

Optimum Design of Electrical Apparatus Using Design Variable Parametrization

李 享 範* · 朴 日 韓** · 韓 松 曄***

(Hyang-Beom Lee · Il-Han Park · Song-yop Hahn)

Abstract - In this paper, the optimum design of electrical apparatus using design variable parametrization is presented. For analysis and design, the finite element method and the design sensitivity method is used, respectively. By applying the parametrization of the design variables, the obtained designed shape is continuous and smooth. For the parametrization the Bezier spline is used. The designed shape with parametrization is characterized by the control points. By delivering control points to the commercial CAD packages or NC machines, the exact designed shape can be realized in the manufacturing the electrical apparatus. The designed results with and without parametrization are compared and the validity of the parametrization is verified.

Key Words : Sensitivity, Optimization, Parametrization, Finite Element Method, FEM, Bezier Spline

1. 서 론

인간의 생활이 윤택해지고 산업이 발달함에 따라 새로운 설계의 전기기기에 대한 수요가 계속 늘고 있다. 전기기기 및 전기기기를 부속품으로 사용하는 제품들이 소형화, 경량화, 정밀화, 고성능화, 고효율화 등이 진행됨에 따라 새로운 설계를 계속 수행해야만 한다. 또한, 새로운 재료에 대한 연구 및 개발이 진행됨에 따라 설계를 새로 하여야 하는 경우도 많다.

전기기기의 설계에 대한 연구는 전기기기의 역사만큼이나 긴 역사를 가지고 있으며, 최근에도 많은 방법들에 대한 꾸준한 연구들이 진행되고 있다. 크게 나누어 보면 등가회로를 이용한 전기기기의 특성해석을 통한 설계와 전자기 수치해석을 이용한 전기기기의 특성해석을 통한 설계 등이 있다. 특히 형상설계에 있어서 형상을 조금씩 변화시키면서 새로운 설계를 수행하게 되는데, 확률적인 방법을 통한 형상의 변화, 민감도계산에 의한 형상의 변화 등 많은 방법들에 의하여 설계가 진행되고 있다. 본 논문에서는 이들 중 민감도 해석을 이용하여 최적형상설계를 수행하는 경우에 대하여 살펴보았다[1].

설계의 최종적인 목표는 설계과정을 통하여 얻어진 설계 결과를 이용한 제품의 생산이다. 따라서, 설계가 끝난 후의 중요한 점은 설계된 자료를 상업용 CAD 프로그램이나 NC 머신(numerical control machine)과 같은 가공기계에 어떻게

전달하는 가이다. 민감도 방법에 의해서 설계를 하는 경우 목적함수를 만족하는 설계는 되지만, 가공의 측면에서 보는 부드러운 표면형상은 고려되지 않는다. 최악의 경우 인접한 설계변수에서 민감도의 방향이 반대로 계산되고 이 때의 민감도에 의한 목적함수가 감소되는 방향이면 설계되는 형상은 톱니모양이 될 수도 있다. 즉, 최종 형상이 가공이 용이한 부드러운 형상이 아닌 가공이 힘든 요철모양으로 설계될 수가 있다. 따라서, 본 논문에서는 이러한 현상을 방지하기 위하여 민감도를 이용한 최적형상설계기법에 매개화과정을 도입하였다. 매개화 과정은 설계변수외에 제어점(control point)을 정의하여 설계변수에서 계산된 민감도로부터 제어점의 민감도를 계산하고, 그 값으로부터 설계되는 형상을 구현하는 것이다. 컴퓨터그래픽 및 수치해석분야에서 많이 사용되는 보간법으로는 다항식을 이용한 보간법, hermite 스피라인, 큐빅 스피라인(cubic spline), 베지어스프라인(Bezier spline), B-스프라인(B-spline) 등이 있다. 본 논문에서는 매개화를 위하여 베지어스프라인을 사용하였다[2]. 이 방법을 사용하여 최종 설계된 형상을 상업용 CAD프로그램 또는 NC 머신에서 구현하기 위하여 제어점만을 전달하게 되면 최종 설계된 부드러운 형상을 완벽하게 제품을 생산하는 과정에서 구현할 수 있게 된다. 기존의 방법에서는 최종설계 변수값을 모두 CAD 프로그램이나 NC 머신에 전달하더라도 인접한 설계변수사이를 직선으로 근사하기 때문에 매개화를 하는 경우와 비교하여 근사화된 결과를 전달하게 되는 것이다.

