

Delaunay 삼각화를 이용한 적응적 Element-free Galerkin 해석

Adaptive Element-free Galerkin Procedures by Delaunay Triangulation

이 계 희*

정 흥 진**

최 창 근***

Lee, Gye-Hee

Chung, Heung-Jin

Choi, Chang-Koon

(논문접수일 : 2001년 5월 21일 ; 심사종료일 : 2001년 10월 29일)

요 지

본 연구에서는 무요소법의 일종인 element-free Galerkin 방법(EFGM)을 이용한 새로운 적응적 해석법을 제안하였다. 이 방법의 핵심은 Delaunay 삼각화에 기초를 둔 적분 격자를 기초로 수치적분과 적응적인 절점의 추가 및 소거를 수행하는 것이다. 이러한 적응적해석법은 적분격자의 분할이나 이를 위한 추가적인 정보에 대한 관리가 필요 없이 간편하게 적응적 해석을 수행할 수 있다. 또한 균열의 진전과 같은 다단계 적응적 해석에 있어서도 매 해석단계별로 평가된 오차에 기초를 둔 최적 해석모델이 Delaunay 삼각화에 의해 구성되도록 하였다. 이러한 특성은 요소의 구성으로부터 자유로운 무요소법의 장점을 최대한 활용하여 해석모델의 구축을 보다 원활하게 수행할 수 있다. 적응적 해석에 기초가 되는 해석 후 오차평가는 계산된 응력과 투영응력과의 차이를 오차로 추정하는 투영응력법을 이용하였다. 균열진전을 포함하는 2차원예제의 해석을 수행한 결과 제안된 해석법의 타당성과 적응성을 입증할 수 있었다.

핵심용어 : 무요소법, 적응적 해석, Delaunay 삼각화, 균열진전

Abstract

In this paper, a new adaptive analysis scheme for element-free Galerkin method(EFGM) is proposed. The novel point of this scheme is that the triangular cell structure based on the Delaunay triangulation is used in the numerical integration and the node adding/removing process. In adaptive analysis with this scheme, there is no need to divide the integration cell and the memory cell structure. For the adaptive analysis of crack propagation, the reconstruction of cell structure by adding and removing the nodes on integration cells based the estimated error should be carried out at every iteration step by the Delaunay triangulation technique. This feature provides more convenient user interface that is closer to the real mesh-free nature of EFGM.

The analysis error is obtained basically by calculating the difference between the values of the projected stresses and the original EFG stresses. To evaluate the performance of proposed adaptive procedure, the crack propagation behavior is investigated for several examples.

Keywords : *Element-free Galerkin method, Adaptive analysis, Delaunay triangulation, crack propagation*

* 시설안전기술공단 진단1본부, 과장

** 정희원 · 전주대학교 토목환경공학과, 조교수

*** 정희원 · 한국과학기술원 토목공학과, 석좌교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 3월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

무요소법에서는 절점이 요소망에 관계없이 임의의 지점에 위치 할 수 있어 h -type의 적응적 해석에 유리한 특성을 가지고 있다. 따라서 여러 연구자들이 h -type의 적응적 해석법들이 여러 가지 무요소법을 대상으로 제안되었다.^{1),2)} 그러나 이들 적응적 해석법의 대부분은 적분격자망에 의존한 적응적 세분화를 제안하고 있어 아직까지는 절점의 위치만으로 해를 구하는 엄밀한 의미의 소위 'mesh-free'한 단계까지는 이르지 못하고 있다. 따라서 많은 연구자들이 절점적분이나 bubble mesh같은 새로운 절점배치법에 관하여 연구를 수행하고 있으나 이러한 새로운 방법들은 지나치게 복잡한 과정을 필요로 하거나 아직까지는 개발 중인 상태이다.^{3),4)} 이러한 이유로 격자망로부터 보다 독립적인 적응적 해석법에 대한 개발의 필요성도 증대되고 있다.

격자망으로부터 독립적인 특성을 갖는 무요소법을 구현하는 방법 중의 하나는 Delaunay 삼각화법등을 이용해 임의적으로 분포된 절점군으로부터 자동적으로 적분을 위한 격자를 생성하는 것이다. 유한요소법에서의 적응적 해석에서는 이러한 삼각형요소의 사용이 형상함수등과 연관이 있기 때문에 요소의 응답이 좋지 않은 경우가 발생할 수 있지만 무요소법에서 형상함수는 적분격자와 독립적으로 구성되므로 유한요소법에서 발생할 수 있는 이러한 단점에 대한 고려가 필요 없다.

한편, 적응적 해석의 적용에 있어서 신뢰성있는 오차의 산정과 효율적인 절점의 배치는 가장 중요한 과정이며 개발된 해석법의 효율을 좌우하는 중요한 요소이다. 따라서 이에 대한 연구는 여러 연구자들에 의해 비중있게 추진되었으며 그 결과 많은 진전을 이룰 수 있었다. 그 중 Duarte와 Oden은 그들이 개발한 hp -cloud방법을 이용해 내부 영역과 Neumann 경계조건에서의 잔차를 계산하고 이를 이용한 오차평가를 수행하였고⁵⁾ Liu 등은 Reproducing Kernel Particle Methods(RKPM)에 대하여 wavelet 분해를 통한 고응력 경사부분 및 경계 탐색 알고리즘을 개발하고 이를 오차지수로 이용하여 오차분포를 산정하였다.⁶⁾ 또한 Hausser-Combe 등은 변형율의 경사(stain gradient)와 절점간의 거리를 이용해 EFG 방법에 적용 가능한 적응적 해석법을 제시하였다.¹⁾

최근에는 Chung등의 응력의 재투영을 이용한 투영

응력법을 제안하였고⁷⁾ 이를 이용하여 적응적인 균열진전해석이 성공적으로 수행되었다.^{8),9)}

본 연구에서는 삼각화를 이용한 자동격자 생성과 투영응력을 이용한 오차평가법을 기초로 하여 무요소법을 위한 새로운 적응적 해석법을 제안하였다. 이 해석법에서는 두 단계로 적응적 해석이 이루어진다. 첫 번째로 절점에서의 응력과 투영된 응력의 차로 오차를 산정하는 투영응력법에 의해 전체 해석의 오차와 국부적인 오차지수를 구한다. 그리고 두 번째 단계로 평가된 오차에 준거하여 절점을 추가하거나 소거하게 된다. 이 과정에서 Delaunay삼각화에 의해 자동적으로 다음 단계의 적분격자가 구성되기 때문에 적분격자의 분할이나 복구에 대한 사용자의 개입이 필요없다. 이러한 특징은 적응적 해석에서 격자망에 대한 의존을 줄여 보다 'mesh-free'한 무요소법의 구현을 가능하게 한다.

