

〈논 문〉

구름요소의 Waviness를 고려한 볼베어링 해석이론

Analytical Theory of Ball Bearing Considering Waviness of Rolling Elements

정 성 원* · 장 건 회**

Seong-Weon Jeong and Gunhee Jang

(2001년 8월 9일 접수 : 2001년 9월 15일 심사완료)

Key Words : Ball Bearing(볼 베어링), Bearing Vibration(베어링 진동), Waviness, Hertzian Contact Theory(Hertz의 접촉이론), Race Control Theory(궤도론 제어이론)

ABSTRACT

This research presents an analytical theory to calculate the characteristics of the ball bearing with waviness in its rolling elements considering the centrifugal force and gyroscopic moment of ball. The effects of centrifugal force and gyroscopic moment are introduced to the kinematic constraints and force equilibrium equations, and the waviness of rolling elements is modeled by sinusoidal function to calculate the contact force at each ball. The numerical solutions of governing equation of bearing due to waviness are calculated by using the Newton-Raphson method. The accuracy of the research is validated by comparing the contact force, contact angle in case of considering the centrifugal force and gyroscopic moment of ball and the contact force and vibration frequencies in case of considering waviness with the prior researches, respectively. It investigates the stiffness, contact force, displacement and vibration frequencies of the ball bearing considering not only the centrifugal force and gyroscopic moment of ball but also the waviness of the rolling elements.

1. 서 론

볼베어링은 내륜, 외륜, 볼, 케이지(cage) 및 실(seal) 등으로 구성되어 있고, 각 구름요소들이 서로 접촉하여 강성을 발생하고 회전체를 지지하는 구조를 이룬다. 그러나 실제 베어링의 구름요소는 기하학적 불완전성(geometrical imperfection)인 waviness를 포함하고 있기 때문에, 베어링의 회전에 따라 접촉력, 접촉각 및 강성이 변화하게 된다. 따라서 볼베어링은 회전체의 지지요소로서 뿐만 아니라, 가진원으로서 작

용하게 된다. 이러한 가진원의 영향은 최근 복잡하고 정교한 회전기기의 성능을 저해하는 주요한 원인이 되고 있는데, 절삭기기의 가공정밀도를 저해하는 베어링 진동과 하드디스크 드라이브(HDD)와 같은 정보 저장기기의 저장밀도를 저해하는 비반복적 진동 등이 대표적인 예이다.

Jones⁽⁸⁾는 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향에 따른 궤도론 제어이론과 베어링 강성을 구하기 위한 일반적인 방법을 제시하였다. 그리고 Harris⁽⁹⁾와 Hamrock과 Dowson⁽¹⁰⁾은 다양한 베어링 설계변수에 의한 영향을 계산하였다. 그러나 이와 같은 연구는 베어링 구름요소에 기하학적 불완전성이 없는 경우에 대한 연구이며 구름요소에 waviness가 존재하는 경우의 볼베어링 특성을 해석하지 않았다.

한편, Wardle^(3,1)은 이론적 모델을 통하여 waviness

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

** 정회원, 한양대학교 정밀기계공학과

E-Mail : ghjang@hanyang.ac.kr

Tel : (02) 2290-0431, Fax : (02) 2292-3406

의 진폭과 그에 따른 가진력과 관계를 구하고, 이를 실험으로 증명하였으며, 접촉력과 탄성변형 간의 비선형 특성에 의한 진동성분을 예측하였다. Yhland⁽⁵⁾는 waviness가 존재하는 볼베어링의 강성행렬을 선형이론으로 계산하였으며, Akturk등^(6,7)은 강제축을 지지하는 볼베어링이 waviness를 가지고 있는 경우에 대하여, 3자유도 모델을 제안하였다. 그리고 Jang과 Jeong^(11,12)은 waviness를 가지는 볼베어링으로 지지된 5자유도 회전계에 대한 가진모델을 제안하고, 접촉력의 비선형성에 의해 발생하는 주파수 성분을 규명하였다. 그러나, 이러한 연구는 볼의 회전에 의해 발생하는 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향을 고려하지 않은 경우에 대한 결과이다. 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트는 구름요소간의 접촉력, 베어링 강성 그리고 waviness에 의한 응답특성을 변화시키기 때문에, 기존의 연구에 의한 베어링 특성과는 큰 차이를 보일 수 있다.

본 연구에서는 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트와 구름요소의 waviness에 의한 영향을 고려하여 볼베어링의 특성을 해석할 수 있는 이론적 모델을 제시하였다. 볼베어링의 기하학적 조건과 힘 평형방정식에 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향을 적용하고, 구름요소의 waviness는 정현파 함수로 모델링하여 구름요소간 발생하는 접촉력을 계산하였다.

본 연구의 이론적 타당성을 검증하기 위하여, waviness가 없는 경우 회전속도의 변화에 따라 내외륜의 접촉력, 접촉각 및 진동주파수를 계산하여 기존의 연구결과와 비교하였고, 볼베어링의 waviness에 의한 강성, 접촉력 변위 및 진동주파수의 특성을 고찰하였다. 그리고 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향과 구름요소의 waviness에 의한 영향을 동시에 고려하여, 볼베어링의 강성, 접촉력, 변위 및 진동주파수의 특성을 고찰하였다.

2. 수치해석 모델

2.1 Waviness에 의한 베어링의 내부변형

Fig. 1은 각접촉 볼베어링의 구름요소를 나타낸 것이다. 볼베어링은 볼, 내륜 그리고 외륜으로 구성되어, 예압에 의해 궤도륜과 볼은 접촉각을 이루며 각접촉 되어 강성을 발생한다. 볼베어링의 구름요소 표현에 존재하는 기하학적 불완전성은 주기적인 형상

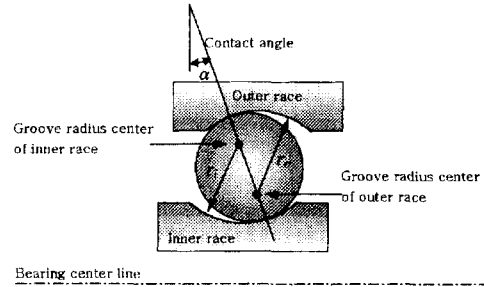


Fig. 1 Rolling elements of ball bearing

의 waviness와 국소결함으로 나뉘어 진다. 따라서, 내외륜의 waviness는 정현파 함수로, 국소결함은 이의 조합으로 표현할 수 있다.^(5,11,12) 그러나 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트에 의한 효과를 고려하면, 볼의 내외륜에서 발생하는 접촉각이 달라지므로, 기존연구에서 사용한 모델을 사용할 수 없기 때문에 다음과 같이 내륜과 외륜에 작용하는 waviness를 나누어 고려하여야 한다.

$$w_{ij} = \sum_{i=1}^n C_{ji} [\cos(\omega_b t + \gamma_{ji})] \quad (1)$$

$$w_{oj} = \sum_{i=1}^n C_{ji} [\cos\{\omega_b(t + \frac{\pi}{\omega_b}) + \gamma_{ji}\}] \quad (2)$$

여기서, w_{ij} 와 w_{oj} 는 각각 내외륜에 작용하는 볼의 waviness, γ , ω_b , C_{ji} , 는 볼 waviness의 초기위상각, 볼의 자전속도, 그리고 i 차 볼 waviness의 진폭을 각각 의미한다.

