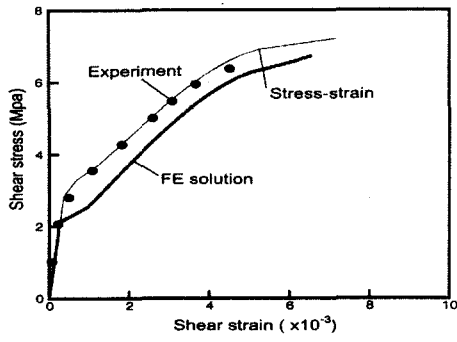
시킨 경우에 대한 패널의 거동을 알아 보았다. 전단력과 인장력 또는 전단력과 압축력을 조합한 경우는 x 방향과 y 방향의 철근비를 같게 하였다. 본 예제에 사용된 하중조건과 철근비는 표 2에 표시된 바와 같다.

본고에서는 순수 전단력에 대한 패널실험 5개, 전단력과 압축력에 대한 실험 2개 그리고 전단력과 인장력에 대한 실험 1개로 모두 8개의 패널에 대한 수치해석 결과를 기술하였다.

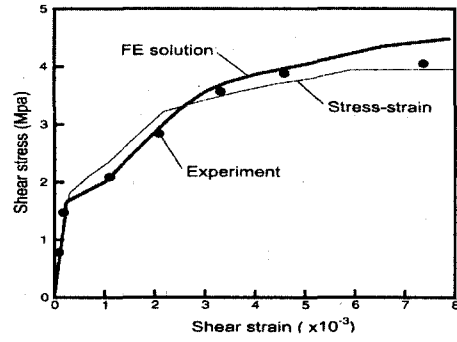
벽체에 사용된 재료의 성질은 프와송비가 $\nu=0.2$, 철근의 탄성계수는 $E_s=200000\text{Mpa}$ 이다. 패널은 유한요소해석을 위하여 4개의 9절점 요소로 이산화 하였다. 패널의 해석결과로부터 도출된 전단응력-전단변형도를 8개의 패널에 대하여 그림 9에 도시하였다. 사용된

표 2 패널의 재료특성치(하중단위 : kg, 변위단위 : cm)

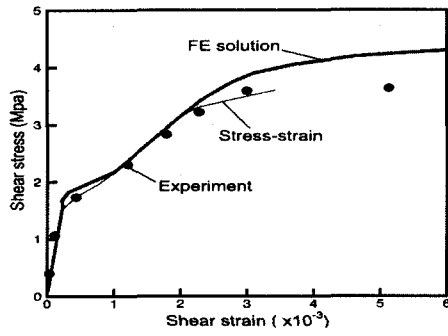
Panel NO	Loading ratio	Longitudinal steel		Transverse steel		Concrete
	$\tau:\sigma_x:\sigma_y$	ρ_x	f_x	ρ_y	f_y	f_{cu}
PV27	1:0:0	0.01785	442	0.01785	442	20.5
PV10	1:0:0	0.01785	276	0.00999	276	14.5
PV11	1:0:0	0.01785	235	0.01306	235	15.6
PV21	1:0:0	0.01785	458	0.01296	302	19.5
PV22	1:0:0	0.01785	458	0.01524	420	19.6
PV23	1:-0.39:-0.39	0.01785	518	0.01785	518	20.5
PV25	1:-0.69:-0.69	0.01785	466	0.01785	466	19.2
PV28	1:0.32:0.32	0.01785	483	0.01785	483	19.0