2. 투영응력법에 의한 오차 평가

EFG 방법에서 응력은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (1)$$

여기서 \mathbf{D} 는 탄성 계수 행렬이고 \mathbf{S} 는 변형률을 정의하기 위한 미분연산자이며 ϕ_I 는 절점에서의 EFG형상함수이다. 또한 n 은 영향영역 Ω_x^e 내의 절점수이다.

투영응력법에 의한 오차 산정의 핵심은 투영된 응력 σ^p 와 원래의 EFG응력 σ^h 의 차를 오차지수로 사용하는 것이다. 이 때 투영응력은 절점응력을 원 EFG계산시와 다른 영향반경을 갖는 형상함수로 다시 투영하여 얻어진다. 이를 식을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma^p(\mathbf{x}) &= \sum_K^l \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}_K) \mathbf{u}_I \right\} \\ &= \sum_K^l \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{b}^h(\mathbf{x}_K) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$ 절점 K 에서의 응력이고, l 은 투영시 사용하는 형상함수의 영향영역 Ω_x^p 내의 절점수이고 $\psi_K(\mathbf{x})$ 는 EFG해석시 사용했던 형상함수와 다른 영향영역을

갖는 EFG 형상함수이다.

투영응력은 단순히 계산된 절점에서 응력에 다른 영향영역 Ω_p^r 을 갖는 형상함수로 보간하여 얻어진다. 따라서 이 방법은 대부분의 오차평가에 수반되는 행렬의 연산과정이 없고 단순히 형상함수의 보간만으로 수행되므로 간단하고 효율성이 높다. 이와 같이 얻어진 투영응력을 정확해라 가정하면 임의점 x 에서의 오차 σ^e 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (3)$$

이 오차를 본 연구에서 수행한 적응적해석의 지수로 사용하였다.

3. 균열의 진전방향과 응력확대계수(stress intensity factor)의 산정

3.1 균열 진전방향

균열진전에 대한 해석을 수행하기 위해서는 균열의 진전 방향을 산정해야 한다. 본 논문에서는 최대 주응력 기준¹⁰⁾을 사용해 균열의 성장방향을 예측하였다. 최대 주응력법에서는 최대 원주방향응력 $\sigma_{\theta\theta}$ 에 수직인 방향으로 균열이 발생한다고 가정한다. 이 때 최대 원주방향응력 방향은 전단응력이 소거되는 방향이다.¹¹⁾

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{1}{2} k_1 \sin \theta + \frac{1}{2} k_2 (3 \cos \theta - 1) \right] = 0 \quad (4)$$

여기서 k_1, k_2 는 각각 모드 1, 모드 2의 응력확대계수이고 다른 변수는 그림 1에서 보는 바와 같다.

위 식의 해중 $\cos \theta / 2 = 0$ 의 해인 $\theta = \pm 180^\circ$ 는 물리적으로 적절하지 않으므로 무시한다.

따라서 실제로 균열이 진전하는 방향은 다음 식의 값을 0으로 만드는 방향이다.

$$k_1 \sin \theta_m + k_2 (3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (5)$$

따라서 위 식에서 얻어진 각 θ_m 이 균열의 진전방향을 나타낸다

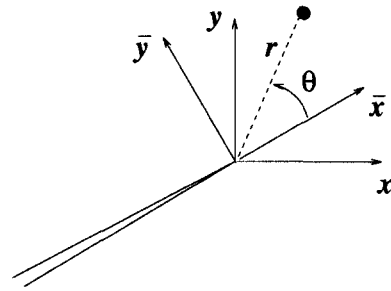


그림 1 균열선단에서의 좌표계

$$\theta_m = \arctan \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + 8} \right) \quad (6)$$

위에서 얻어진 균열진전방향에 대하여 $\sigma_{\theta\theta}$ 은 균열선단의 주응력이다. 따라서 $\sigma_{\theta\theta}$ 을 이용해 다음과 같은 균열선단의 등가 모드 1 응력 확대계수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_m}{2} \left[k_1 \cos^2 \frac{\theta_m}{2} - \frac{3}{2} k_2 \sin \theta_m \right] \\ &= \frac{k_{1eq}}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서

$$k_{1eq} = k_1 \cos^3 \frac{\theta_m}{2} - 3k_2 \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \sin \frac{\theta_m}{2} \quad (8)$$

이 등가 모드 1 응력확대 계수 k_{1eq} 를 사용하므로써 혼합 모드의 응력장을 간단히 기술할 수 있고 혼합모드의 외부 하중에 대하여 균열의 증가율을 계산할 수 있다.

3.2 균열 확대계수의 계산

앞 절에서 언급한 균열의 진전방향을 계산하기 위해서는 균열확대계수의 산정이 필요하다. Yau¹³⁾, Shih와 Asaro¹²⁾ 등은 혼합모드 균열의 응력확대 계수의 계산에 효과적인 상호적분법(interaction integral)을 제안하였다. 상호적분법에서는 우선 균열이 발생한 물체의 독립적인 2개의 평형상태를 고려한다. 상태1은 주어진 경계조건에서의 현재상태(actual state)이고 상태2는 균열진전 후에 얻어질 보조상태(auxiliary state)이다.