Fig. 2에서 j 번째 볼이 위치한 궤도륜의 곡률반경 중심의 위치벡터는 베어링 회전축의 임의위치를 기준으로 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{R}_{ij}(t) = R_i \cos \psi_j \vec{i} + R_i \sin \psi_j \vec{j} + a_i \vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{R}_{oj}(t) = R_o \cos \psi_j \vec{i} + R_o \sin \psi_j \vec{j} + a_o \vec{k} \quad (4)$$

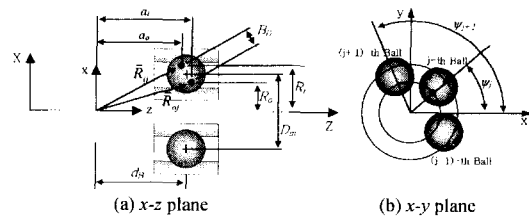


Fig. 2 Position vector of groove radius center

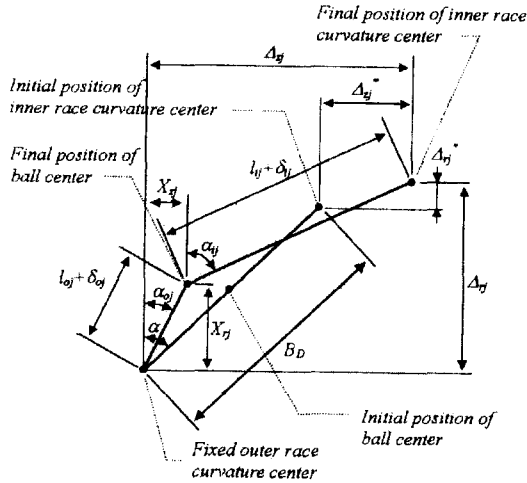


Fig. 3 Position of ball center and raceway curvature centers⁽⁹⁾

여기서, ψ_j 는 j 번째 볼의 $x-y$ 평면상 편향각으로서 볼의 개수를 Z 라고 두면, 다음과 같다.

$$\psi_j(t) = \omega_i t + \frac{2\pi}{Z}(j-1) \quad (5)$$

Fig. 3은 볼의 원심력, 자이로스코픽 모멘트 그리고 베어링 중심의 변위에 의한 궤도를 곡률반경 중심간의 거리와 볼 중심위치의와의 관계를 나타낸 것이다. 내륜이 회전하는 베어링의 경우, 오일러 각(Euler angle)을 사용하여 식 (3),(4)를 베어링 중심의 변위 $\{u\} = \{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}^T$ 에 대하여 좌표변환하면, 변형 후의 위치벡터가 구해진다. 이 벡터와 외륜 위치벡터와의 차를 구하면 두 곡률반경간 거리의 반경방향과 축방향성분이 구해지는데, 각 위치벡터의 반경방향 및 축방향 성분에 내외륜의 waviness를 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.^(11,12)

$$\Delta_{ij} = (R_i - R_o) + a_i(\theta_x \cos \psi_j - \theta_y \sin \psi_j) + x \cos \psi_j + y \sin \psi_j + (p_{ij} - p_{oj}) + q_{ij}(\theta_x \cos \psi_j - \theta_y \sin \psi_j) \quad (6)$$

$$\Delta_{oj} = (a_i - a_o) + R_i(\theta_x \sin \psi_j - \theta_y \cos \psi_j) + z + (q_{ij} - q_{oj}) + p_{ij}(\theta_x \sin \psi_j - \theta_y \cos \psi_j) \quad (7)$$

여기서, Δ_{ij} 와 Δ_{oj} 는 베어링 중심의 변형과 waviness에 의한 궤도를 중심간 거리의 반경방향 및 축방향 성분이다. 그리고 p_{ij} 와 p_{oj} 는 내륜과 외륜의 반경방향 waviness이며, q_{ij} 와 q_{oj} 는 내륜과 외륜의 축방향

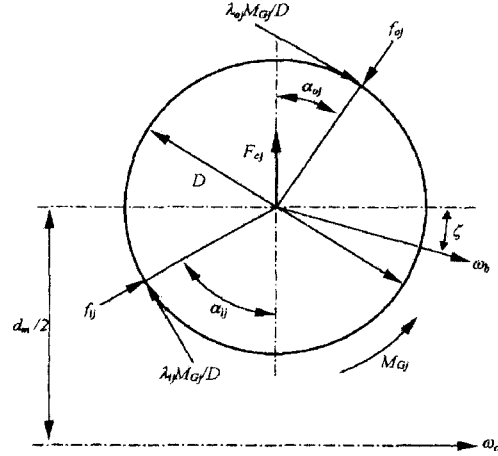


Fig. 4 Ball loading at arbitrary azimuth angle. $\psi_j^{(10)}$

waviness이다.^(11,12)

Fig. 3의 l_{ij} , l_{oj} 는 볼의 중심에서 내외륜의 곡률반경 중심까지의 거리로서, $l_{ij} = r_i - D/2$, $l_{oj} = r_o - D/2$ 로 표현된다. 여기서, 식 (1),(2)의 waviness, w_{ij} , w_{oj} 와 다른 볼에 비해 특정 볼의 직경이 다른 경우의 효과, h_j 를 적용하면, l_{ij} , l_{oj} 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$l_{ij} = r_i - (D + h_j)/2 - w_{ij} \quad (8)$$

$$l_{oj} = r_o - (D + h_j)/2 - w_{oj} \quad (9)$$

2.2 접촉각 및 접촉력

Hertz의 접촉이론에 따르면, 볼과 내륜 및 외륜과의 접촉력은 다음 식으로 표현된다.

$$f_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{1.5}, \quad f_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{1.5} \quad (10)$$

여기서, X_{ij} , Z_{oj} 는 내외륜의 탄성변형. 그리고 K_{ij} , K_{oj} 는 내외륜의 접촉력 비례상수이다.

Fig. 4는 회전에 의한 볼의 원심력, 자이로스코픽 모멘트 그리고 발생하는 접촉력과의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 3과 4를 사용하면, 볼 중심의 위치와 탄성변형에 대한 기하학적 조건과 힘 평형조건이 구해지며 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (\Delta_{ij} - X_{ij})^2 + (\Delta_{oj} - X_{oj})^2 - (l_{ij} + \delta_{ij})^2 &= 0 \\ X_{ij}^2 + X_{oj}^2 - (l_{oj} + \delta_{oj})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$f_{ij} \sin \alpha_{ij} - f_{oj} \sin \alpha_{oj} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{oj} M_{Gj}}{D} \cos \alpha_{oj} = 0$$

$$f_{ij} \cos \alpha_{ij} - f_{oj} \cos \alpha_{oj} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{oj} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{oj} + F_{cj} = 0$$

여기서 X_{zj} 와 X_{rj} 는 볼 중심위치의 축방향 및 반경 방향성분, α_{ij} 와 α_{oj} 는 내외륜의 접촉각, D 는 볼의 직경이다. 그리고 M_{Gj} 와 F_{cj} 는 각각 회전에 의해 발생하는 자이로스코픽 모멘트와 원심력이며, λ_{ij} 와 λ_{oj} 는 케도륜 제어이론에 의한 상수이다.⁽⁹⁾

식 (6~10)을 식 (11)에 대입하면, 케도륜 및 볼의 waviness를 고려하여 δ_{ij} , δ_{oj} , X_{zj} , X_{rj} 에 대한 비선형 연립방정식이 되며 Newton-Raphson 반복법에 의해 해석할 수 있다. 여기서 내외륜 접촉각의 정현 및 여현값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{oj} &= \frac{X_{rj}}{l_{oj} + \delta_{oj}}, & \sin \alpha_{oj} &= \frac{X_{zj}}{l_{oj} + \delta_{oj}} \\ \cos \alpha_{ij} &= \frac{\Delta_j - X_{rj}}{l_{ij} + \delta_{ij}}, & \sin \alpha_{ij} &= \frac{\Delta_j - X_{zj}}{l_{ij} + \delta_{ij}} \end{aligned} \quad (12)$$