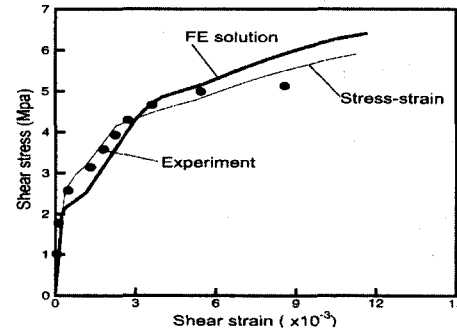
(a) PV27



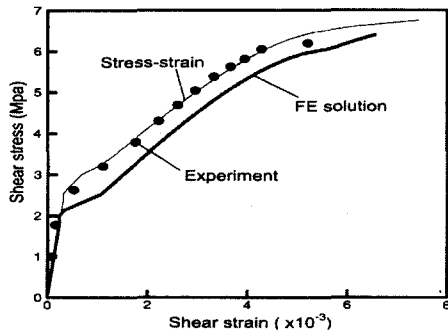
(b) PV10



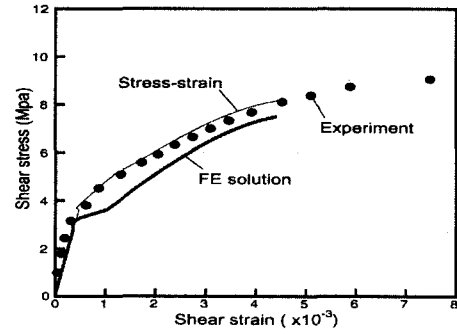
(c) PV11



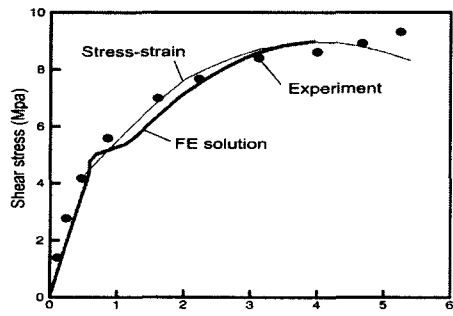
(d) PV21



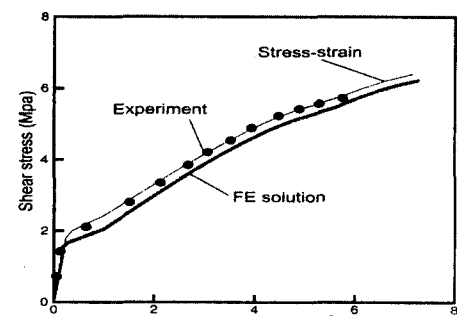
(e) PV22



(f) PV23



(g) PV25



(h) PV28

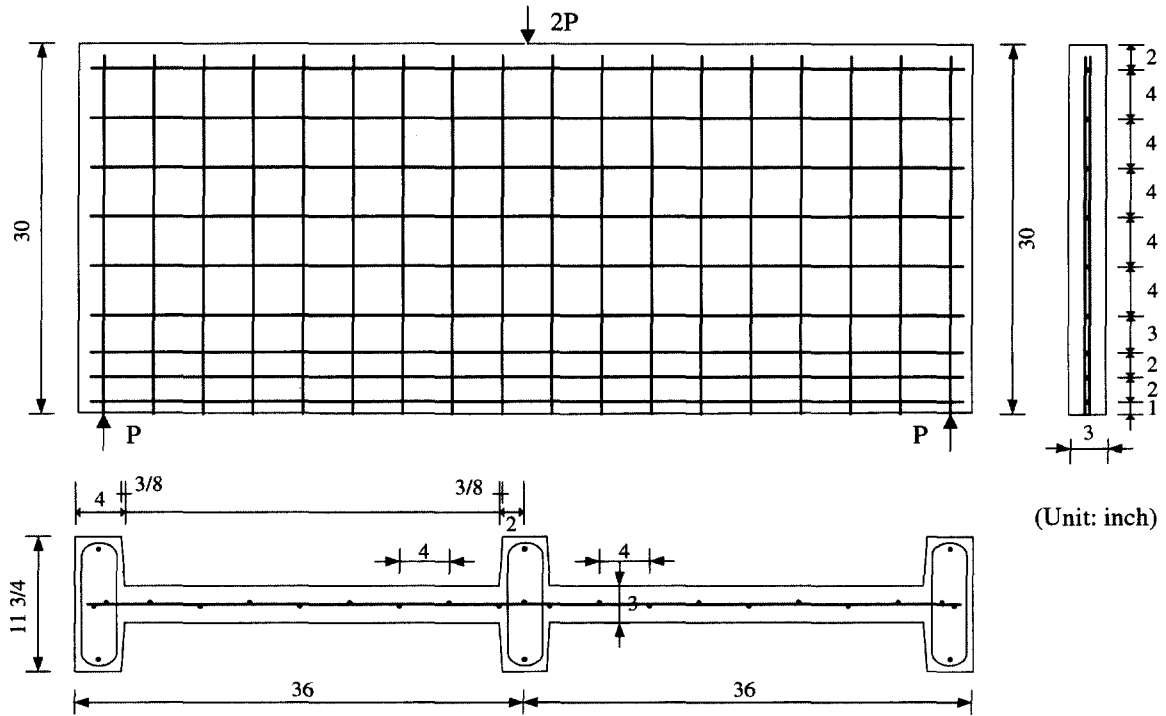
그림 9 패닐의 응력-변형도 곡선

재료모델은 응력-변형도의 관계식을 이용하여 시험하였으 며 그 결과¹⁷⁾를 본 연구에서 도출한 해석결과와 비교하였다. 도시된 결과를 살펴보면 도입된 재료모델의 면내력에 대한 성능은 전체적으로 실험결과와 잘 일치하였다. 그리고 다음의 몇 가지 특징을 나타내었다. 순수 전단이 패널에 작용하는 경우 도입된 재료 모델은 항복강도가 높은 철근을 사용할수록 실험결과보다 유연한 결과를 나타내었고, 항복강도가 낮은 철근을 사용하면 실험결과보다 유연하지 않은 결과를 보였다. 하지만 조합응력이 패널에 작용할 경우 실험 결과에 보다 근접한 결과를 도출하였다. 그리고 x 와 y 방향에 사용된 철근의 항복강도의 차이가 클수록, 즉 y 방향의 철근비가 매우 적을 경우, 수치해석 결과는 판에 가해지는 응력수치가 높아질수록 실험의 결과의 패턴과 잘 일치하지 않는 경향이 있었다. 그리고 콘크리트의 압축강도가 높은 시험체일 수록 수치해는 실험결과와 비슷한 패턴의 결과를 도출하였다. 참고로 본 연구에서는 패널의 인장증강을 고려하기 위하여 그림 5(d)의 인장증강모델의 지수를 $c=0.2$ 를 사용하였다.