이 방법에 의하면 응력확대계수는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$k_1^{(1)} = \frac{E'}{2} M^{(1,2)} \quad (9)$$

$$k_2^{(2)} = \frac{E'}{2} M^{(1,2)} \quad (10)$$

여기서

$$M^{(1,2)} = \int_A \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (11)$$

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)}) = \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \quad (12)$$

$$q = \begin{cases} 1 & \text{on } \Gamma_1 \\ 0 & \text{on } \Gamma_2 \\ \text{arbitrary} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

(그림 2참조)

이 상호적분은 보조상태의 선택에 대한 가정 때문에 탄성재료에서만 사용할 수 있다. 그러나 응력확대계수도 또한 균열선단에 무시할 수 있을 정도로 작은 소성영역이 발생하는 경우에만 유효한 계수이기 때문에 상호적분을 사용하는데는 문제가 없다.

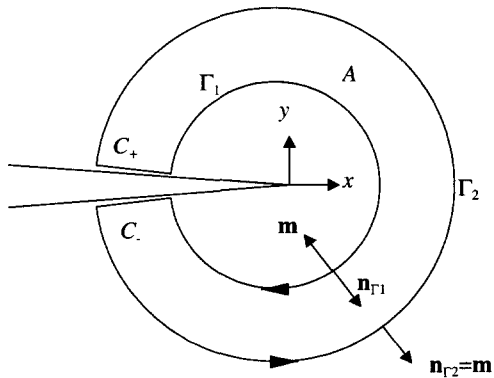


그림 2 적분경로에 독립적인 균열선단에서의 폐합적분

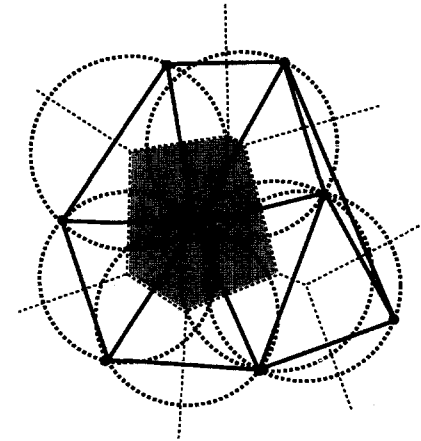
4. 적응적 세분화 및 재결합

4.1 Delaunay 삼각화¹⁴⁾

Delaunay 삼각형은 영역을 분할하는 간단하면서도 강력한 방법이다. 주어진 절점들의 집합에서 한 절점을 살짝 들어 꼬깔 모양을 만든다고 생각하면 그 영역은 주어진 꼭지점에 대하여 다른 꼭지점보다 가까운 꼭지점으로 둘러싸인 영역을 이외의 영역으로 나뉜다. 이러한 영역의 분할을 Dirichlet tessellation 이라 하고 주변의 꼭지점을 직선으로 연결하여 발생하는 다각형을 Vornoi 다각형이라 한다.

또한 평면상의 두 점 p와 q사이의 거리(Euclidean Distance)를 dist(p,q)라 하고 한 평면상에 n개의 분리된 점들의 집합 P를 $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ 이라고 하면 P의 Vornoi 다각형은 그 평면을 n개의 격자로 나누는 것으로 설명될 수 있다. P에 있는 각각의 점에 대해서 만일, $\text{dist}(q, p_i) < \text{dist}(q, p_j)$ 를 만족하면 q는 p_i 격자에 포함된다. 평면상의 점들은 P에 있는 점들 중 가장 가까운 점이 속한 격자에 포함된다. Vornoi 다각형의 각 격자에서 인접한 격자끼리 서로 경계선을 연결하면 Delaunay 삼각형이 된다. 이 때 삼각형의 세 꼭짓점을 통과하는 외접원을 그릴 수 있다.(그림 3)

알고리즘적인 측면에서 보면 Vornoi 다각형과 Delaunay 삼각형은 동치이기 때문에 한쪽을 산정하면 다른 한쪽을 자동으로 추출할 수 있다. Delaunay



(Dirichlet tessellation(음영), Vornoi 다각형(점선), Delaunay 삼각형(실선))

그림 3 각 영역분할법 간의 관계

삼각형의 중요성은 유한요소법에서 삼각형요소를 이용한 자동 요소망의 작성에서 가장 뚜렷하게 나타났다. 오늘날 incremental insertion, divide-and-conquer, plane sweep 등의 많은 방법이 개발되었다. 본 논문에서는 Javier Bernal의 알고리즘을 사용하여 계산을 수행하였다.¹⁵⁾

4.2 적응적 해석과정

많은 연구자들이 여러 가지 무요소법에서 적응적 해석기법을 제안 했지만 대부분은 앞에서 언급한 바와 같이 적분을 위한 적분격자를 이용하여 절점을 배치하는 것이다.^{1), 2), 5), 8)} 이 방법은 세분화에 따른 적절한 적분차수를 유지할 수 있고 적분영역의 형상이 유리한 형상으로 유지되는 장점이 있으나 적분격자구조의 유지관리가 추가적인 작업으로 발생하게 된다. 특히 균열진전과 같은 세분화와 재결합이 반복되는 적응적 해석에 있어서는 이러한 부분이 더욱 커지게 된다. 이는 무요소법의 장점인 격자에 무관하다는 특성이 희석되는 단점이 있다. 따라서 이러한 적분격자의 유지에 대한 노력을 줄이고 보다 "mesh-free"한 무요소법의 특징을 살리려면 자동화된 적분격자의 구성이 필수적이다. Delaunay 삼각형을 무요소법에 적용은 natural element method에서 처음 시도 되었다.¹⁴⁾ 이 방법은 Delaunay 삼각형들의 면적비를 통해 형상함수를 유도하고 수치적분을 수행하였다. 그러나 이를 제외한 다른 무요소법에서는 이를 이용한 적분이나 기타 적응적 해석을 위한 알고리즘의 개발을 이루어지고 있지 않았다.