본 논문에서 제안한 매개화의 타당성을 살펴보기 위하여 정전계문제에서 원하는 전계를 얻기 위한 예제를 수행하였다. 매개화를 수행하지 않은 경우 및 매개화를 수행한 경우의 결과를 비교검토 하였다. 또한, 제어점 개수의 변화에 따른 영향을 살펴보았다.

* 準 會 員 : 崇 實 大 電 氣 制 御 系 統 工 學 部 助 教 授

** 正 會 員 : 成 均 館 大 電 氣 電 子 及 計 算 機 工 學 部 副 教 授

*** 正 會 員 : 成 均 館 大 電 氣 工 學 部 教 授

接受日字 : 2001年 5月 29日

最終完了 : 2001年 10月 29日

2. 매개화를 이용한 형상최적설계

2.1 유한요소법을 이용한 민감도 해석

민감도해석을 이용한 전기기기의 최적형상설계는 형상의 변화에 따른 목적함수의 민감도를 계산하여 형상의 변화량을 계산하고 이 변화량에 따른 적절한 형상의 변화를 통해서 목적함수를 최소화시키는 형상을 찾는 것이다. 전기기기의 형상최적화 문제는 보통 목적함수가 설계변수에 대하여 비선형성(nonlinearity)이 크고 음함수(implicit function)이기 때문에, 민감도 해석을 이용한 반복적인 탐색방법을 주로 사용한다. 민감도는 설계변수에 대한 성능(performance)의 상대적인 변화로 정의되며, 수학적으로는 설계변수에 대한 목적함수의 전미분(total derivative)으로 표현된다. 정확한 민감도의 계산은 형상최적화문제의 수치적 모델링에서 기본적인 이고도 중요한 단계이다.

유한요소법에 기초한 민감도 계산방법에서의 설계변수와 목적함수는 행렬방정식으로 표현되는 상태방정식에 의하여 연결되어 있다. 유한요소법을 이용하여 주어진 시스템을 이산화하고 행렬방정식으로 표현되는 유한차원화된 상태방정식을 구성한 다음, 그 상태방정식을 이용하여 설계변수에 대한 목적함수의 민감도를 구하게 된다. 최적화 대상의 초기 설계치가 주어졌을 때 이를 해석하기 위하여 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 행렬방정식으로 표현되는 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$[K][x] = [f] \tag{1}$$

여기서 $[K]$, $[x]$, $[f]$ 는 각각 시스템 행렬(system matrix), 상태변수벡터(state variable vector), 구동벡터(forcing vector)이다.

최적설계를 위하여 기기의 성능을 결정하는 기준으로서 목적함수를 정의한다. 전기기기의 설계를 위한 기준으로서의 목적함수 F 는 일반적으로 설계변수와 시스템 상태변수의 함수로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F = F[p, x(p)] \tag{2}$$

여기서 $[p]$ 는 설계변수벡터(design variable vector)이다. 위 식에서 상태변수벡터 $[x]$ 는 설계변수에 따라 바뀌기 때문에 또한 설계변수의 함수이다. 또한, 상태변수와 설계변수의 관계는 식 (1)의 상태방정식을 통해서 얻어진다.

주어진 제한 조건 하에서 목적함수의 최소값 또는 최대값을 갖도록 하는 설계변수를 찾는 것이 최적화 기법인데 본 민감도 해석법에서는 설계변수의 변화에 따른 목적함수의 변화율 즉 민감도를 계산하고 이를 이용하여 형상설계를 하게 된다. 설계변수에 대한 목적함수의 변화율은 수학적으로 전미분(total derivative)의 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + \frac{\partial F}{\partial [x]} \frac{d[x]}{d[p]} \tag{3}$$

위 식에서 우변 첫항은 상태변수를 일정하게 놓은 상태에서 설계변수만에 의한 목적함수의 변화율이고 우변 둘째 항은 설계변수를 일정하게 놓은 상태에서 상태변수만에 의한 목적함수의 변화율을 나타낸다. 목적함수는 설계변수와 상태변수의 양함수(explicit function)이기 때문에 우변 첫항과 둘째 항의 앞항은 쉽게 얻어진다. 그런데 우변 둘째 항의 뒷항은 상태변수와 설계변수의 관계로부터 얻어지며, 둘 사이의 관계는 상태방정식으로 주어지는데, 이는 상태변수가 설계변수의 음함수(implicit function)의 형태로 표현되어 있다. 따라서 식 (3)의 둘째 항의 뒷항을 얻기 위해서는 식 (1)의 양변에 미분을 취하여 계산한다. 그 결과는 다음과 같다.

