

## 기어 물림부의 스프링강성 변화와 구동기의 불균형을 고려한 2단 기어장치의 진동에 관한 연구

정태형\*, 이정삼\*\*, 최정락\*\*

### A Study on the Vibration of 2-Stage Gear System Considering the Change of Gear Meshing Stiffness and Imbalance of Motor

Tae Hyong Chong\*, Joung Sang Lee\*\*, Jung Rak Choi\*\*

#### Abstract

We develop a method to analyze dynamic behavior of a multi-stage gear train system. The example system consists of three shafts supported by ball bearings at the ends of them and two pairs of spur gear set. For exact analysis, the meshing tooth pair of gear set is modeled as spring and damper having time-dependent meshing stiffness and damping. The bearing is modeled as spring. The result of this analysis is compared to that of other model having mean mesh stiffness. The effect of the excitation force by the imbalance of a rotor of a motor is also analyzed. Finally, the change of a natural frequency of the whole system due to the change of an angle between three shafts is compared in each case, and from this analysis, the avoiding angle for design is advised.

**Key Words :** Gear(기어), 2-Stage Gear Train System(2단 기어장치), Flexural Vibration(굽힘 진동), Torsional Vibration(비틀림 진동), Imbalance of Motor(구동기의 불균형), Natural Frequency(고유 진동수)

### 1. 서 론

동력전달용 기어장치의 설계에서 중요하게 고려해야 할 것은 전달하중에 대하여 충분한 강도를 갖도록 설계하는 것이다. 그러나, 고속 고부하에서 운전되는 동력전달용 기어장치에 있어서는 강도뿐만 아니라 진동 및 소음 특성이 시스템의 성능에 미치는 영향이 매우 크므로 이에 관한

연구가 활발히 진행되어 왔다<sup>(1-5)</sup>. 그러나, 현재까지의 연구들은 대부분 1단 기어장치를 대상으로 하고 있으며, 2단 이상의 다단기어장치의 진동에 대하여 직접적으로 다룬 연구는 거의 없다. 또한, 대부분의 경우 기어의 진동을 해석할 때 이(teeth)를 평균물림강성을 갖는 스프링으로, 베어링을 강체로 단순화하여 모델링하고 있으며<sup>(6-8)</sup>, 기어 물림부의 오차에 기인하는 진동뿐만 아니라 구동기 등 외

\* 한양대학교 기계공학과 (thchong@hanyang.ac.kr)  
\*\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

부로부터 유입되는 진동이 전체 시스템에 미치는 영향을 분석한 연구는 거의 없는 상태이다.

이에 본 연구에서는 동력전달용 2단 기어장치를 대상으로 기어물림부분을 시변스프링과 윤활막에 의한 댐퍼로, 베어링을 스프링으로 모델링하여 그 동적거동을 살펴보았다. 또한 기어장치를 구동하는 모터에 의해 발생하는 불균형력을 진동의 기진력으로 하여 이것이 기어장치의 진동에 미치는 영향을 해석하였으며, 2쌍의 기어가 물려있는 중간축에 대해 다른 2개의 축이 이루는 각도가 시스템의 동적 거동에 미치는 영향에 대하여 살펴보았다.

## 2. 2단 기어장치의 모델링

본 연구에서 대상으로 하고 있는 동력전달장치는 Fig. 1과 같이 양단이 볼베어링으로 지지되어 있는 입력축, 출력축, 중간축의 3개의 축과 2개의 평기어쌍으로 연결된 2단 기어장치이다. 토크  $T$ 를 전달하는 2단 기어장치의 3개의 축은 비틀림에 대해서는 탄성체로, 굽힘에 대해서는 축의 길이가 직경에 비해 충분히 짧으므로 강체로 모델링하였으며 축의 자중 및 전달법선하중에 의한 축의 처짐은 베어링에서의 처짐으로 모델링하였다.