균열진전 해석과 같이 다단계의 적응적 해석이 필요한 경우에는 해석의 효율성을 높일 수 있는 세분화와 재결합방법의 선택이 요구된다. 여러 가지 세분화 및 복귀시 적분 격자의 모양을 일정하게 유지하는 것이 다. 따라서 적분격자의 정규적인 형상을 유지하는 데 가장 유리한 할 수 있도록 각 적분격자를 이루는 삼각형 변의 중점에 절점을 추가하였다. 이러한 절점의 추가과정은 그림 4에 설명되었다. 이와 같은 절점추가 방법은 적분격자를 동일한 형상을 가진 4개의 적분격자를 생성하게 된다. 그러나 실제로는 Delaunay삼각화방법에 따라 자동적으로 적분격자를 구성하게 되므로 새로이 생성되는 적분격자는 세분화 이전의 적분격

자의 형상과는 관계없이 절점의 배치에 따라 결정되게 된다. 복귀과정에서는 한 절점이 속하는 적분격자에서 모두 주어진 오차지수보다 작은 값을 보일 때 그 절점을 삭제하게 된다. 이러한 과정은 그림 4(b)에 나타나 있다. 이 그림에서는 한 개의 절점이 속하는 적분격자가 6개로 표시되어 있으나 실제 문제에서는 한 절점이 속하는 적분격자는 각 단계별 절점의 배치에 따라 변하게 된다.

이 세분화 및 복귀 방법에서는 적분격자의 구성이 절점의 위치에 의해서만 결정되기 때문에 균열의 개구부와 같은 오목한 영역을 가진 삼각형의 적분격자가 영역외의부분에 대하여 모델링될 수 있다. 이러한 경우 적절하지 못한 적분격자가 생성될 수 있기 때문에 전체 해석모델을 몇 개의 불록한 절점군으로 나누어 각각을 Delaunay 삼각화를 수행한다.

Delaunay삼각화를 이용한 적응적 해석의 개략적인 과정은 그림 5에 나타나 있다. 전반적인 해석의 과정은 격자분할을 이용한 적응적해석과 큰 차이가 없지만 세분화과정에 있어서는 상당히 간략화된 것을 볼 수 있다. 이는 Delaunay 삼각화를 이용한 격자망의 재구성으로 인하여 세분화 및 재결합시 추가적인 정보 없이 절점의 위치만을 필요로 하기 때문이다.

본 연구에서 주 해석대상인 균열선단의 이론적인 응력값은 무한대이기 때문에 균열선단의 이론적인 오차값 또한 무한대이다. 이것은 보다 정밀한 해석이 수행될수록 균열선단에서의 오차는 증가한다는 것을 의미