10.2 전단 벽체

Cervenka와 Gerstle¹⁸⁾이 실험 연구한 전단벽체는 그 결과가 발표된 이래 유한요소를 검증하기 위해서 빈번히 사용되었다. 본 연구에서는 쉘 요소의 균열패턴 예측에 대한 성능을 분석하기 위하여 이 전단벽체를 이용하였다. 전단벽체의 두께는 3인치이며 벽체의 양끝이 두꺼운 리브로 처리되었다. 벽체가 좌우대칭이며 벽체의 형상을 그림 10에 도시하였다.

벽체에 사용된 재료의 성질은 다음과 같다. 콘크리트의 압축강도와 인장강도는 각각 $f_{cu}=3.54\text{Kpsi}$ ($=24.41\text{Mpa}$), $f_t=0.51\text{Kpsi}$ ($=3.52\text{Mpa}$)이며 프와송비는 $\nu=0.15$ 을 사용하였다. 벽체에 사용된 철근은 No. 3 ($A_s=0.11\text{in}^2=7.1\text{mm}$)이고, 철근의 탄성계수, 프와송비 그리고 항복강도는 각각 $E=27300\text{Kpsi}$ ($=188233.5\text{Mpa}$), $\nu=0.2$, $f_y=51.2\text{Kpsi}$ ($=353\text{Mpa}$)이다. 유한요소해석을 위하여 24개의 9절점 쉘요소를 사용하여 벽체의 1/2을 이산화하였다. 실험에 의한 벽체의 파괴하중값은 $P_u=115\text{KN}$ 이며 해석에 의한 벽체의 파괴하중은 $P_u=118\text{KN}$ 으로 계산되었다. 가력점에서의 하중이