$$\frac{d[x]}{d[p]} = [K]^{-1} \frac{\partial}{\partial [p]} [[f] - [K][\hat{x}]] \tag{4}$$

여기서 $[\hat{x}]$ 는 식 (1)의 해로 설계변수에 대해서 불변(constant)이다. 식 (4)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]} [[f] - [K][\hat{x}]] \tag{5}$$

$$[K]^T [\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [x]}^T \tag{6}$$

식 (5)를 계산하면 주어진 목적함수에 대한 민감도를 구할 수 있다. 식 (6)은 식 (5)를 위한 보조변수식(adjoint variable equation)으로 계산의 용이성을 위하여 도입하였다.

수치해석기법으로 본 논문에서 사용되는 유한요소법을 이용하여 유도된 유한차원화된 상태방정식을 이용하여 민감도를 구한 후, 계산된 민감도를 이용하여 최적화 과정에서 설계변수를 변화시키는 과정을 반복하게 된다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[p_{i+1}] = [p_i] + [\Delta p_i] \tag{7}$$

여기서 $[p_{i+1}]$ 은 새로운 설계변수 벡터이고, $[p_i]$ 는 현 단계에서의 설계변수 벡터이다. 그리고 $[\Delta p_i]$ 는 탐색방향(search direction)과 진행거리(step size)의 정보로부터 구할 수 있다.

주어진 설계치에서 최적해를 찾는 반복해는 현재 설계치에서 방향벡터와 진행거리를 결정하는 문제인데, 본 논문에서 사용된 최대경사도법은 각 반복계산에서 최대경사를 탐색방향으로 택하고 각 반복계산마다의 진행거리는 목적함수를 설계변수에 대하여 선형화 함으로써 최적의 진행거리를 구하는 방법으로, 다음과 같은 정규화된 탐색방향벡터(normalized search direction vector)를 이용하였다[3].

$$[n] = \frac{-\frac{dF}{d[p]}}{\left\| \frac{dF}{d[p]} \right\|} \tag{8}$$

진행거리는 다음 식으로 표현된다.

$$l = \frac{F}{\left\| \frac{dF}{d[p]} \right\|} \quad (9)$$

따라서 식 (8)과 식 (9)를 이용하여 식 (7)을 다시 쓰면

$$[p_{i+1}] = [p_i] - \frac{F - \frac{dF}{d[p]}}{\left\| \frac{dF}{d[p]} \right\|^2} \quad (10)$$

위 식 (10)에서처럼 현 단계에서의 민감도와 목적함수값을 계산하면 새로운 설계변수벡터를 구할 수 있다.

2.2 매개화를 이용한 최적설계

설계변수의 결정은 최적화의 성공에 상당한 영향을 미친다. 만일 설계변수를 모델의 움직이고자 하는 절점들과 일대일 대응시켰을 때 최악의 경우 민감도 계산에 의해서 얻어지는 형상이 가공하기 쉬운 형상이 아닌 요철이 심한 톱니 모양의 형상이 될 수 있다. 이는 인접한 설계변수에서 계산된 민감도의 방향이 반대이면서 목적함수의 값이 감소되는 방향일 때 나타날 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 설계변수에서 계산된 민감도대로 움직이는 것이 아니라 설계되는 형상이 직선 또는 곡선의 형상을 가져야 한다는 등의 제약조건을 주어야 한다. 이러한 제약조건으로 본 논문에서는 매개화를 도입하였다. 설계변수(design variable)외에 제어점(control point)을 도입하고, 설계변수와 제어점사이를 매개화(parametrization) 시키는 것이다. 매개화는 일반적으로 보간함수를 이용하여 정의할 수 있다. 컴퓨터그래픽 및 수치해석에서 많이 사용하는 보간함수로 다항식함수, Hermite 곡선, 큐빅 스피라인, 베지어스프라인, B-스프라인 등이 있으며, 본 논문에서는 베지어스프라인을 사용하였다[2].