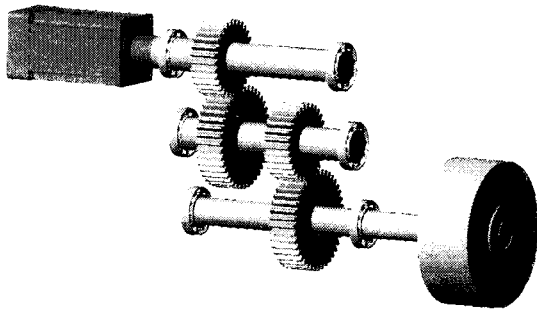


Fig. 1 Simplified layout of the 2-stage gear train system

기어물림부분은 Fig. 2와 같이 1쌍의 평기어가 맞물려 있는 이 물림부를 물림주기에 따라 주기적으로 변하는 물림강성  $K_g(t)$ 인 스프링과 감쇠계수  $C_g(t)$ 의 윤활막을 가진 댐퍼로 모델링 하고, 각각의 기어 본체를 작용선 방향으로 환산한 질량체로 한 진동계로 모델링하였다<sup>(2)</sup>.

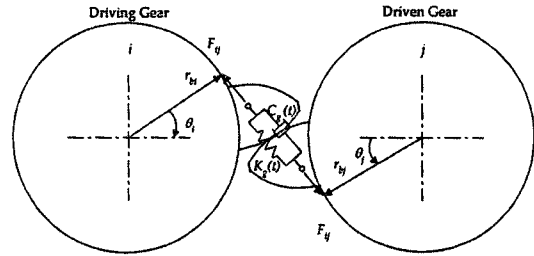


Fig. 2 Vibrational modeling of a pair of spur gear

## 3. 진동방정식

### 3.1 비틀림 진동

비틀림 진동에 대하여 1단과 2단의 기어쌍에서 작용하는 전달법선하중을 각각  $F_{12}$ ,  $F_{34}$ 라 할 때 이를 각 기어의 기초원 반경  $r_{bi}(i=1\sim4)$ 와 각 기어의 회전각  $\theta_i(i=1\sim4)$ 의 함수로 정의하면, 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} F_{12} &= K_{g1} \cdot (r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2) + C_{g1} \cdot (\dot{r}_{b1}\dot{\theta}_1 - \dot{r}_{b2}\dot{\theta}_2) \\ F_{34} &= K_{g2} \cdot (r_{b3}\theta_3 - r_{b4}\theta_4) + C_{g2} \cdot (\dot{r}_{b3}\dot{\theta}_3 - \dot{r}_{b4}\dot{\theta}_4) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $K_{gi}$ 와  $C_{gi}(i=1\sim2)$ 는 1단과 2단의 기어 물림강성과 감쇠계수이며 임의의 시간  $t$ 에서의 값은 식 (2)와 같이 구할 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\begin{aligned} K_g(t) &= x(\tau) \cdot \overline{K_g} \\ C_g(t) &= 2\xi \cdot \sqrt{M \cdot K_g(t)} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\overline{K_g}$ 는  $\sum k_i$ 의 시간  $t$ 에 대한 평균치,  $\tau = \omega_c t$ ,  $x(\tau) = \sum K_{gi} / \overline{K_g}$ ,  $\xi$ 는 감쇠율이며, 구동기어와 피동기어의 질량을 각각  $M_i$ ,  $M_j$ 라 할 때  $M = M_i M_j / (M_i + M_j)$ 이다.

이로부터 로터, 축, 하중의 극관성 모멘트를  $I_p$ , 각 축의 비틀림 강성을  $K$ , 로터와 각 기어 및 출력부의 회전각을  $\Theta$ , 기어사이의 작용하중을  $F$ , 각 기어의 기초원 반경을  $r$ 이라 하면, 비틀림에 대한 진동방정식은 식 (3)과 같이 된다<sup>(10)</sup>.