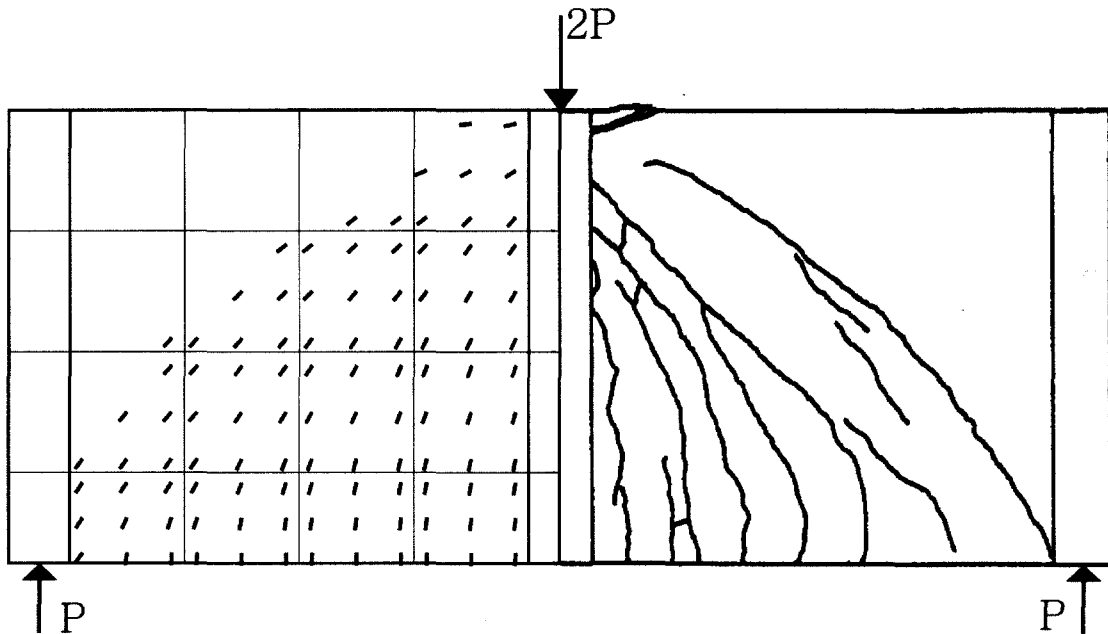


그림 11 전단 벽체의 균열패턴

$P=118\text{KN}$ 일 때 벽체의 균열양상을 그림 11에 도시하였다. 해석에 의해서 계산된 벽체의 파괴하중은 실험값과 매우 근사하였고 균열양상 또한 개발된 셸요소를 이용하여 실험에 의한 결과와 매우 유사하게 예측할 수 있었다. 그림 11의 좌측은 유한요소해석으로부터 구한 벽체의 균열양상이고 그림 11의 우측은 실험으로부터 구한 벽체의 균열양상을 나타낸다. 유한요소해석으로부터 벽체의 가력점에 가장 가까운 적분점에서 콘크리트의 압쇄가 일어났다.

10.3 원전 격납건물

본 예제에는 개발된 셸 요소를 사용하여 한국형 표준 원전 격납건물의 거동을 조사하였다. 격납건물의 제원은 그림 12에 도시하였다. 해석을 용이하게 하기 위하여 격납건물의 가용 개구부는 유한요소모델에서 제외시켰으며 벽체의 배근상태를 간략화하였다. 또한 정점 부분에 가상의 개구부¹⁹⁾를 도입함으로써 이산화물 용이하게 하였다. 격납건물은 축 대칭이므로 건물의 1/4만을 60개의 셸 요소로 이산화하였다.(그림 13참조).