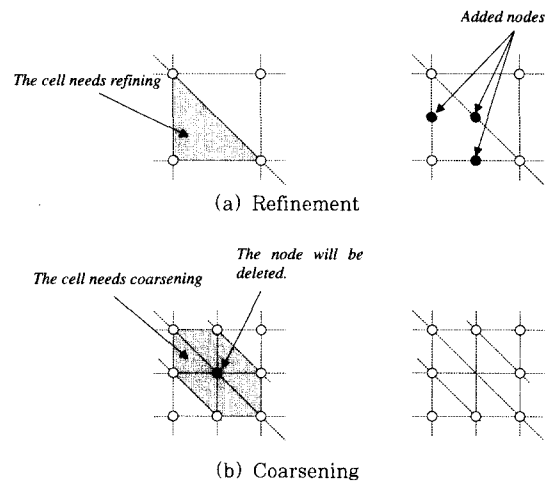


그림 4 적응적 세분화와 재결합방법

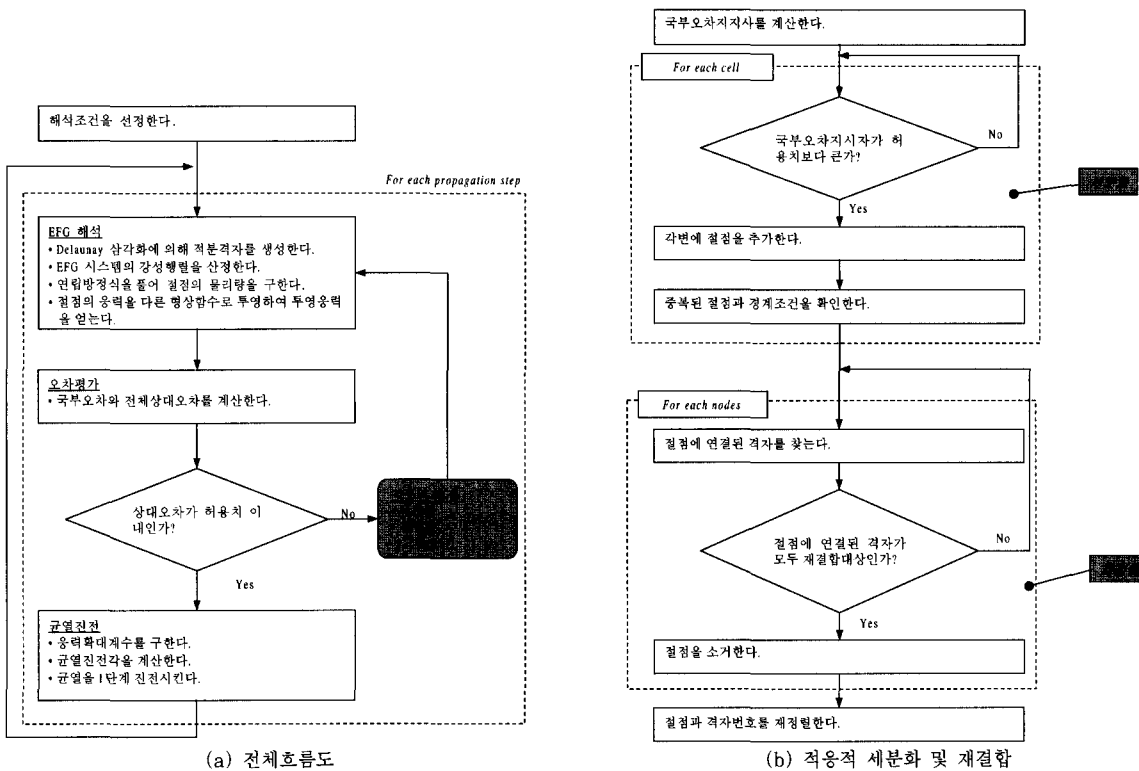


그림 5 삼각화를 이용한 적응적 해석 흐름도

한다. 그러므로 균열선단의 응력집중영역은 해석의 전체적인 상대오차와는 관계없이 항상 세분화가 필요하게 된다. 균열이 진전하지 않는 적응적 정적균열문제에서는 전체 문제의 해가 몇 단계 정도의 반복해석을 통해 수렴하게 되므로 이러한 균열선단의 과도한 세분화는 크게 문제되지 않는다. 그러나 적응적 균열진전문제에서는 각 진전단계마다 이러한 반복계산이 요구되므로 항상 세분화가 필요한 균열선단의 경우는 상대오차의 수준에 비해 지나치게 많은 세분화가 발생하게 된다. 이는 해석의 효율성을 떨어뜨리고 수치적인 오차의 발생가능성을 높이는 결과를 가져온다. 따라서 본 연구에서는 적응적 해석시 세분화 수준의 한계를 설명하여 균열선단의 과세분화를 방지하였다.

4.3 오차기준

일반적으로 적응적 해석과정에서는 국부적인 세분화를 위한 지표와 전체적인 해석의 정확도를 나타내는 지표를 필요로 한다. 따라서 국부적인 세분화 지표를 산정

하기 위해서는 보간오차를 임의의 국부적인 지역에서 평가해야 하고 동시에 해석이 원하는 정도의 정확도에 도달했는지를 검사하기 위해 위해 전체 영역에 걸쳐 보간오차를 평가해야 한다. 따라서 식(3)에서 산정된 절점에서의 오차는 적절한 형태의 오차 놈(norm)으로 다시 계산해야 한다. 본 연구에서는 국부적인 오차를 평가하기 위해서는 각 적분 격자 단위로 오차의 에너지 놈(energy norm)을 계산하고 전체영역의 오차 평가를 위해서는 각 적분 격자에서 얻어진 오차의 에너지를 합산하였다. 이를 구하기 위하여 적분점 $x = x_g$ 에서 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$\|e(x_g)\| = \left\{ \frac{1}{2} \sigma^e T(x_g) D^{-1} \sigma^e(x_g) \right\}^{1/2} \quad (14)$$

여기서 아래첨자 g 는 가우스적분점을 나타낸다. 전체영역 Ω 에서의 보간오차의 에너지 놈과 각 적분격자 Ω_i 에서의 국부적인 보간오차의 에너지 놈은 각각 다

음과 같이 나타낸다.¹⁶⁾

$$\|E\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{eT}(x) D^{-1} \sigma^e(x) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (15)$$

$$\|E_i\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{eT}(x) D^{-1} \sigma^e(x) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (16)$$

위의 식들은 전체 및 국부 오차 평가자로 알려져 있다. 임의의 적분격자 i 에서의 세분화 지표가 되는 국부 오차 지수(local error indicator)는 다음과 같이 계산한다.

$$\eta_i = \left\{ \frac{\|E_i\|^2}{\|U\|^2 / N_{cell}} \right\}^{1/2} \quad (17)$$

전체 영역에서의 해의 정확도는 다음과 같은 상대오차의 향으로 평가될 수 있다. 상대오차(relative error)의 에너지 norm은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} \quad (18)$$

여기서

$$\|U\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T(x) D^{-1} \sigma(x) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (19)$$

만일 식(18)이 미리 정의된 값보다 작아지면 적응적 해석과정은 종료된다

5. 수치예제

제안된 적응적 해석법의 타당성을 검토하기 위해 2차원 예제에 대한 해석을 수행하였다. 예제의 해석에 있어서 지수형의 가중함수와 선형기저가 사용되었다.^{8),17)} 경계조건은 수정변분원리에 의해 부여되었으며¹⁷⁾ 균열 선단에 있어서의 영향반경은 회절법¹⁸⁾에 의해 수정된 값을 사용하였다. 강성행렬의 구성을 위한 적분은 7점

의 삼각형 가우스적분을 사용하였으며 균열 주변의 적분격자에 대해서는 있어서는 13점을 사용해 해의 정확성을 향상되도록 하였다.

5.1 Edge Crack

이 예제는 측면에 미리 $a=W/2=3.5$ 길이의 균열이 생성되어 있고 하단은 바닥에 고정되어있는 평판의 해석이다. 평판의 재료상수로 탄성계수 $E=30 \times 10^6$ psi와 포아슨 비 $\nu=0.25$ 를 사용하였고 평면응력상태를 가정하였다. 이 문제는 두 개의 하중의 작용방향에 대해 해석을 수행하였으며 이를 각각 모델 A, 모델 B로 구별하였다.(그림 6)

이 문제의 해석시 영향반경계수의 값은 EFG계산시와 응력계산시 각각 $D_m^u = 2.5$, $D_m^p = 1.8$ 을 사용하였다. 영향반경계수는 형상함수 산정시 영향반경과 최소절점거리간의 관계를 나타내며 다음과 같이 표시된다.

$$a = D_m h \quad (20)$$

여기서 a 는 형상함수의 산정시 사용되는 영향반경이며 h 는 절점간 최소거리이다. 적응적 해석의 마지막 단계에서의 절점배치와 적분격자는 그림 7에 나타난 바와 같다.