Jones의 케도륜 이론에 의하면 외륜제어인 경우, Fig. 4의 ζ 와 식 (11)의 λ_{ij} , λ_{oj} 는 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽⁸⁻¹⁰⁾

$$\zeta = \tan^{-1} \left(\frac{d_m \sin \alpha_{oj}}{d_m \cos \alpha_{oj} + D} \right), \quad \lambda_{ij} = 0, \quad \lambda_{oj} = 2 \quad (13)$$

이 식을 사용하면, 볼의 원심력, F_{cj} 와 자이로스코픽 모멘트, M_{Gj} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$F_{cj} = 0.5m_b d_m \omega_c^2 \quad (14)$$

$$M_{Gj} = I_p \omega_b \omega_c \sin \zeta \quad (15)$$

여기서, m_b 는 볼의 질량, I_p 는 볼의 질량관성모멘트이다. 그리고 d_m , ω_c 그리고 ω_b 는 M_{Gj} , F_{cj} 와 예압에 의한 피치지름, 케이지 회전속도 그리고 볼의 자전속도이며 내륜이 회전하는 경우에 대하여 다음과 같이 계산된다.⁽¹⁰⁾

$$d_m = d_m' + 2X_{rj} - 2l_{oj} \cos \alpha \quad (16)$$

$$\omega_c = \frac{\omega_i + \omega_o \left(\frac{d_m + D \cos \alpha_{oj}}{d_m - D \cos \alpha_{ij}} \right) \frac{\cos(\alpha_{ij} - \zeta)}{\cos(\alpha_{oj} - \zeta)}}{1 + \left(\frac{d_m + D \cos \alpha_{oj}}{d_m - D \cos \alpha_{ij}} \right) \frac{\cos(\alpha_{ij} - \zeta)}{\cos(\alpha_{oj} - \zeta)}}$$

$$\omega_b = \frac{\omega_o - \omega_i}{D \left[\frac{\cos(\alpha_{ij} - \zeta)}{d_m - D \cos \alpha_{ij}} + \frac{\cos(\alpha_{oj} - \zeta)}{d_m + D \cos \alpha_{oj}} \right]}$$

여기서, d_m' 은 예압이 가해지지 않고 회전하지 않는 경우의 피치지름이다.

2.3 볼베어링의 강성행렬

내륜이 회전하는 경우, 내륜에 미치는 힘과 모멘트는 다음의 식으로 계산할 수 있다.

$$F_x = \sum_{j=1}^z \left(f_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{ij} \right) \cos \psi_j$$

$$F_y = \sum_{j=1}^z \left(f_{ij} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \sin \alpha_{ij} \right) \sin \psi_j$$

$$F_z = \sum_{j=1}^z \left(f_{ij} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} \cos \alpha_{ij} \right)$$

$$M_x = \sum_{j=1}^z \left(f_{ij} \tau_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} e_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} r_i \right) \sin \psi_j$$

$$M_y = - \sum_{j=1}^z \left(f_{ij} \tau_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} e_{ij} + \frac{\lambda_{ij} M_{Gj}}{D} r_i \right) \cos \psi_j$$

여기서, τ_{ij} 와 e_{ij} 는 $R_i \sin \alpha_{ij} - a_i \cos \alpha_{ij}$ 및 $R_i \cos \alpha_{ij} + a_i \sin \alpha_{ij}$ 로 각각 표현되며, r_i 는 내륜의 곡률반경이다.

볼베어링 회전중심의 변위는 식 (19)에서 유도한 힘과 주어진 예압이 평형을 이루는 지점이 된다. 따라서, 다음과 같은 평형방정식이 구해진다.

$$- \{P\} + \{F\} = \{0\} \quad (20)$$

여기서, $\{P\} = \{P_x, P_y, P_z, P_{\theta_x}, P_{\theta_y}\}^T$ 는 각 방향으로 작용하는 예압이며, $\{F\} = \{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y\}^T$ 는 식 (19)에서 구한 힘과 모멘트이다.

식 (20)은 베어링 중심의 변위, $\{u\} = \{x, y, z, \theta_x, \theta_y\}^T$ 에 대한 비선형 대수방정식이다. 따라서, Newton-Raphson방법을 사용하면 예압과 waviness에 의한 강

성과 변위를 구할 수 있는데, Newton-Raphson방법에 적용하기 위한 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$-\{P\} + \{F\} = \{\epsilon\} \quad (21)$$

$$\{u\}^{new} = \{u\}^{old} - \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]^{-1} \{\epsilon\} \quad (22)$$

여기서, $\{\epsilon\}$ 은 접촉력과 예압간의 수렴오차로서 매 반복과정중에 계산되고, 설정한 허용오차의 크기보다 작아질 때까지 식 (21)과 (22)는 반복 계산된다.

이 수식화 과정에서 계산되는 $[\partial F/\partial u]$ 의 최종 수렴결과가 강성행렬이 되며 다음과 같이 쓸 수 있다. 이 계산과정 중에 식 (11)을 해석하는 과정이 반복 수행된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial u} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial u} \right)_1 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial u} \right)_2 \\ &= \sum_{j=1}^z \left[1.5K_{ij} \delta_{ij}^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial u} \cos \alpha_{ij} + K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial u} + \frac{\lambda_{ij} M_{cij}}{D} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial u} \right] \cos \psi_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^z \left[\frac{\partial K_{ij}}{\partial u} \delta_{ij}^{1.5} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij}}{D} \frac{\partial M_{cij}}{\partial u} \sin \alpha_{ij} \right] \cos \psi_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial u} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial u} \right)_1 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial u} \right)_2 \\ &= \sum_{j=1}^z \left[1.5K_{ij} \delta_{ij}^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial u} \cos \alpha_{ij} + K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial u} + \frac{\lambda_{ij} M_{cij}}{D} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial u} \right] \sin \psi_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^z \left[\frac{\partial K_{ij}}{\partial u} \delta_{ij}^{1.5} \cos \alpha_{ij} + \frac{\lambda_{ij}}{D} \frac{\partial M_{cij}}{\partial u} \sin \alpha_{ij} \right] \sin \psi_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial u} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial u} \right)_1 + \left(\frac{\partial F_z}{\partial u} \right)_2 \\ &= \sum_{j=1}^z \left[1.5K_{ij} \delta_{ij}^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial u} \sin \alpha_{ij} + K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} \frac{\partial \sin \alpha_{ij}}{\partial u} - \frac{\lambda_{ij} M_{cij}}{D} \frac{\partial \cos \alpha_{ij}}{\partial u} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^z \left[\frac{\partial K_{ij}}{\partial u} \delta_{ij}^{1.5} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij}}{D} \frac{\partial M_{cij}}{\partial u} \cos \alpha_{ij} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial u} &= \left(\frac{\partial M_x}{\partial u} \right)_1 + \left(\frac{\partial M_x}{\partial u} \right)_2 \\ &= \sum_{j=1}^z \left[1.5K_{ij} \delta_{ij}^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial u} \tau_{ij} + K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial u} - \frac{\lambda_{ij} M_{cij}}{D} \frac{\partial e_{ij}}{\partial u} \right] \sin \psi_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^z \left[\frac{\partial K_{ij}}{\partial u} \delta_{ij}^{1.5} \tau_{ij} - \frac{\lambda_{ij}}{D} \frac{\partial M_{cij}}{\partial u} (e_{ij} - r_i) \right] \sin \psi_j \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial u} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial u} \right)_1 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial u} \right)_2$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{j=1}^z \left[1.5K_{ij} \delta_{ij}^{0.5} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial u} \tau_{ij} + K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial u} - \frac{\lambda_{ij} M_{cij}}{D} \frac{\partial e_{ij}}{\partial u} \right] \cos \psi_j \\ &\quad - \sum_{j=1}^z \left[\frac{\partial K_{ij}}{\partial u} \delta_{ij}^{1.5} \tau_{ij} - \frac{\lambda_{ij}}{D} \frac{\partial M_{cij}}{\partial u} (e_{ij} - r_i) \right] \cos \psi_j \end{aligned}$$