$$I_p \ddot{\Theta} + K\Theta + Fr = 0 \quad (3)$$

### 3.2 굽힘진동

굽힘 진동에 대하여 구동기어  $i$ 와 피동기어  $j$  사이에 작용하는 전달법선하중  $F_{ij}$ 를 기어물림부분의 전달법선하중방향으로의 변위와  $F_{ij}$ 가  $y$ 축과 이루는 각도  $\gamma_1, \gamma_2$ 의 함수로 정의하면, 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned}
 F_{12} &= K_{g1} \left[ \frac{\{x_1 + a_3\phi_{1y}\} - \{x_2 - b_2\phi_{2y}\}}{\sin\gamma_1} + \frac{\{y_1 - a_3\phi_{1x}\} - \{y_2 + b_2\phi_{2x}\}}{\cos\gamma_1} \right] \\
 &+ C_{g1} \left[ \frac{\{\dot{x}_1 + a_3\dot{\phi}_{1y}\} - \{\dot{x}_2 - b_2\dot{\phi}_{2y}\}}{\sin\gamma_1} + \frac{\{\dot{y}_1 - a_3\dot{\phi}_{1x}\} - \{\dot{y}_2 + b_2\dot{\phi}_{2x}\}}{\cos\gamma_1} \right] \\
 F_{34} &= K_{g2} \left[ \frac{\{x_2 + b_3\phi_{2y}\} - \{x_3 - c_2\phi_{3y}\}}{\sin\gamma_2} + \frac{\{y_2 - b_3\phi_{2x}\} - \{y_3 + c_2\phi_{3x}\}}{\cos\gamma_2} \right] \\
 &+ C_{g2} \left[ \frac{\{\dot{x}_2 + b_3\dot{\phi}_{2y}\} - \{\dot{x}_3 - c_2\dot{\phi}_{3y}\}}{\sin\gamma_2} + \frac{\{\dot{y}_2 - b_3\dot{\phi}_{2x}\} - \{\dot{y}_3 + c_2\dot{\phi}_{3x}\}}{\cos\gamma_2} \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

여기서,  $\phi_{ix}, \phi_{iy}, (i=1\sim3)$ 는  $i$ 번째 축이  $x, y$ 축을 중심으로 회전한 각도이며,  $a_i, b_i, c_i, (i=1\sim3)$ 는 Fig. 3에서 정의한 치수이다.

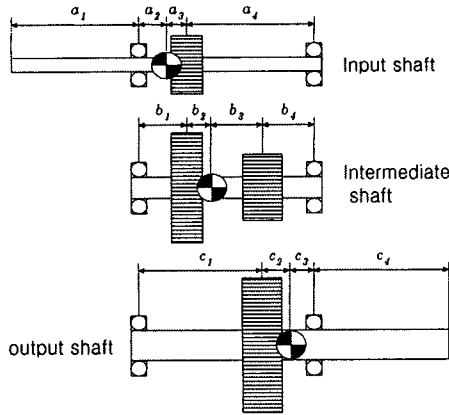


Fig. 3 Dimensions of input, intermediate, output shafts

이로부터 굽힘에 대한 진동방정식은, 식 (5)와 같이 된다<sup>(6)</sup>.

$$\begin{aligned}
 M\ddot{X} + C_x\dot{X} + K_x X + F_x &= 0 \\
 I_d\ddot{\Phi}_x + C_x a^2 \dot{\Phi}_x + K_x a^2 X + C_x a \dot{X} + K_x b X + F_x c &= 0 \\
 M\ddot{Y} + C_y\dot{Y} + K_y Y + F_y &= 0 \\
 I_d\ddot{\Phi}_y + C_y a^2 \dot{\Phi}_y + K_y a^2 Y + C_y a \dot{Y} + K_y b Y + F_y c &= 0
 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $M_x$ 은 기어를 포함한 각 축의 질량,  $X$ 와  $Y$ 는 각 축의  $x$ 와  $y$ 방향으로의 처짐,  $\Phi_x$ 와  $\Phi_y$ 는 각 축의  $x$ 축과  $y$ 축에 대한 기울기,  $I_d$ 는 기어를 포함한 각 축의 극관성 모멘트,  $K_x$ 와  $K_y$ 는 각 베어링의  $x$ 와  $y$ 방향의 탄성계수이다.