보간함수를 이용하여 설계변수와 제어점사이를 매개화시키면 다음과 같은 수식으로 표현할 수 있다.

$$[p] = [J][c] \quad (11)$$

여기서 $[p]$ 는 설계변수벡터(design variable vector), $[J]$ 는 매개함수관계행렬, $[c]$ 는 제어벡터(control vector)이다. 매개함수관계행렬은 보간함수행렬이라고도 할 수 있다. 만일 두점사이를 직선으로 매개화 시킨다면, $[c]$ 는 두 점이 되며, $[J]$ 는 직선보간함수행렬이 된다. $[p]$ 는 두 점을 잇는 직선이 된다. 형상최적설계를 수행하는 경우 실제 움직이는 점은 $[p]$ 가 되며, 이 $[p]$ 를 개별적으로 움직이도록 하여 최적화를 수행할 경우 각 절점이 독립적으로 움직이게 된다. 따라서, 각 점의 관계를 $[J]$ 를 통하여 유기적으로 정의하면, 제어벡터 $[c]$ 만을 제어함으로써 전체적인 형상설계 결과가 얻어지게 된다. 따라서, 이때의 민감도는 각 절점을 움직였을 때의 민감도가 아닌, 식 (12)와 같은 제어벡터를

이용한 민감도식으로 표현되어야 한다.

$$\frac{dF}{d[c]} = \frac{dF}{d[p]} \frac{d[p]}{d[c]} = \frac{dF}{d[p]} [J] \quad (12)$$

여기서, 매개함수관계행렬 $[J]$ 를 어떠한 것을 사용하는냐에 따라 최종적으로 얻어지는 형상이 달라지게 된다.

2.3 Bezier 스피라인

베지어스프라인은 컴퓨터그래픽스분야, 비행기의 날개 또는 자동차의 본체 등의 형상을 표현하는 산업계분야 등에서 많이 사용되고 있다. 이 방법은 피에르 베지어 (Pierre Bezier)에 의해서 개발되었다. 이 방법은 곡선 또는 곡면을 정의할 때 사용된다. 이 스피라인의 기저함수 (basis function)는 베지어기저(Bezier basis) 또는 Bernstein기저라고 하며, 조합(combination)에 의하여 정의된다. 이러한 기저의 특성 때문에 베지어스프라인은 다음과 같은 특징을 가지고 있다[2].

- 기저함수가 실수함수이다.
- 베지어곡선의 차수(order)는 제어점(control point)보다 1 만큼 적다.
- 시작점과 끝점의 기울기는 제어점다각형(polygon)의 처음 및 끝 직선의 기울기와 동일하다.
- 다각형으로 구성되는 컨벡스헐(convex hull) 내부에서 스피라인이 결정된다.
- 스피라인은 진동을 하지 않고, 제어점의 변화를 안정화시키는 특성을 가지고 있다.

n 개의 제어점을 가진 베지어스프라인은 수학적으로 다음과 같이 정의된다.

$$p(t) = \sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) c_i \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (13)$$

여기서 $p(t)$ 는 베지어스프라인 곡선, c_i 는 i 번째 제어점, $J_{n,i}(t)$ 는 n 차 기저함수(basis function)의 i 번째 항이다. 또한, t 는 계산하고자 하는 점의 위치이다. t 를 0부터 1까지 변화시켜 가면서 계산하고, 계산된 각 점을 이으면 보간곡선이 된다. 이때 $J_{n,i}(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i(1-t)^{n-i} \quad (14)$$

여기서 $\binom{n}{i}$ 는 조합(combination)을 나타내며, 다음 식과 같이 정의된다.

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-i+1)}{1 \times 2 \times \dots \times i} \quad (15)$$

또한 $J_{n,i}(t)$ 는 다음과 같은 특성을 가진다.

$$\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1 \quad (16)$$

이 베지어스프라인을 민감도계산에 적용하기 위하여 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$[p] = [t][M][c] = [J][c] \quad (17)$$

여기서 $[t]$ 및 $[M]$ 은 다음과 같다.

$$[t] = [t^n \ t^{n-1} \ \dots \ t^1 \ 1] \quad (18)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \binom{n}{0}\binom{n}{n}(-1)^n & \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{n}\binom{n-n}{n-n}(-1)^0 \\ \binom{n}{0}\binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} & \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-2}(-1)^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0}\binom{n}{0}(-1)^0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

식 (18)의 벡터 $[t]$ 는 구하고자 하는 보간곡선의 위치를 나타내는 벡터이며, 식 (19)의 행렬 $[M]$ 은 제어점의 수에 따른 행렬이다.