위의 모델 A에 대한 균열 진전해석을 적응적세분화를 이용해 해석하였다. 이 예제는 모두 15단계의 균열 진전해석이 이루어 졌고 각 단계에서의 균열 진전량은

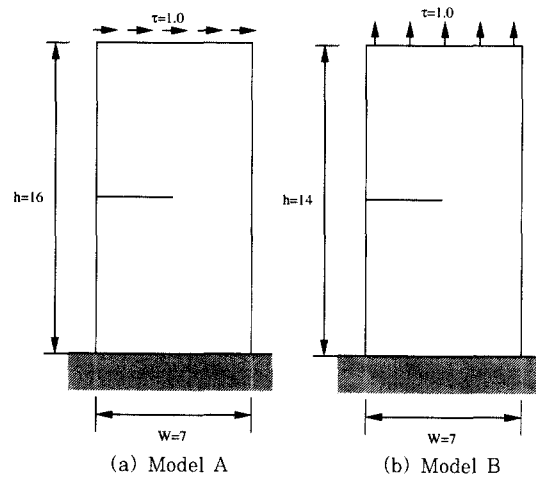
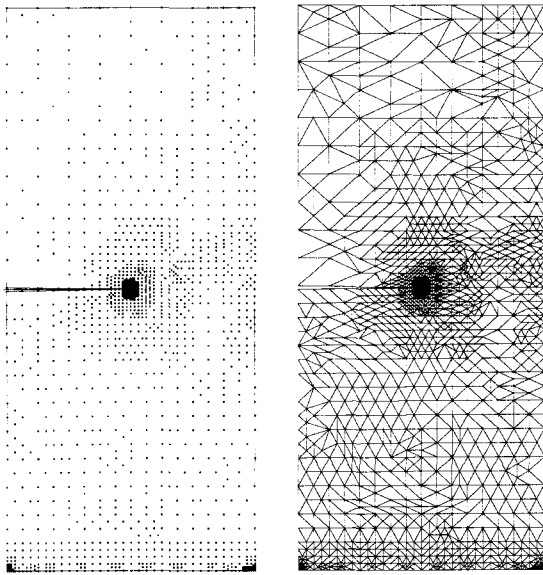


그림 6 Edge crack 문제개요



(a) 절점배치 (b) 적분격자
그림 7 6번째 적응적 해석단계의 해석모델

0.2inch로 하였다. 또한 각 단계의 목표 상대오차는 0.15로 하였다. 이 문제에 사용된 영향반경 계수는 EFG 해석시와 응력투영시 각각 $D_m^a = 3.0$, $D_m^p = 2.5$ 가 사용

되었다. 또한 해석 수행시의 다른 제한 조건으로는 최대 세분화수준 7, 각 진전단계에서의 최대 반복계산수 15 등을 사용하였다.

각각의 적응적세분화 방법으로 균열진전에 따른 적응적 세분화가 이루어지는 형상은 그림 8에서 보는 바와 같다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 두 적응적 세분화 방법 모두 균열선단 주변의 응력집중에 대하여 적응적으로 추가된 절점의 집단이 균열선단을 따라 이동하는 것이 잘 나타나 있다. 즉 이전단계의 해석에서 세분화된 절점의 배치가 응력집중점의 변화에 따라 다시 원상태로 돌아오는 과정이 잘 작동하고 있음을 알 수 있다. 이러한 세분화의 회복은 전체적인 해석의 효율성을 증대시키고 오차분포에 보다 적합한 최적절점배치를 작성할 수 있게 한다 모델 B는 상대오차에 따른 모드 1 응력확대계수의 변화를 평가하기 위한 것이다. 이러한 균열문제에 대해서 모드 1 응력확대계수의 정확해는 다음과 같은 식을 따른다고 알려져 있다.¹⁹⁾

$$k_{Ie} = \frac{\sigma \sqrt{w} \sqrt{2 \tan \beta} \left\{ (0.752 + 0.02\alpha + 0.73(1 - \sin \beta)^3) \right\}}{\cos \beta} \quad (21)$$

여기서 $\alpha = a/w$, $\beta = \alpha\pi/2$ 이고 σ 와 a 는 각각 작

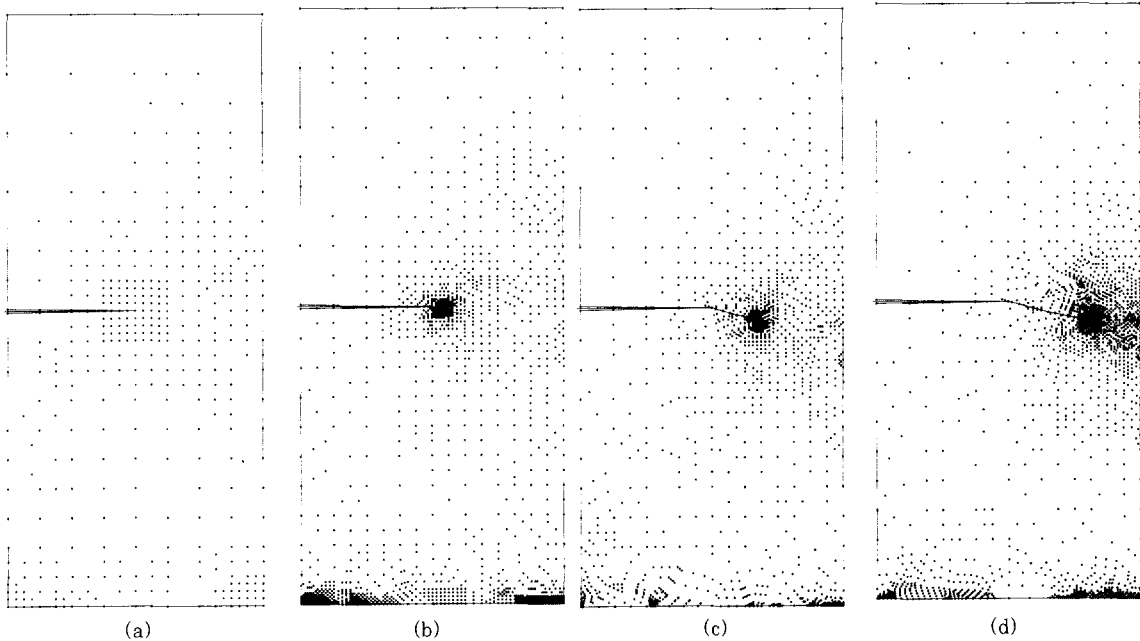


그림 8 균열의 진전에 따른 절점배치(Model A, Step 1, 5, 10, 15)