### 3.3 구동기의 불균형력의 영향

모터 진동중 가장 일반적인 원인이 되는 로터(rotor)의 질량불균형(imbalance)이 전체 시스템에 미치는 영향을 해석하기 위해 구동기를 Fig. 4와 같이 모델링하였다. 로터의 회전중심과 질량중심이 이상적으로 일치한 경우는 모터의 토크  $T(t)$ 는 변동은 없고 일정하지만 실제의 경우는 Fig. 4와 같이 로터의 회전중심과 질량중심이 일치하지 않고, 임의의 편심량  $e$  만큼 반경방향으로 편심이 된다. 이 경우 모터에는 식 (6)과 같은 토크의 변동과  $x, y$ 방향으로의 힘의 변동이 발생한다.

$$\begin{aligned}
 T_e(t) &= T_0 + e \cdot m_R g \cdot \cos\theta_R \\
 F_{fx}(t) &= m_R \cdot e \cdot \omega_R^2 \cdot \cos\theta_R \\
 F_{fy}(t) &= m_R \cdot e \cdot \omega_R^2 \cdot \sin\theta_R
 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  $T_0$ 는 편심이 없는 경우의 모터토크,  $\theta_R = \omega_R t$ ,  $\omega_R$ 은 로터의 회전속도,  $m_R$ 은 로터의 질량이다.

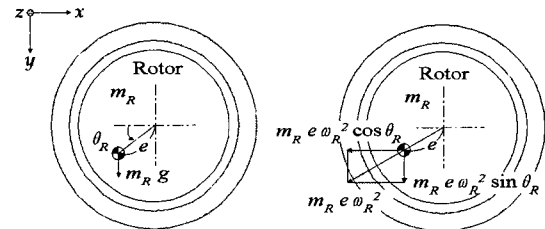


Fig. 4 Modeling of eccentric rotor

### 3.4 베어링 강성의 추정

일반적으로 베어링은 하중이 작용할 때 처짐이 발생하므로, 전체 시스템의 동적 거동을 명확히 하려면 베어링강성의 계산이 필요하다. 본 연구에서는 E. P. Gargiulo, Jr.<sup>(11)</sup>에 의해 개발된 구름 베어링에 대한 강성의 근사값 방정식 중 깊은 홈 볼베어링이나 앵귤러 볼베어링을 위한 식 (7)을 이용하여 베어링의 반경방향 스프링강성  $k$ 를 추정

하였다.

$$k = 0.0325 \times 10^6 \cdot \sqrt[3]{DF_r Z^2 \cos^5 \alpha} \quad (7)$$

여기서,  $D$ 는 볼 직경,  $F_r$ 은 반경방향 외력,  $Z$ 는 볼 개수,  $\alpha$ 는 볼 접촉각이다.

### 4. 진동의 해석

#### 4.1 자유진동해석

위에서 기술한 시스템에 대하여 Table 1~3의 제원을 가지고 전체 기어계의 진동방정식을 계산하였다. 기어계의 비틀림과 굽힘에 대한 고유진동수는 Table 4와 같고,

Table 1 Specifications of motor

		Motor
Power	[kW]	7.5
Rotational speed	[rpm]	1200
Torque	[N · m]	59.718
Weight of rotor	[N]	600
Diameter of rotor	[mm]	100

Table 2 Specifications of shafts

	Shaft 1	Shaft 2	Shaft 3
Transmitted power [kW]	7.5	45	225
Rotational speed [rpm]	1200	200	40
Length of shaft [mm]	285	200	285
Diameter of shaft [mm]	22	40	52
Bearing No.	6904ZZ	6207ZZ	6010ZZ

Table 3 Specifications of gears

	Gear 1	Gear 2	Gear 3	Gear 4
No. of teeth	24	144	20	100
Module [mm]	2	2	3.5	3.5
Pitch circle dia. [mm]	48	288	70	350
Base circle dia. [mm]	45.105	270.632	65.779	328.892
Pressure angle [deg]	20	20	20	20
Face width [mm]	20	20	35	35
Mass [kg]	0.2841	10.2276	1.0574	26.434