3. 2차원 정전계문제의 매개화를 이용한 형상최적설계

2차원 정전계를 표현하는 미분방정식은 맥스웰방정식으로 부터 다음과 같은 포아송방정식(Poisson's equation)의 형태로 유도된다[4].

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho_s \quad (20)$$

여기서 ϵ , ϕ , ρ_s 는 각각 유전율(permittivity), 전기스칼라포텐셜(electric scalar potential), 전하밀도(charge density)이다. 2차원 x-y 평면문제에서는 다음 식과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = -\rho_s \quad (21)$$

위 식 (21)에 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 전기스칼라포텐셜 ϕ 에 대한 상태방정식이 얻어진다.

$$[K][\phi] = [f] \quad (22)$$

여기서, 위의 요소행렬의 i 번째 행, j 번째 열의 값 및 구동벡터의 i 번째 행은 다음과 같다.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_i} \epsilon \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (23)$$

$$f_i^e = \int_{\Omega_i} \rho_s N_i dx dy \quad (24)$$

여기서, N_i 은 전역좌표계(global coordinate) (x, y) 에서 정의된 형상함수이다. 식 (23) 및 식 (24)의 계산 및 민감도계산을 위하여 국부좌표계(local coordinate) (u, v) 로 변환하자. Jacobian 행렬 $[G]$ 를 이용하여 정리하면 다음과 같다 [5]. 여기서 N_i 는 국부좌표계에서 정의되는 형상함수이다.

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_i} \epsilon \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy \quad (25)$$

$$= \int_{\Omega_i} \epsilon \left[\frac{\partial N_i}{\partial u} \quad \frac{\partial N_i}{\partial v} \right] [G]^{-1} [G]^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial u} \\ \frac{\partial N_j}{\partial v} \end{bmatrix} |G| du dv$$

$$f_i^e = \int_{\Omega_i} \rho_s N_i |G| du dv \quad (26)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$|G| = \det[G] = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (28)$$

식 (1)의 상태 방정식에서 상태변수 $[x]$ 는 정전장문제에서 전기스칼라포텐셜 $[\phi]$ 를 의미한다. 따라서, 민감도식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{dF}{d[p]} = \frac{\partial F}{\partial [p]} + [\lambda]^T \frac{\partial}{\partial [p]} [[f] - [K][\phi]] \quad (29)$$

$$[K]^T [\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [\phi]^T} \quad (30)$$

보조변수식 (30)의 구동항과 민감도식 (29)의 우변 첫항은, 설계목적에 따라서 목적함수가 다르기 때문에 주어진 목적함수에 따라 계산해서 적용해야 한다. 물론 목적함수는 상태변수와 설계변수의 양함수(explicit function)이므로 쉽게 계산된다. 따라서 민감도식 (29)에서 계산해야 할 항은 우변 둘째 항의 뒷항이다.

국부좌표계로 전환된 식 (25)과 식 (26)에서 변환되기 전의 전역좌표계에서의 절점위치에 대한 정보는 Jacobian행렬 $[G]$ 와 Jacobian $|G|$ 에만 포함되어 있다. 따라서 설계변수의 변화에 따라 계산되어야 하는 항목들은 식 (25)에서의 $[G]^{-1} [G]^{-T} |G|$ 및 식 (27)에서의 $|G|$ 이다. 주어진 요소망을 기반으로 $[G]^{-1} [G]^{-T} |G|$ 및 $|G|$ 에 대하여 설계변수에 대한 미분을 구하여 식 (29)에 대입하여 조합하게 되면 민감도식 (29)의 우변 둘째 항 뒷항이 얻어지고 민감도식의 계산은 완료된다.

4. 사례 연구

본 논문에서 제안한 방법의 타당성을 검증하기 위하여 정전장 문제를 이용하여 사례연구를 수행하였다. 설계대상은 그림 1과 같다. 해석영역의 크기는 750[mm] X 1000[mm]이며, 하단에 비유전율 3의 유전체가 있다. 상단에 1000[V], 하단에 0[V]의 전압을 인가하여 전장을 공간상에 형성시킨다. 유전체의 형상을 변화시켜서 공간상의 목적함수가 정의되는 부분에서 원하는 전장분포를 얻고자 하는 것이 목표다. 본 예제는 본 논문의 결과를 검증하기 위한 가상적인 예제이다.