여기서, $\{\partial F/\partial u\}_1$ 은 기존의 Newton-Raphson수식화에서 사용되었던 항이며, $\{\partial F/\partial u\}_2$ 는 본 연구에서 해의 수렴성을 개선하기 위하여 $\{u\}$ 의 함수로 표현되는 모든 변수의 편미분을 고려한 항이다.

3. 결과 및 고찰

3.1 해석모델 및 수치해석

Table 1은 계산에 사용된 볼베어링의 사양을 나타낸 것이며, Fig. 5는 본 연구의 계산과정을 나타낸 것이다. 구름요소에 작용하는 waviness와 케도륜 곡률

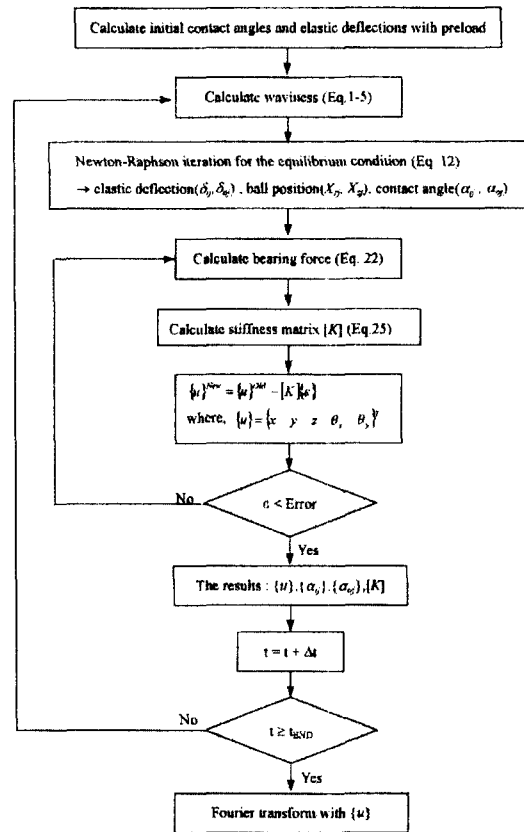


Fig. 5 The flow chart of numerical analysis

Table 1 Specification of ball bearing⁽⁹⁾

Number of ball, Z	16
Ball diameter, D	22.23×10^{-3} [m]
Pitch diameter, d_m	125.26×10^{-3} [m]
Axial preload, P_z	10 [kN]
Groove radius of inner race, r_i	11.63×10^{-3} [m]
Groove radius of outer race, r_o	11.63×10^{-3} [m]
Diametral clearance, P_d	0.43×10^{-3} [m]
Waviness amplitude, A	1×10^{-3} [m]

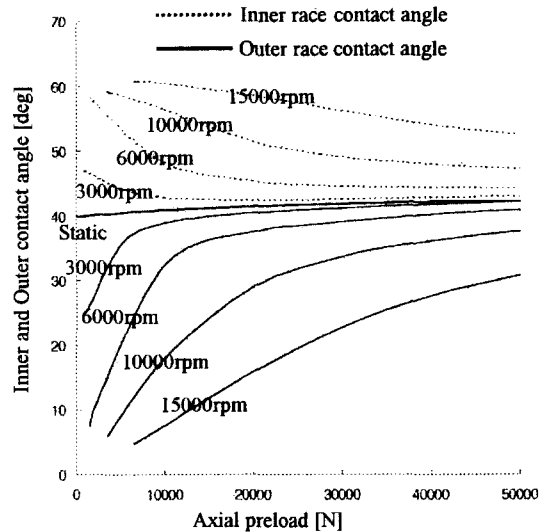
반경중심의 위치벡터를 구하여, 힘 평형조건과 기하학적 조건에 의해 탄성변형에 대한 연립방정식을 Newton-Raphson방법에 의해 계산하였다. 이 값을 사용하여 접촉력을 구하고, 각 볼에서 발생하는 접촉력의 합과 베어링 예압과의 힘 평형방정식을 Newton-Raphson방법에 의해 해석하여, 강성행렬과 회전중심의 변위를 계산하였다. Newton-Raphson방법의 허용오차는 10^{-15} %로 하였으며, 시간에 따른 응답을 구하기 위한 시간간격은 10^{-5} sec로 두고 계산하였다.

3.2 해석모델의 검증

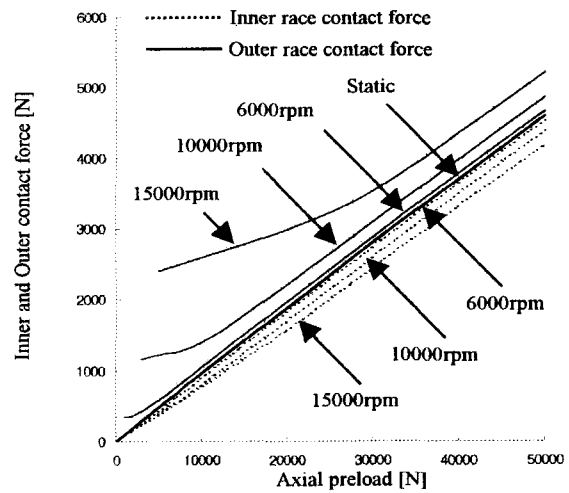
본 연구의 이론적 타당성을 검증하기 위하여, waviness가 없는 경우 볼의 원심력(F_{cj})과 자이로스 코픽 모멘트(M_{Gj})의 영향에 의한 접촉력, 접촉각의 변화와 waviness의 영향에 의한 접촉력과 진동주파수를 계산하여 기존의 연구결과와 비교하였다.

Fig. 6은 내륜회전시 waviness가 없는 경우, F_{cj} 와 M_{Gj} 의 영향을 고려하여 예압과 회전속도에 따른 내외륜 접촉각과 접촉력을 계산한 결과이다. 예압이 증가하면 외륜의 접촉각과 내외륜의 접촉력은 증가하고 내륜의 접촉각은 감소하는 경향을 보인다. 회전속도가 증가하면 내륜의 접촉력과 외륜의 접촉각은 감소하고 외륜의 접촉력과 내륜의 접촉각은 증가하는 경향을 보인다. 이 결과를 Harris의 결과⁽⁹⁾와 비교하여 정확히 일치함을 확인하였다.