Table 4 Natural frequency

	Torsional vibration [rpm]	Flexural vibration [rpm]
1st	5360	30590
2nd	14320	36140
3rd	34820	41640

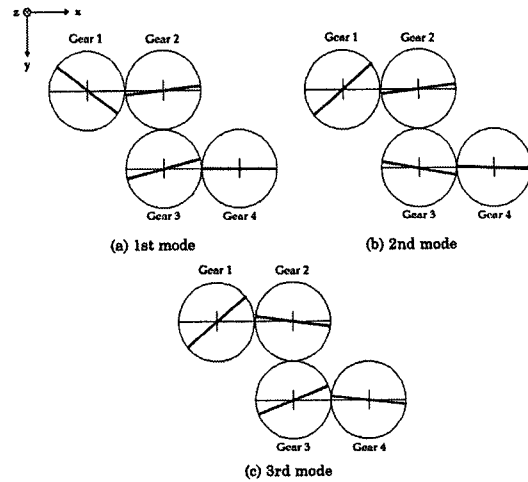


Fig. 5 Natural mode shape of torsional vibration

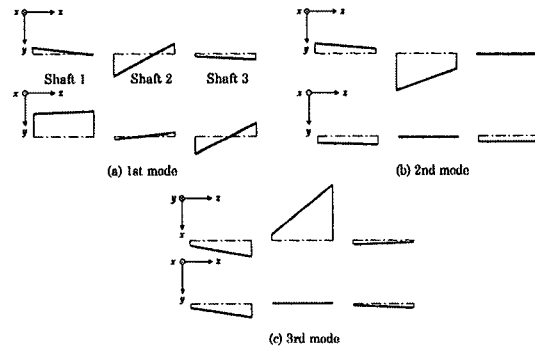


Fig. 6 Natural mode shape of flexural vibration

각각의 고유진동수에 대한 진동모드를 계산하여 진동의 형태를 구하면 Fig. 5 및 Fig. 6과 같다.

#### 4.2 강제진동해석

##### 4.2.1 기어물림부의 스프링강성과 감쇠의 영향

Fig. 7은 기어 1과 기어 2의 기어쌍의 물림주기에 대한 기어물림부분의 물림강성의 변화를 2주기동안 구한 것이다. 그림에서 보면 기어쌍의 물림주기에 대한 물림강성은 1쌍 물림과 2쌍 물림을 반복하면서 계속해서 변화하는 것을 볼 수 있다. 이는 기어 3과 기어 4사이에서도 거의 동일하다.

Fig. 8과 Fig. 9는 기어물림부의 감쇠를 고려하지 않았을 때, 비틀림과 굽힘 진동에 대한 강제진동을 해석한 것으로서, 실선은 기어물림부를 시변 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링한 경우이고, 파선은 평균 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링한 경우이다. 평균 스프링강성을 갖는 스프링으로 모델링한 경우는 고유진동수에서의 변위만 증가하지만 시변 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링한 경우는 고유진동수 전후에서 큰 비선형성이 나타나는 것을 볼 수 있다.

Fig. 10과 Fig. 11은 시변 물림강성을 가진 스프링으로 모델링한 경우, 물림부분의 감쇠를 고려했을 때와 감쇠

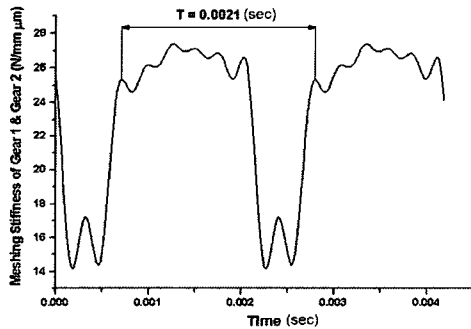


Fig. 7 Change of meshing stiffness of Gear1 and Gear2

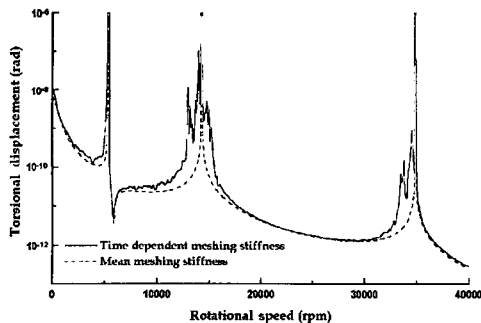


Fig. 8 The effect of the change of meshing stiffness on the forced torsional response without damping