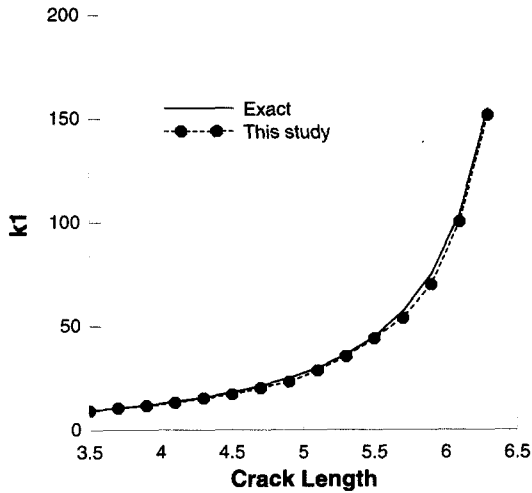


그림 9 균열의 진전에 따른 응력확대계수의 비교(Model B)

용응력과 균열의 길이이다.

이 해석모델에 대한 해석은 15개의 균열진전단계를 이용해 해석하였으며 각 해석단계에서 0.2 inch의 균열진전을 가정하였다. 이 문제와 같은 하중상태에서는 균열에 대해 선대칭인 거동을 보이기 때문에 균열은 수평으로 진전된다. 해석에 사용된 영향반경계수는 EFG 해석의 경우에는 $D_m^a = 3.2$ 을 사용하였고 응력투영시에는 $D_m^p = 2.5$ 의 값을 사용하였다. 각 해석단계에 있어서 최대 세분화레벨은 7이고 최대 허용 반복계산회수는 15이다.

이 해석모델에 대한 두 적응적해석법의 모드 1 응력 확대계수는 상대오차에 따라 그림 9에 나타내었다. 이 그림에서 보여주는 바와 같이 본 연구에서 제안된 방법으로 계산된 모드 1 응력확대계수가 정확한 값을 보이는 것을 알 수 있다.

5.2 Double Cantilever

이 문제에서는 이중외팔보의 시편에서 진전하는 균열에 대한 적응적해석을 수행하였다.

해석모델의 개요를 그림 10에 나타내었다. 이 그림에서 나타낸 바와 같이 이 문제는 자유단에서 직선으로 생성된 균열의 선단에 0.48° 의 섭동각을 가진 길이 0.472inch 추가 균열이 존재한다.

해석조건은 평면응력상태를 가정하였으며 탄성계수 및 포아슨 비는 각각 $E=3 \times 10^7$ psi 와 $\nu=0.3$ 으로 가정하였다. 해석과 응력투영에 사용된 영향반경계수는 각각 $D_m^a = 3.5$ 과 $D_m^p = 3.0$ 이다.

총균열진전단계는 20step이며 각 해석단계에서의 균열진전량은 0.15inch로 하였다. 각 해석단계에서 최대 세분화레벨은 8이므로 가장 가까운 절점간 간격은 초기 모델의 절점간격의 $1/2^8 = 1/128$ 로 제한된다.