기존 연구^(3,4)를 통해, Wardle은 waviness에 의한 접촉각 및 접촉력 비례상수의 변화는 없다고 가정하여, waviness의 진폭과 접촉력과의 관계를 계산하였는데, waviness의 차수가 볼의 개수와 일치할 경우



(a) Contact angle



(b) Contact force

Fig. 6 Contact angle and contact force of single ball

($l = iZ$)의, 접촉력 변화는 $\Delta f_{iz} = 1.5AK_j \delta^{0.5} \tan \alpha$ 이며, waviness차수가 볼의 개수보다 1이 작거나 클 경우($l = iZ \pm 1$) 접촉력의 변화는 $\Delta f_{iz \pm 1} = 0.75AK_j \delta^{0.5}$ 라고 발표하였다. 여기서 A는 waviness의 진폭이며, α 는 예압에 의한 접촉각이다. 그리고 Z와 i는 볼의 개수 및 양의 정수이다. 즉, 동일한 K_j 와 δ 에 대하여, 두 접촉력 변화량의 비는 $2 \tan \alpha$ 가 된다. Fig. 7는 내륜의 waviness차수가 각각 15와 16인 경우, 본

연구에서 제안한 방법을 사용하여 접촉력의 변화를 계산한 결과이다. Wardle과 동일조건에서 계산하기 위하여, F_{ci} 와 M_{ci} 는 고려하지 않았고, waviness에 의한 접촉각 및 접촉력 비례상수의 변화는 없으며, 모멘트에 의한 케도륜의 각변위는 발생하지 않는다고 가정하였다. 이 경우, 예압에 의한 접촉각은 약 40°, 두 접촉력 변화량의 비는 1.66(=0.154/0.093)으로 계산되는데, Wardle의 계산식에 의한 결과는 1.68로서 일치함을 알 수 있다.

구름요소에 waviness가 존재할 경우, 각 볼의 접촉력과 접촉각이 시간에 따라 변화하게 되므로 베어링 진동이 발생하게 된다. Table 2는 기존 연구를 통해 밝혀진 케이지 회전주파수, 볼의 자전주파수 그리고 이 성분들의 조합으로 발생하는 베어링진동의 기본주파수 성분을 나타낸 것이다. 케도륜 waviness의 차수가 $l=iZ$ 인 경우는 축방향의 진동만을 유발하고,

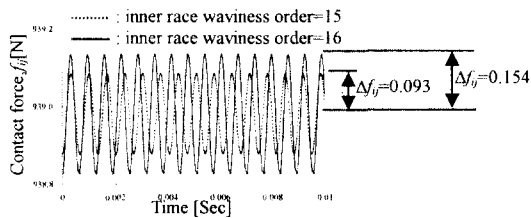


Fig. 7 Inner race contact force due to waviness with Wardles condition⁽¹³⁾

Table 2 Principal vibration frequencies from the waviness of the rolling elements($i \geq 1$: intger, Z : number of ball, f : rotating frequency of inner race, f_c : cage rotating frequency, f_b : ball spinning frequency)⁽¹³⁾

Type of waviness	Waviness order	Principal frequencies[Hz]	Type of motion
Outer race	$l=iZ$	iZf_c	axial
	$l=iZ \pm 1$	iZf_c	radial
Inner race	$l=1$	f	radial
	$l=iZ$	$iZ(f-f_c)$	axial
	$l=iZ \pm 1$	$iZ(f-f_c) \pm f$	radial
Ball	Oversize	f_c	radial
	$l=2i$	$2if_b$	axial
	$l=2i$	$2if_b \pm f_c$	radial

$l=iZ \pm 1$ 인 경우는 반경방향의 진동만을 유발한다. 그리고 볼 waviness의 차수가 $l=iZ \pm 1$ 인 경우는 진동을 유발하지 않고, $l=2i$ 인 경우는 축방향과 반경방향의 진동을 모두 유발한다고 알려져 있다.^(13,14) Table 1에 나타난 사양의 베어링이 10000rpm으로 회전할 경우, 본 연구에서 제시한 모델에서 F_{ci} 와 M_{ci} 를 고려하지 않고 케이지 회전주파수와 볼의 자전주파수를 구하면 각각 $f_c=72.06$ Hz, $f_b=461.11$ Hz로 계산된다. Fig. 8은 볼의 waviness차수가 2인 경우의 시간응답을 주파수 변환한 결과로서, 축방향 베어링진동의 기본주파수($2f_b=922.23$ Hz)와 반경방향 베어링진동의 기본주파수($2f_b-f_c=850.07$ Hz, $2f_b+f_c$

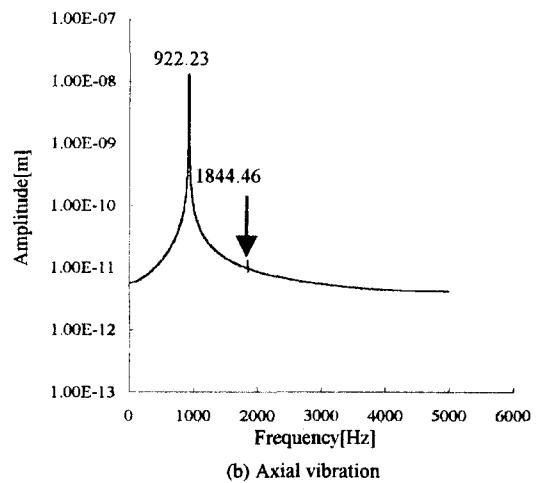
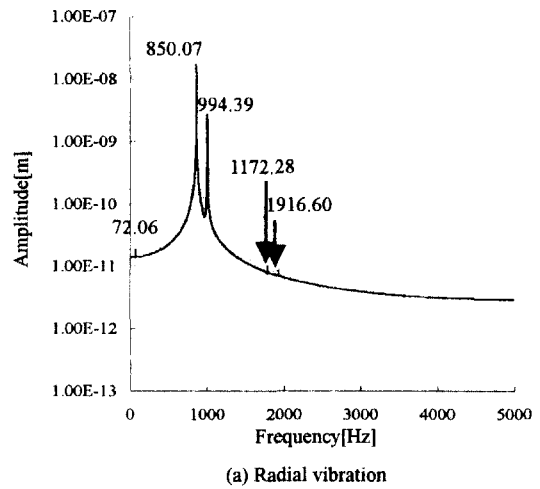


Fig. 8 Principal frequencies and its harmonics due to ball waviness of order 2 without considering F_{ci} and M_{ci}

Table 3 Comparisons of cage rotating frequency, ball spinning frequency and principal vibration frequencies between the proposed model and prior model (without considering F_{cj} and M_{Gj})

Type	Waviness order	Principal frequencies[Hz]		Type of motion
		Proposed model	Yhland's model	
Cage rotating frequency		72.06	71.63	
Ball spinning frequency		461.11	460.30	
Outer race	15	1149.52	1146.10	radial
	16	1149.52	1146.10	axial
	17	1149.51	1146.10	radial
Inner race	15	1350.48	1353.90	radial
	16	1517.15	1520.57	axial
	17	1680.81	1687.24	radial
Ball	2	850.07	848.97	radial
		994.39	992.23	axial
		922.23	920.60	radial

=994.39 Hz) 성분이 계산되며, 기존의 연구를 통해 알려진 탄성변형과 접촉력간의 비선형특성에 의한 반경방향 진동의 조화성분($4f_b - f_c = 1172.28\text{Hz}$, $4f_b + f_c = 1916.60\text{ Hz}$)과 축방향 진동의 조화성분($4f_b = 1844.46\text{ Hz}$)이 계산된다. 케드론과 볼의 waviness에 대한 베어링 진동의 시간응답을 주파수 변환하여 기본주파수를 구하고, 기존 연구⁽¹⁵⁾에 의한 결과와 비교하여 Table 3에 나타내었다. 두 결과는 정확히 일치함을 알 수 있다.