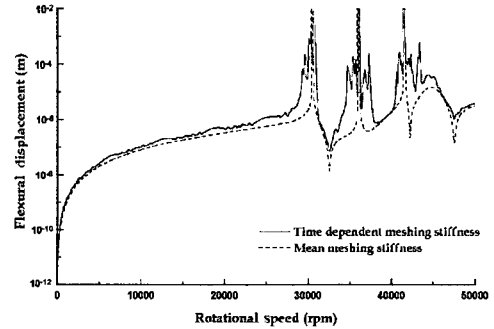


Fig. 9 The effect of the change of meshing stiffness on the forced flexural response without damping

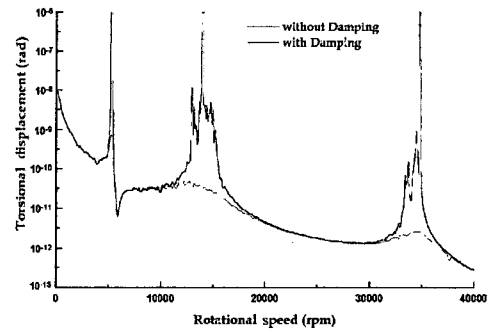


Fig. 10 The effect of the meshing damping on the forced torsional response

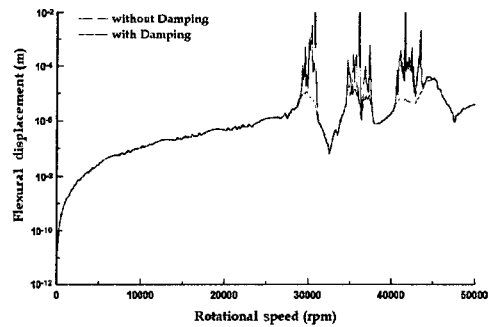


Fig. 11 The effect of the meshing damping on the forced flexural response

를 고려하지 않았을 때를 비교한 것이다. 그림에서 굵은 실선은 감쇠가 없는 경우이고, 가는 실선은 감쇠가 있는 경우이다. 감쇠가 있을 때는 고유진동수 전후에서 나타

나던 비선형성이 감소하고 변위도 감소하는 것을 볼 수 있다.

#### 4.2.2 구동기의 불균형력의 영향

Fig. 12와 Fig. 13은 기어물림부를 시변 물림강성을 갖는 스프링과 댐퍼로 모델링한 경우에 있어서 로터의 질량 중심의 편심량  $e$ 를 0~0.1 mm 까지 변화를 시키면서 비틀림에 대한 강제진동의 응답의 변화를 본 것이다.

그림에서 편심량이 증가하면서 그 변위량도 증가하는 것을 볼 수 있다. 그런데, 편심량  $e$ 가 0.025 mm 일 때를 기준으로 하여 편심이 없을 때와 비교해 보면 상당히 큰 변위량의 차이를 볼 수 있지만 편심량  $e$ 가 0.1 mm 일 때는 편심량이 약 4배 증가했지만 그 변위량의 차이는 편심이 없는 경우에 비해 상당히 작다. 이것은 편심이 생긴 경우는 편심되지 않은 경우에 비해 상당한 변위를 발생시키지만, 일단 편심이 생기면 편심의 양에는 비교적 적게 관