그림 11는 응력의 특이점인 균열선단의 이동에 따른

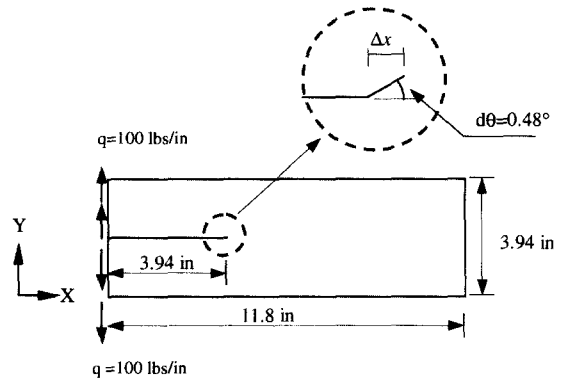


그림 10 Double cantilever 문제의 개요

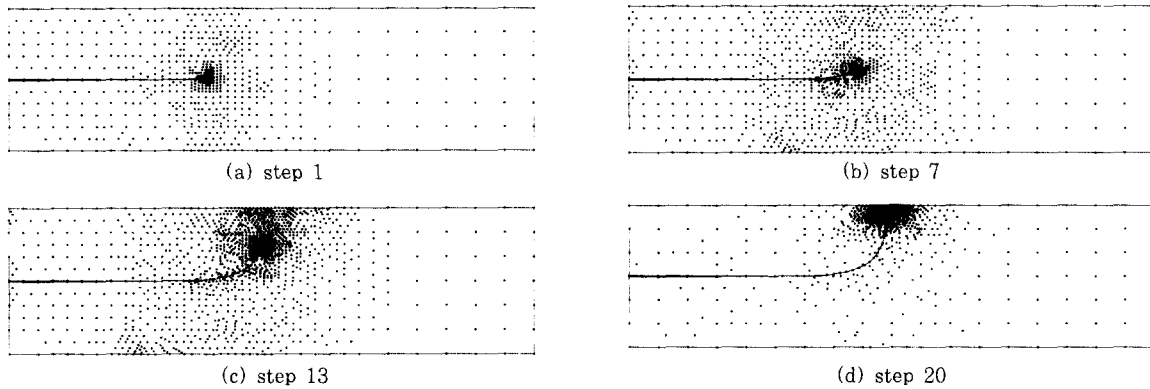


그림 11 균열의 진전에 따른 절점배치

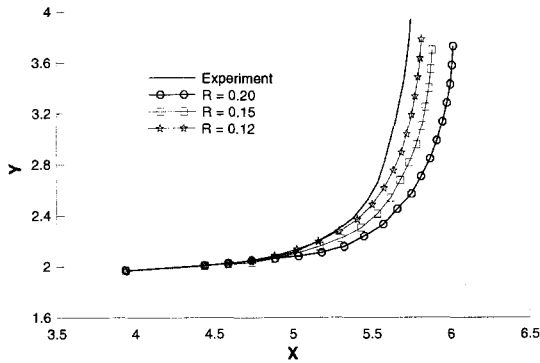


그림 12 상대오차에 따른 균열경로의 비교

적응적 해석모델을 보인 것이다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 균열의 진전에 따라 세분화 되었던 자유단 부분의 절점배치는 마지막 단계에서 초기상태로 복귀하고 있다. 이는 본 연구에서 제안된 적응적 해석기법이 타당한 거동을 보여주고 있음을 보여준다.

그림 12은 목표상대오차에 따른 균열의 진전경로를 실제 실험²⁰⁾에서 얻어진 균열경로와 비교한 것이다. 앞의 예제에서의 응력 확대계수와는 다르게 균열의 진전경로는 15%의 미만의 목표상대오차에 대해서도 실험결과와 어느 정도의 오차를 가지고 있다. 이는 균열의 경로가 응력 확대계수에 의해서 구해지는 2차적인 물리량이고 실험시 존재하는 불확실성과 가정된 해석 조건의 오차에서 기인하는 것으로 판단된다.

6. 결 론

본 논문에서는 무요소법의 해석을 위한 새로운 적응적 세분화 및 재결합 방법을 제시하였다.

이 방법에서는 적응적 해석을 위한 절점의 추가와 소거가 Delaunay삼각화에 의해 자동적으로 구성되는 적분격자를 기준으로 이루어 진다.

이 방법으로 작성된 해석모델은 특히 균열을 포함한 적응적 해석에 높은 효율성과 정확성을 보여주었다. 균열의 진전해석시 각 진전단계마다, 요구된 정확도를 유지하기 위하여 평가된 오차분포에 따라 최적의 해석모델을 작성하다. 이 방법은 적분격자의 구성을 자동화하므로 보다 격자에 독립적인 무요소법을 구현할 수 있었다. 또한 임의의 지점에 위치한 절점에 대해서도 자동적인 적분격자의 구성이 가능하므로 bubble mesh 같은 절점의 위치가 자유로운 적응적 해법에도 원활히

적용될 수 있다.

제안된 방법을 균열의 진전해석을 포함하는 2차원 예제에 대해서 적용해 본 결과 수렴성이나 응력확대 계수, 균열의 진전 경로 등의 다양한 응답에서 제안된 적응적 해석법의 타당성 및 효율성을 확인할 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2000-1-31100-003-2)지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

1. Hausser-Combe U, and Korn, C, "An adaptive approach with the EFG method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 162, 1998, pp.203~222
2. Lui, W. K., Jun, S. and Sihling, D. T., "Multiresolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics", *International Journal of Numerical Method in Fluids*, Vol. 24, 1997, pp.1391~1415
3. De, S. and Bathe, K. J., "The method of finite spheres", *Computational Mechanics* Vol. 25, 2000, pp.329~345
4. Lee, G. H., Choi, C. K. and Chung, H. J., "An adaptive analysis in the element-free Galerkin method using bubble meshing technique", *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona: 11-14 September 2000
5. Duarte, C. A. and Oden, J. T., "An hp adaptive method using clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp.237~262
6. Liu, W. K., Hao, W., Chen, Y., Jun, S. and Gosz, J., "Multiresolution reproducing kernel particle methods", *Computational Mechanics*, Vol. 20, 1996, pp.295~309
7. Chung, H. J. and Belytschko T, "An error

- estimate in the EFG method", *Computational Mechanics*, Vol. 21, 1998, pp.91~110
8. Lee, G. H., Choi, C. K. and Chung, H. J., "Adaptive Crack Propagation Analysis with the Element-free Galerkin Method", *submitted to International Journal for Numerical Method in Engineering*
 9. 이계희, 최창근, 정홍진, "EFG방법을 이용한 적응적 균열진전해석", 한국전산구조공학회논문집, 제13권, 4호, 2000, pp.485~500
 10. Erdogan, F. and Sih, G. C., "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear", *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, 1963, pp.519~527
 11. Anderson, T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications(2nd ed.)*, CRC press, 1995
 12. Shih, C. H. and Asaro, R. J., "Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interface: Part I Small scale yielding", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, 1988, pp.299~316
 13. Yau, J. F., Wang, S. S. and Corten, H. T., "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, 1980, pp.335~341
 14. Sukumar, N., *The natural element method in solid mechanics*, Thesis of Ph. Doctor: Northwestern University, 1998
 15. Bernal, J., http://math.nist.gov/~JBernal/JBernal_Sft.html. 1997
 16. Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 24, 1987, pp.337~357
 17. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., "Meshless methods : An overview and recent developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp.3~47
 18. Organ, D., Fleming, M., Terry, T. and Belytschko, T., "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency", *Computational Mechanics*, 1996, Vol. 18(3), pp.225~235
 19. Tabbara, M. R. and Stone, C. M., A computational method for quasi-static fracture, *Computational Mechanics* 1998, Vol. 22, pp.203~210
 20. Fleming, M. A., *The element-free Galerkin method for fatigue and quasi-static fracture*, Thesis of Ph., Doctor : Northwestern University, 1997