3.3 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트와 waviness에 의한 베어링의 특성변화

(1) 접촉력과 강성의 변화

Fig. 9는 내륜의 waviness차수가 15($l = iZ - 1$)와 16($l = iZ$)인 경우, 10000 rpm으로 회전하는 케드론에 미치는 단일 볼의 접촉력(f_{ij})을 시간에 따라 계산하여, waviness가 존재하지 않는 경우의 접촉력과 비교한 결과이다. Waviness가 없는 경우는 접촉력의 변화가 없으며, waviness가 존재하게 되면 접촉력은 waviness가 없는 경우의 접촉력을 중심으로 변화함을

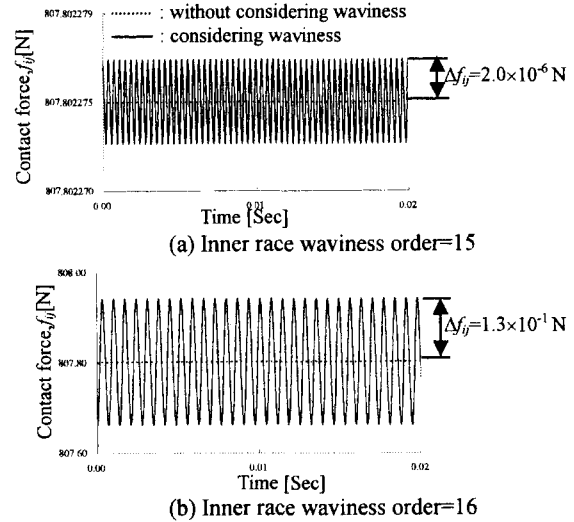


Fig. 9 Inner race contact force due to waviness

알 수 있다. 그리고 Fig. 7과는 달리, 축방향의 진동을 유발하는 waviness차수가 16인 경우 보다 반경방향 진동을 유발하는 waviness차수가 15인 경우의 접촉력 변화(Δf_{ij})가 매우 작게 나타나고 있다. 이는 볼 베어링을 회전하는 케드론의 각변위를 고려한 5자유도계로 모델링 하였기 때문이다. 즉, waviness차수가 15인 경우는 볼의 수와 waviness의 차수가 일치하지 않으므로, 각 볼에서는 크기와 위상이 서로 다른 접촉력이 발생하게 된다. 이는 모멘트를 발생하게 되어 각 볼의 탄성변형량을 일정하게 하는 케드론 중심의 각변위가 발생한다. 따라서 접촉력의 변화량이 매우 작아지게 되어 각변위와 반경방향 변위의 변화만을 발생하게 되는 것이다. 반면, waviness의 차수가 16인 경우는 볼의 수와 waviness차수가 일치하기 때문에, 모든 볼에서 접촉각 방향으로 발생하는 접촉력의 크기는 모두 같다. 따라서, 모멘트가 발생하지 않으므로 케드론 중심의 각변위와 반경방향의 변위는 발생하지 않게 된다. 그러나, 접촉력의 축방향 성분의 합이 예압과 일치해야 하는 평형조건을 만족하기 위하여, waviness에 의한 축방향 변위와 접촉력의 변화가 발생하게 된다. 즉, 베어링의 각변위를 고려한 해석에 있어서, 축방향 진동을 유발하는 waviness는 반경방향 waviness에 비하여 매우 큰 접촉력의 변화를 유발하는 것을 알 수 있는데, 외륜의 waviness에 대해서도 동일한 경향을 보임을 확인하였다.

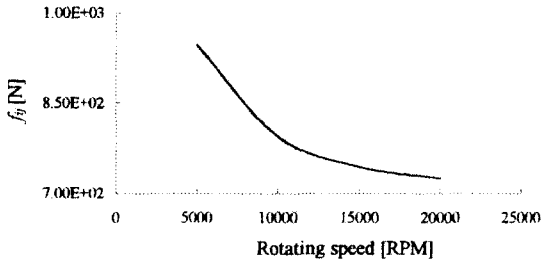
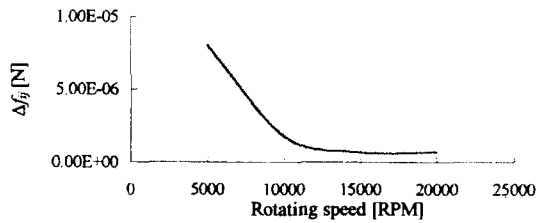
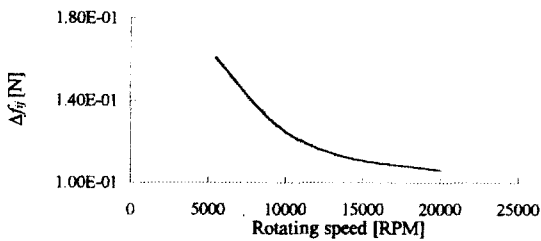


Fig. 10 Inner race contact force



(a) Inner race waviness order=15

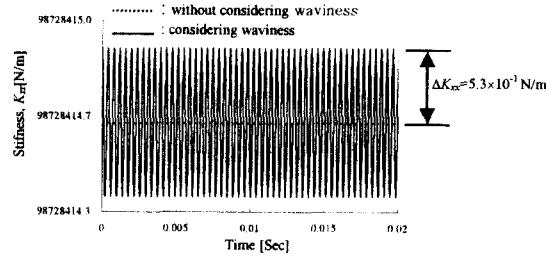


(b) Inner race waviness order=16

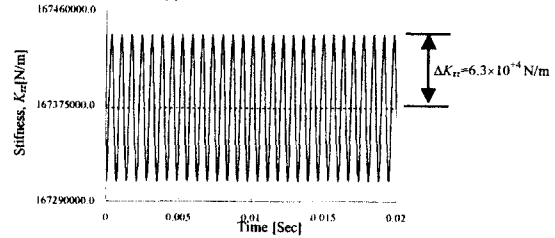
Fig. 11 Amplitude of inner race contact force due to waviness

Fig. 10은 waviness가 없을 경우, 회전속도의 증가에 따른 내륜 접촉력(f_{ij})을 계산한 결과인데, 회전속도의 증가에 따라 감소하는 경향을 가진다. 그리고 Fig. 11은 내륜 waviness의 차수가 각각 15와 16인 경우에 대한 내륜접촉력의 변화(Δf_{ij})를 나타낸 것으로서, 회전속도의 증가에 따라 내륜접촉력과 같이 감소하는 경향을 보임을 알 수 있다.

Fig. 12는 내륜이 10000 rpm으로 회전하는 베어링의 축방향 예압이 10 kN일때 내륜 waviness의 차수가 15인 경우의 K_{xx} 와 내륜 waviness의 차수가 16인 경우의 K_{zz} 를 계산하여 waviness가 없는 경우와 비교한 결과이다. Waviness가 없는 경우의 강성은 시간의 경과에 따른 변화가 없지만, waviness가 존재하는 경우는 waviness가 없는 경우의 강성을 중심으로 변화하고 있음을 알 수 있다. Waviness차수가 15인 경

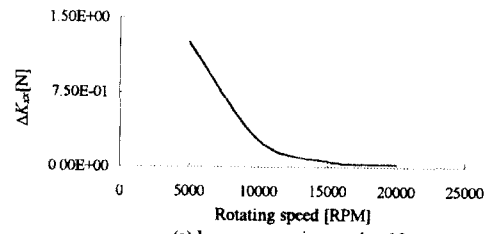


(a) Inner race waviness order=15

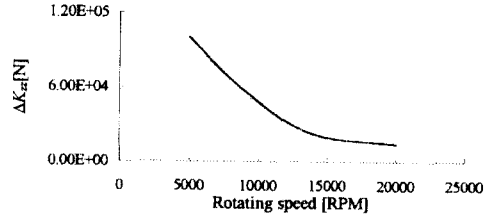


(b) Inner race waviness order=16

Fig. 12 K_{xx} and K_{zz} due to waviness



(a) Inner race waviness order=15



(b) Inner race waviness order=16

Fig. 13 Amplitude of stiffness due to waviness

우의 강성 변화(ΔK_{xx})가 16인 경우의 강성변화(ΔK_{zz})에 비하여 매우 작은 것은, Fig. 11로부터 예상할 수 있듯이 waviness차수가 15인 경우에 발생하는 내륜접촉력의 변화량이 waviness차수가 16인 경우에 비하여 매우 작기 때문이다.