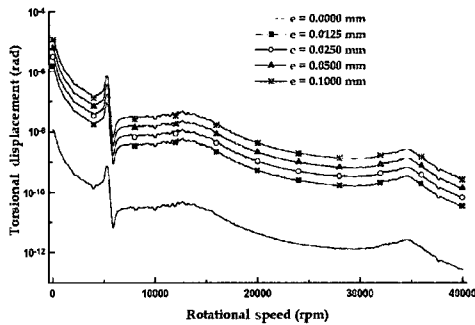


Fig. 12 The effect of the eccentricity of rotor on the forced torsional vibration with damping

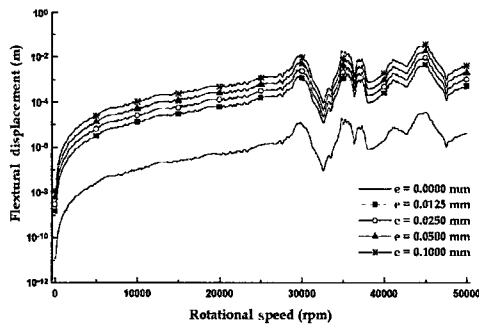


Fig. 13 The effect of the eccentricity of rotor on the forced flexural vibration with damping

계한다는 것을 알 수 있다.

#### 4.2.3 축각의 영향

1단 스퍼기어나 헬리컬기어장치의 경우는 2개의 축이 항상 같은 평면에 존재하게 되지만 2단의 경우에 축들이 이루는 평면은 임의의 각도로 배치시킬 수 있다. 이때, 각 기어쌍 사이의 전달법선하중의 크기는 변동이 없지만, 두 전달법선하중의 방향이 변하므로 베어링에 가해지는 분력의 크기에 변동이 생기고, 따라서 베어링의 스프링강성이 변한다.

이런 변동이 전체 기어장치에 미치는 영향을 보기 위해, Fig. 14와 같이 2단 기어장치의 3개의 축이 이루는 각도, 즉 축 1과 축 2가 이루는 평면과 축 2와 축 3이 이루는 평면 사이의 각을  $\delta$ 로 정의한다. 그림에서 음영된 3개의 원은 각 기어의 중심 축을 나타내며, 각 기어의 피치원을 2점 쇄선으로 표시하였다.