격납건물에 사용된 콘크리트의 압축강도는 $f_{cu}=38\text{Mpa}$ 이며 프와송비는 $\nu=0.17$ 이고 밀도는 $\rho=0.0025\text{kg/cm}^3$

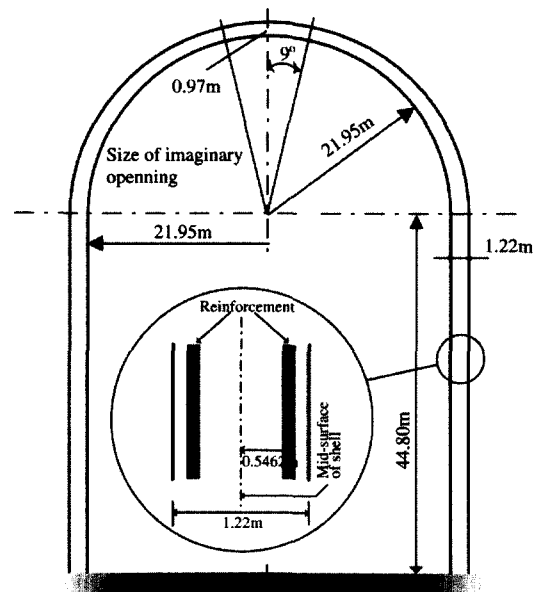


그림 12 격납건물의 제원

이다. 철근의 탄성계수, 프와송비 그리고 항복강도는 각각 $E=200000\text{Mpa}$, $\nu=0.2$, $f_y=413.65\text{Mpa}$ 를 사용하였다. 철근은 셸의 중층에서 격납건물의 안쪽과

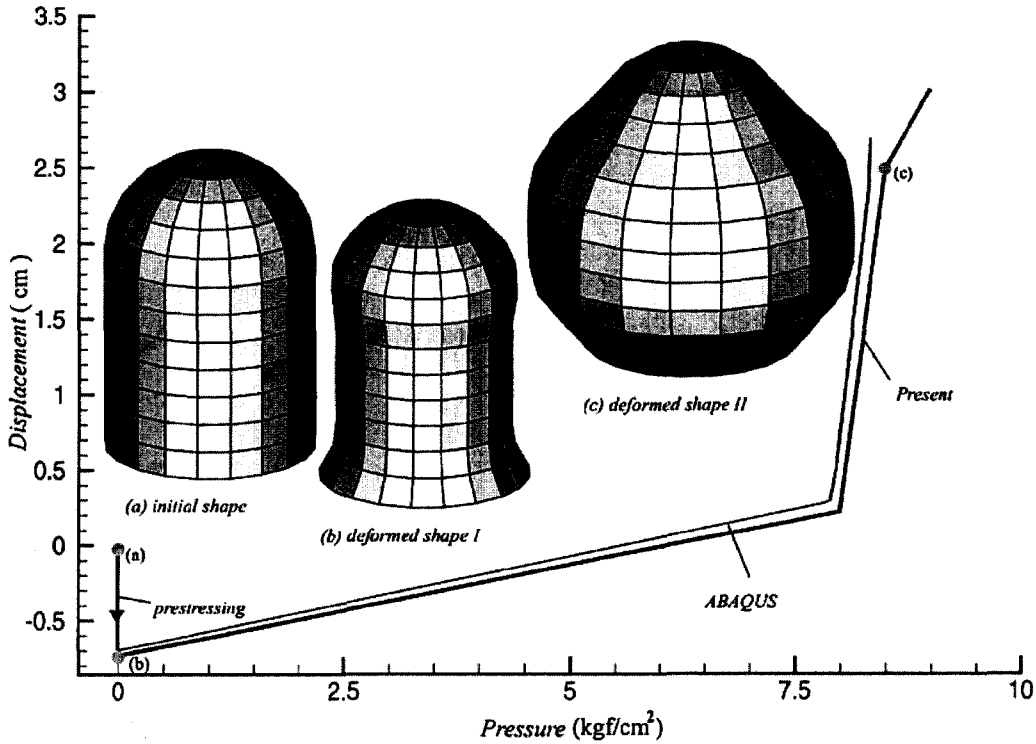


그림 13 격납건물의 초기형상과 변형정도

바깥쪽으로 0.5462m인 지점에 대칭으로 배치되어 있는 것으로 가정하였으며 원환과 자오선방향으로 같은 철근비($\rho_s=0.02$)를 가지고 있다고 가정하였다.