Fig. 13은 회전속도의 증가에 따른 K_{xx} , K_{zz} 의 변화(ΔK_{xx} , ΔK_{zz})를 계산한 결과인데, Fig. 11의 Δf_{ij} 와 같이 감소하는 경향을 보인다. K_{xx} 와 K_{zz} 는 각 볼에서 발생하는 접촉력의 합에 의해 계산되기 때문에 ΔK_{xx} 를 유발하는 접촉력은 원주를 따라 서로 상쇄되

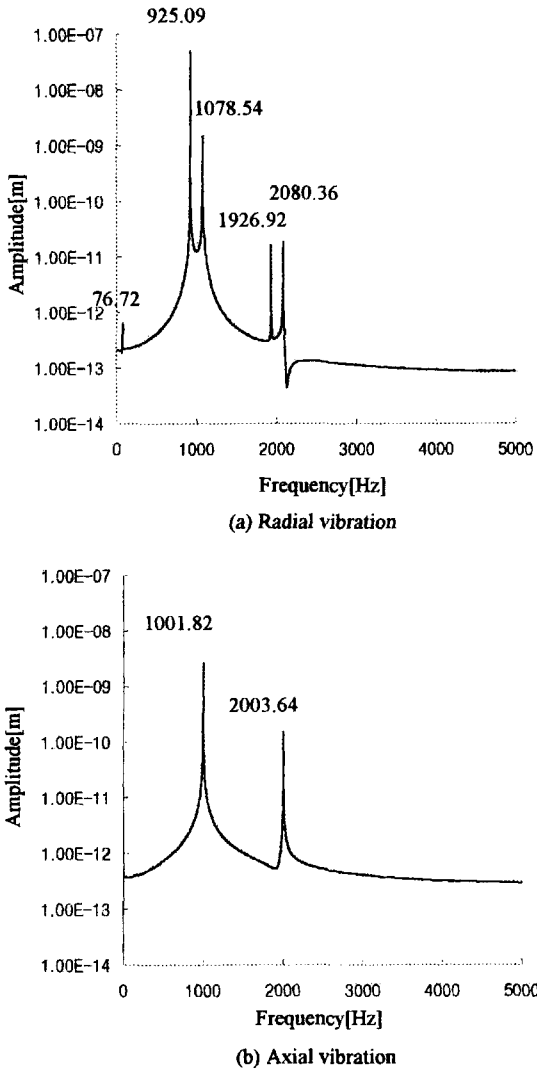


Fig. 14 Principal frequencies and its harmonics due to ball waviness of order considering F_{cj} and M_{Gj}

므로 ΔK_{zz} 가 ΔK_{xx} 에 비하여 매우 크게 나타나는 것이다. 이러한 현상은 외륜의 waviness에 대해서도 동일한 경향을 나타낸다.

(2) 베어링 회전중심의 진동주파수

볼의 회전에 의해 F_{cj} 와 M_{Gj} 가 발생하면 Fig. 4와 같이, 볼의 자전축은 베어링의 회전축과 z 의 각도를 이루게 되고, 식 (20)과 (21)에 의해 케이지의 회전주파수와 볼의 자전주파수를 계산할 수 있다. Table 1의 베어링 사양에 대하여 f_c 와 f_b 는 각각 76.72 Hz,

500.91 Hz로 계산이 된다. Fig. 14는 내륜이 10000 rpm으로 회전하고, 볼의 waviness차수가 2인 경우 발생하는 진동의 시간응답을 주파수 변환한 결과이다. Fig. 14(a)에서는 76.72 Hz의 케이지 회전주파수 성분과 반경방향 진동의 기본주파수 성분인 925.09 Hz ($2f_b - f_c$)와 1078.54 Hz ($2f_b + f_c$)가 발견되며, Fig. 14(b)에서는 축방향진동의 기본주파수 성분인 1001.82 Hz ($2f_b$)가 나타난다. 그리고 기존의 연구⁽³⁾를 통해 알려진, 탄성변형-접촉력의 비선형 특성에 의한 반경방향 진동의 조화성분 ($4f_b - f_c = 1926.92$ Hz, $4f_b - f_c = 2080.36$ Hz)과 축방향 진동의 조화성분 ($4f_b = 2003.64$ Hz)이 나타나고 있다. Table 4는 F_{cj} 와 M_{Gj} 를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 대하여, 케드론의 waviness에 의해 발생하는 진동의 기본주파수를 계산하여 나타낸 것으로, F_{cj} 와 M_{Gj} 의 영향에 의해 진동주파수가 상당히 달라짐을 알 수 있다. 내륜이 회전하는 베어링에 대하여 회전속도의 증가에 따라, 각 waviness에 의한 진동의 시간응답을 구하고, 주파수 변환한 결과를 Fig. 15~18에 나타내었다. Fig. 15는 케이지 회전주파수와 볼의 자전주파수를 회전속도의 증가에 따라 F_{cj} 와 M_{Gj} 를 고려하여 계산하고, F_{cj} 와 M_{Gj} 를 고려하지 않은 경우의 결과와 비교한 것이다. F_{cj} 와 M_{Gj} 를 고려하지 않은 경우는 회전속도의 증가에 따라 케이지 회전주파수와 볼의 자전주파수가 선형적으로 증가하는 경향을 보인다. 그러나 F_{cj} 와 M_{Gj} 를 고려하게 되면, 회전속도가 증가함에 따라 내륜의 접촉각(α_{ij})은 증가하게 되고, 외륜의 접촉각(α_{oj})과 볼의 자전축과 베어링 회전축이 이루는 각도(ζ)는 감소하게 되므로, 식 (20)과 (21)에

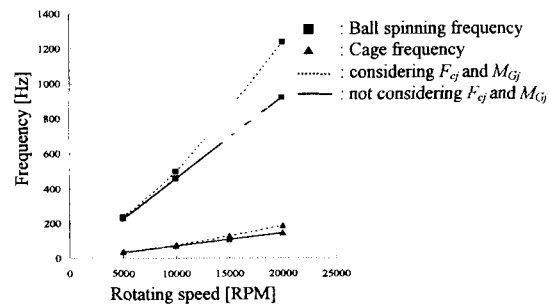


Fig. 15 Cage frequency and ball spinning frequency

Table 4 Comparisons of principal vibration frequencies due to the waviness of the rolling elements

Type	Waviness order	Principal frequencies[Hz]		Type of motion
		Without considering f_{ci} and M_{Gj}	Considering f_{ci} and M_{Gj}	
Cage rotating frequency		72.06	71.63	
Ball spinning frequency		461.11	500.91	
Outer race	15	1149.52	1227.60	radial
	16	1149.52	1227.60	axial
	17	1149.51	1227.60	radial
Inner race	15	1350.48	1272.40	radial
	16	1517.15	1439.10	axial
	17	1680.81	1605.73	radial
Ball	2	850.07	925.09	radial
		994.39	1078.54	axial
		922.23	1001.82	radial