두 축이 이루는 각도에 따른 베어링 스프링 강성의 변

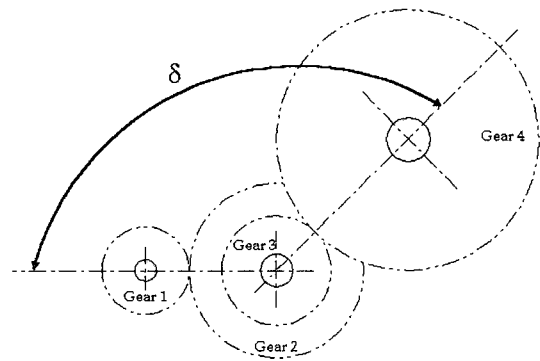


Fig. 14 Definition of the shafts angle  $\delta$

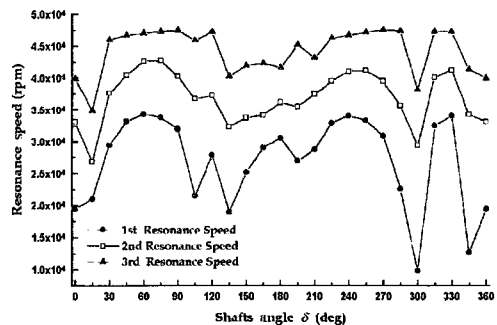


Fig. 15 The effect of the shaft angle  $\delta$  on the resonance speed

화를 고려해서, 축 1과 축 2가 이루는 평면을 기준으로 각도  $\delta$ 를  $15^\circ$  간격으로 증가시키면서 전체 시스템의 1~3차 고유진동수의 변화를 Fig. 15에 나타내었다. 그림에서 보면, 3개의 축이 이루는 각도  $\delta$ 가  $90^\circ \sim 150^\circ$ 인 경우와  $300^\circ \sim 360^\circ$  부근에서 1차 고유진동수가 다른 각도에 비해 다소 낮은 회전속도에서 나타나는 경우가 있는 것을 볼 수 있는데, 이것은 기어 1과 2의 기어쌍과 기어 3과 4의 기어쌍 사이의 두 전달법선하중의 합력의 크기의 변화로 베어링의 강성이 감소했기 때문이다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 이상과 같이 동력전달용 2단 기어장치의 진동특성을 명확히 하기 위한 모델링 방법을 제시하였으며, 이를 이용하여 향후 2단 이상의 다단기어장치의 명확한 진동해석을 수행할 수 있는 지침을 수립하였다.

이하 새로운 모델링 방법으로 2단 기어장치의 진동해석을 수행한 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 기어물림부분을 좀더 정확하게 해석하기 위해 물림 강성이 물림주기에 따라 변하는 시변스프링으로 모델링한 결과 평균 물림강성을 갖는 스프링으로 모델링하던 기존의 연구 방법에서는 나타나지 않았던 비선형성이 고유진동수 부근에서 나타났으며, 물림부의 감쇠를 고려했을 때는 이러한 비선형성과 변위가 감소함을 확인하였다.
- (2) 구동기 로터의 질량불균형이 2단 기어장치의 진동에 미치는 영향을 해석하여 회전중심으로부터 질량중심의 편심량과 진동특성과의 관계를 규명하였다.
- (3) 3개의 축들이 이루는 각도에 따른 고유진동수의 변동을 해석한 결과, 두 전달법선하중의 합력이 감소하는  $90^\circ \sim 150^\circ$  부근과  $300^\circ$  부근 및  $345^\circ \sim 15^\circ$  부근에서 1차 고유진동수가 상당히 낮아지는 경우가 발생하였다. 따라서, 2단 이상의 동력전달용 기어장치를 설계하거나 구동할 때 이러한 각도의 영향을 고려하는 것이 시스템의 진동성능을 향상시킬 수 있음을 알 수 있었다.

## 후 기

이 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음

## 참 고 문 헌

- (1) 김하수, 김동우, 양성모, "중간축을 고려한 기어구동 장치의 신뢰수명 평가", 한국공작기계학회지, Vol. 9, No. 4, pp. 147~153, 2000.
- (2) UMEZAWA, Kiyohiko, "齒車の振動 騒音とその対策", 機械設計, Vol. 26, No. 3, pp. 37~42, 1982.
- (3) IIDA, TAMURA, KIKUCHI and AGATA, "齒車軸の曲げとねじりの連成振動 (第1報)", Transactions of the JSME, Vol. 46, No. 404, pp. 375~382, 1980.
- (4) IWATSUBO, ARII, and KAWAI, "齒車で連結される回轉軸の曲げねじり連成振動", Transactions of the JSME, Vol. 49, No. 442, p. 929, 1983.
- (5) A. Kahraman, "Effect of Axial Vibration on the Dynamics of a Helical Gear Train", Transactions of the ASME Journal of Vibration & Acoustics, Vol. 115, pp. 33~39, 1993.
- (6) IIDA, TAMURA, and YAMAMOTO, "Dynamic Characteristics of a Gear Train System with Softly Supported Shafts", Bulletin of JSME, Vol. 29, No. 252, pp. 1811~1816, 1986.
- (7) IIDA, TAMURA, and OONISHI, "Coupled Torsional-flexural Vibration of a Shaft in a Geared System", Bulletin of JSME, Vol. 28, No. 245, pp. 2694~2698, 1985.
- (8) A. Kahraman, "Dynamic Analysis of a Multi-Mesh Helical Gear Train", Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp. 706~712, 1994.
- (9) 정태형, 명재형, "헬리컬 치차의 접촉상태와 치차성능추정법에 관한 연구", 대한기계학회논문집, Vol. 22, No. 10, pp. 1884~1893, 1998.
- (10) W. S. William, "Mechanical Vibration", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1964.
- (11) E. P. Gargiulo, "A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness", Machine Design, pp. 107~110, 1980.