격납건물에 작용하는 하중은 자중, 텐돈의 프리스트레스력, 그리고 격납건물의 내부에서 작용하는 압력으로 나누어진다. 자중은 전술한 콘크리트의 밀도를 이용하여 계산하였고 프리스트레스력은 외압으로 환산하여 격납건물의 외벽에 $q_e=5.414\text{kgf/cm}^2$ 의 분포하중으로 작용하게 하였다. 유한요소해석 시 하중은 자중을 먼저 가한 뒤 프리스트레스력에 해당하는 외부압력을 작용시켰고 마지막으로 내부압력을 $q_i=0.5\text{kgf/cm}^2$ 씩 단계별로 증가시켰다. 해석결과는 격납건물 벽체 부분에서 발생하는 최대변위값을 상용프로그램인 ABAQUS²⁰⁾의 해석결과와 비교하여 그림 13에 도시하였다. ABAQUS를 이용한 유한요소해석을 위해서 전체 2414개의 4절점 축대칭 고체요소 그리고 402개의 2절점 축대칭 막 요소를 사용하였다. 이때 사용한 재료모델은 참고문헌²¹⁾에 사용한 것과 동일한 것을 사용하였다. 최대변위값은

유한요소의 수가 상이하여 본 연구를 통해 구해진 해는 지면으로부터 격납건물 벽체의 25.60m지점에서 측정하였으며 ABAQUS의 해는 26.26m지점에서 측정하였다. 본 연구를 통해 도출된 결과는 적은 수의 유한요소를 사용하였으나 ABAQUS의 해와 비교적 잘 일치함을 그림 13으로부터 알 수 있다. 자중과 프리스트레스력을 받을 경우 격납건물은 그림 13(b)에서 도시된 바와 같이 종 모양으로 수축하였으며 이때 최대 변위는 0.673cm이었다. 수축된 격납건물은 내압의 증가로 초기 형상을 찾아가는데 내압이 $q_i=6.0\text{kgf/cm}^2$ 이 되면 초기 형상을 되찾았고 내압이 계속 증가하여 $q_i=8.5\text{kgf/cm}^2$ 에 이르면 최대변위가 2.492cm에 도달하였다. 참고로 ABAQUS를 사용하여 구한 해의 경우 자중과 프리스트레스력으로 수축한 격납건물의 최대변위는 0.683cm이었고 최대압력에 도달했을 때의 최대변위는 2.66cm이었다. 수축된 격납건물의 형상은 그림 13(b)에 도시된 바와 같이 돔의 정점부가 다소 하강하였으나 최대 내압에 이르렀을 경우 그림 13(c)에 도시된 바와 같이

격납건물은 전체적으로 부풀었으며 정점부분 또한 상승하였다.