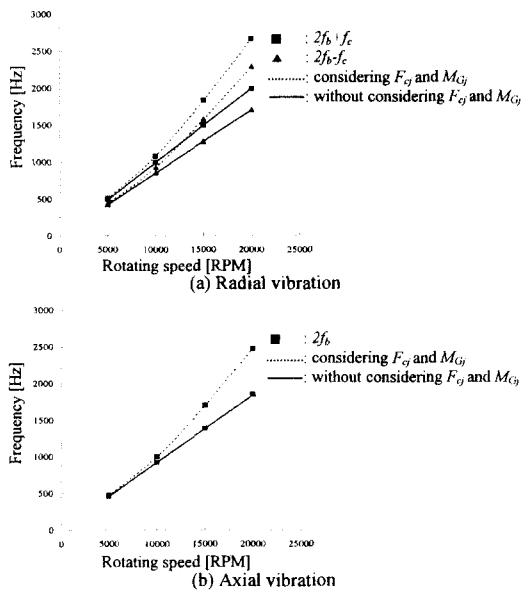


Fig. 16 Bearing vibration frequencies due to ball waviness of order 2

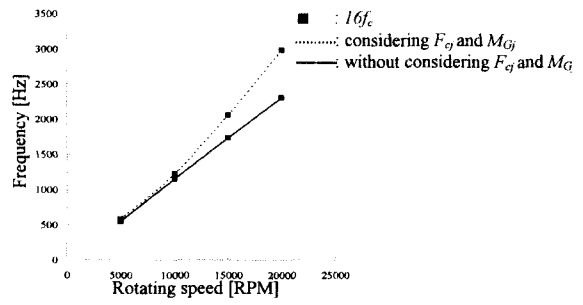


Fig. 17 Axial and radial bearing vibration frequencies due to outer race waviness of order 15 and 16

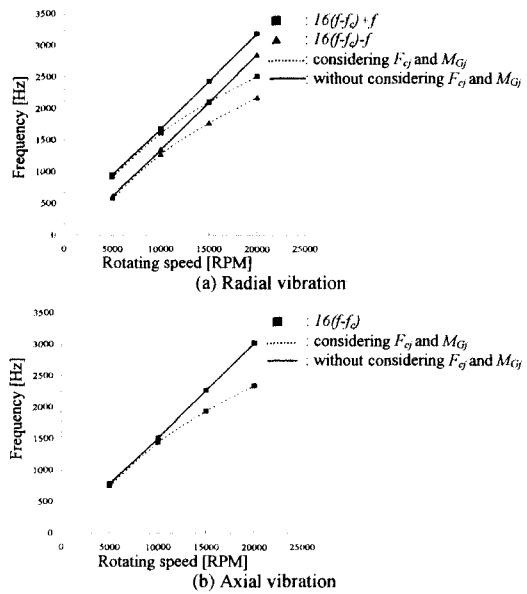


Fig. 18 Bearing vibration frequencies due to inner race waviness of order 15 and 16

의하여 케이지 회전주파수와 볼의 자전주파수는 보다 급격히 증가하게 된다.

Fig. 16과 17은 볼 waviness의 차수가 2인 경우와 외륜 waviness 차수가 15와 16인 경우의 주파수 변화를 각각 나타낸 것이다. Fig. 15에서 나타난 것과 같이, F_{cj} 와 M_{Gj} 를 고려하면 f_b 와 f_c 가 급격히 증가하게 되므로, $2if_b + f_c$ 와 $2if_b$ 의 식으로 표현되는 볼의 waviness에 의한 베어링 진동주파수와 izf_c 에 의해 표현되는 외륜의 waviness에 의한 베어링 진동주파수는 회전속도의 증가에 따라 급격히 증가하게 된다. 그리고 Fig. 18은 내륜의 waviness 차수가 15와 16인 경우의 결과인데, 이 경우의 베어링 진동주파수는

$Z(f-f_c)-f$ 와 $Z(f-f_c)$ 의 식으로 표현되기 때문에, F_G 와 M_G 를 고려하지 않은 경우에 비하여 회전속도의 증가에 따른 진동주파수의 증가경향은 감소한다.

4. 결 론

(1) 볼의 원심력 및 자이로스코픽 모멘트의 영향과 구름요소의 waviness에 의한 영향을 고려하여 볼베어링의 특성을 해석할 수 있는 이론적 모델을 제시하였다.

(2) 내륜이 회전하는 경우, waviness와 회전속도에 의한 베어링 특성의 해석결과는 다음과 같다.

- Waviness는 시간의 경과에 따른 접촉력과 강성의 변화를 유발하며, 반경방향 진동을 유발하는 waviness차수보다, 축방향 진동을 유발하는 waviness차수가 더 큰 접촉력과 강성의 변화를 유발한다.
- 회전속도가 증가하면 내륜에 미치는 접촉력 및 강성은 감소하고, waviness에 의한 접촉력 및 강성의 변화(Δf_{ij} , ΔK_{xx} , ΔK_{zz})도 감소한다.
- 회전속도가 증가하면, 볼의 원심력과 자이로스코픽 모멘트의 영향으로 케이지 회전주파수와 볼의 자전주파수가 급격히 증가하여, waviness에 의한 베어링 진동주파수가 변화한다.

후 기

본 논문은 2001년 한양대학교 교내연구비 지원에 의한 결과입니다. 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Yhland, E. M., 1967, "Waviness Measurement-An Instrument for Quality Control in Rolling Bearing Industry", Proc. IMechE, Vol. 182, Part 3K, pp. 438~445.
- (2) Wardle, F. P., and Poon, S. Y., 1983, "Rolling Bearings Noise, Cause and Cure", Chart. Mech. Engineering, July/Aug, pp. 36~40.
- (3) Wardle, F. P., 1988a, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 1 : Theory", Proc. IMechE, Vol. 202, No. C5, pp. 305~312.
- (4) Wardle, F. P., 1988b, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 2 : Experimental Validation", Proc. IMechE, Vol. 202, No. C5, pp. 313~319.
- (5) Yhland, E., 1992, "A Linear Theory of Vibrations Caused by Ball Bearings with Form Errors Operating at Moderate Speed", ASME, J. of Tribology, Apr, Vol. 114, pp. 348~359.
- (6) Akturk, N., Uneeb, M., Gohar, R., 1997, "The Effects of Number of Balls and Preload on Vibrations Associated with Ball Bearings", ASME, J. of Tribology, Oct, Vol. 119, pp. 747~753.
- (7) Akturk, N., 1999, "The Effect of Waviness on Vibrations Associated with Ball Bearings", ASME, J. of Tribology, Oct, Vol. 121, pp. 667~677.
- (8) Jones, A. B., 1960, "A General Theory of Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions", ASME J. Basic Eng., Vol. 82, pp. 309~320.
- (9) Harris, T. A., 1991, Rolling Bearing Analysis, 3rd Ed., John Wiley & Sons, INC.
- (10) Hamrock, B. J., Dowson, D., 1981, "Ball Bearing Lubrication - The Elastohydrodynamics of Elliptical Contacts", John Wiley & Sons, INC.
- (11) 정성원, 장건희, 2001, "다수의 각접촉 볼베어링으로 지지된 5자유도계 회전계에서 볼베어링의 waviness에 의해 발생하는 비선형진동 해석모델", 한국소음진동공학회지, 제 11 권, 2 호, pp. 336~345
- (12) Jang, G. H. and Jeong, S. W., 2001, "Nonlinear Excitation Model of Ball Bearing Waviness in a Rigid Rotor Supported by Two or More Ball Bearings Considering Five Degrees of Freedom", ASME, J. of Tribology, will be published.