11. 결 론

철근콘크리트 구조물의 비탄성 해석을 수행하기 위하여 가변형도법과 미시적 재료모델을 바탕으로 한 퇴화 쉘 유한요소를 개발하였다. 개발된 쉘 요소의 성능을 두 가지의 패널 실험결과와 콘크리트로 된 격납건물의 수치해석결과를 이용하여 비교 분석하였다. 개발된 쉘 요소는 철근콘크리트 구조물의 면내 거동을 정상적분을 사용하여 강성과대현상 없이 잘 예측하였으며 콘크리트 인장-인장영역의 거동이 지배적인 격납건물의 극한내압 또한 적은 수의 요소를 이용하여 비교적 정확히 예측하였다. 그리고 마지막 수치예제로 사용된 철근콘크리트 쉘 구조물은 쉘 요소의 성능을 검증하기 위한 벤치마크 검사로 제시하고자 한다. 철근콘크리트 구조물의 해석은 요소의 개선과 함께 해석 기법의 개선이 반드시 동반되어야 하므로 개발된 쉘 요소는 향후 호장법과 같은 해석기법을 적용하여 그 성능을 충분히 검증해야 할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부의 원자력 중장기연구개발 사업의 일환으로 수행되었고 격납건물 비선형 유한요소 해석코드 NUCAS(Nuclear Containment Analysis System)의 개발에 도움을 주신 동경대학교의 Prof. Maekawa와 성균관대학교의 신현목교수께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Chen, A. C. T. and Chen, W. F. "Constitutive relations for concrete", J. Eng. Mechanics Vol. , 1975, pp.465~481
2. Ahmad, S., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C. "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", Int. J. Numer. Method. Eng. Vol. 2, 1970, pp.419~451
3. Reissner, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate", ASME J. Appl. Mech. Vol. 12, pp.69~76
4. Stolaski, H and Belytscho, T., "Shear and membrane locking in curved C^0 element", Comp. Meth. Appl. Mech., Vol. 49, 1983, pp.279~296
5. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M., "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int. J. Numer. Method. Eng., Vol. 3, 1971, pp.275~290
6. Choi, C. K. and Yoo, S. W., "Geometrically nonlinear behaviour of an improved degenerated shell element", Computers & Structures, Vol. 40, 1991, pp.785~794
7. Dvorkin, E. N. and Bathe, K. J., "A continuum Mechanics based on four-node shell element for general nonlinear analysis", Eng. Comput., Vol. 1, 1984, pp.77~88
8. 岡村甫, 前川宏一, "鐵筋コンクリートの非線形解析と構成則", 技報堂出版, 1991
9. Lee, S. J. and Kanok-Nuchulchai, W., "A nine-node assumed strain finite element for large-deformation analysis of laminated shells", Int. J. Numer. Method. Eng. Vol. 42, 1998, pp.777~798
10. Maekawa, K. and Okamura, H., "The deformation behaviour and constitutive equation of concrete using elasto-plastic and fracture model", J. faculty of Engineering, Univ. of Tokyo(B), Vol. 37, No.2, 1983, pp.253~328
11. 二羽淳一郎, "鐵筋コンクリート 板要素の力學的性状", 土木工學科, 東京大學修士論文, 1980
12. Aoyagi, Y. and Yamada, K., "Strength and deformation characteristics of RC shell elements subjected to in-plane forces", Concrete library international JSCE, No. 4, pp.129~160, 1984
13. Hinton, E and Owen, D. R. J., "Finite element software for plates and shells", Pineridge Press, Swansea, 1984
14. Lee, S. J., Bae, J. E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial

- material model", Int. J. Numer. Method. Eng. Vol. 47, 2000, pp.843~867
15. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. "The finite element method", McGraw-Hill, London, 1989
 16. Vecchio, F and Collins, M. P., "The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stress", University of Toronto, 1982
 17. 최정호, 유영화, 신현목, "단조증가하중을 받는 철근콘크리트 판 요소의 비선형 해석", 대한토목학회 논문집, 제16권, 제I-5호, pp.585~593, 1996
 18. Cervenka, V. and Gerstle, K. H., "Inelastic analysis of reinforced concrete panels", Part I : theory, Int Assoc Bridge Struct Engrs Publs, Vol. 31, 1971, pp.31~45
 19. 이상진, 이홍표, 서정문, "격납건물 FE모델의 정점개구부 유무에 따른 동적 특성분석", 대한토목학회추계학술발표회, 2000, pp.320~324
 20. 김현아, 배인환, 최인길, "원전격납건물의 프리스트레스 손실에 따른 거동 영향평가", 한국원자력학회 춘계학술발표회, 2000
 21. ABAQUS/Standard User's manual(Ver. 5.8), Hibbitt, Karlsson & Sorensen, INC, 1998