해석모델의 상단으로부터 100[mm] 아래에서의 전장의 분포가 식 (31)과 같은 정현적인 분포를 갖도록 목적함수를 정의하였다.

$$E_o = 1250 + 200 \sin \left[\frac{(x+500)}{1000} * \pi \right] [V/m] \quad (31)$$

설계변수부분은 형상이 변화되는 부분으로 그림 1에서 "Movable Points"로 표현하였다. 설계변수의 수는 21개로 정의하였으며, 원으로 표시되어 있다.

본 논문에서는 목적함수가 정의되는 부분의 전계분포를 원하는 분포가 되도록 형상설계를 시도하였으므로, 원하는 전계분포가 되었을 때 목적함수의 값이 최소가 되도록 목적함수를 다음과 같이 정의하였다.

$$F = \sum_{i=1}^{n_0} (|E_i| - E_o)^2 \quad (32)$$

여기서 n_0 는 목적함수를 정의하는 점의 개수이며, E_i 는 목적함수가 정의되는 점에서의 전계의 세기, E_o 는 전계세기의 목표치이다.

식 (29) 및 식 (30)에서 목적함수의 편미분항과 보조변수 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial [p]} = 2 \sum_{i=1}^{n_0} (|E_i| - E_o) \frac{\partial |E_i|}{\partial [p]} \quad (33)$$

$$[K] [\lambda] = 2 \sum_{i=1}^{n_0} (|E_i| - E_o) \frac{\partial |E_i|}{\partial [\phi]} \quad (34)$$

식 (33) 및 식 (34)에서 $\frac{\partial |E_i|}{\partial [p]}$ 및 $\frac{\partial |E_i|}{\partial [\phi]}$ 는 식 (35)를 이용하여 계산하게 된다.

$$E = -\nabla \phi \quad (35)$$

매개화를 하지 않는 경우 식 (33)을 이용하여 민감도를 계산하면 된다. 이 경우 각 설계변수에서 계산된 민감도에 따라 각 설계변수는 목적함수가 최소화되는 방향으로 독립적으로 움직이게 된다. 매개화를 수행하는 경우 식 (33)에서 계산된 민감도 및 매개함수관계행렬이 계산되는 식 (17), 식

(18) 및 식 (19)를 식 (12)에 대입하여 제어점에서의 민감도를 계산한다. 이 민감도로부터 설계되는 형상을 구하여 설계를 진행하게 된다. 본 논문에서는 식 (13)으로 표현되는 베지어스프라인을 사용하여 설계변수와 제어점사이를 매개화하였다. 그림 1에서는 4차 베지어스프라인을 사용한 경우의 제어점의 위치를 화살표가 나타내고 있다. 4차이기 때문에 제어점의 수는 5개이며, 제어점은 균등하게 분포시켰다.

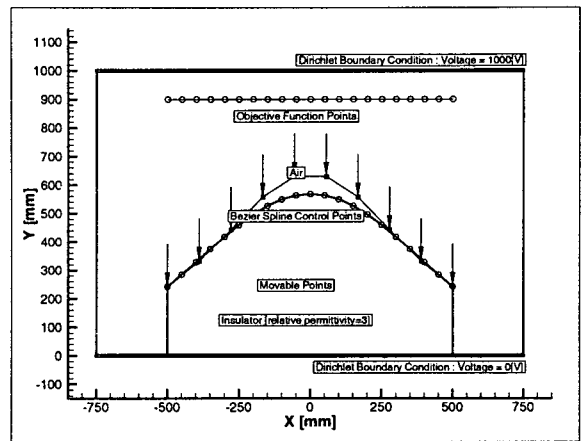


그림 1 설계 모델
Fig. 1 Model for design

매개화를 수행할 때 제어점의 영향을 살펴보기 위하여 3차, 4차, 5차 및 9차 베지어스프라인에 대하여 설계를 수행하였다. 그림 2에서는 초기형상에서의 등전위선 분포를 나타내었다.

그림 3에서는 최적설계를 수행한 경우의 최종 설계형상을 보여주고 있다. 그림 1에서 설계변수가 정의된 "Movable Points"로 표시된 부분만을 나타내었다. 매개화를 수행하지 않은 경우 및 매개화를 수행한 경우의 최종 설계된 형상을 비교하였다. 매개화를 수행한 경우 최종 설계된 형상이 상당히 부드러운 것을 살펴볼 수 있다. 차수(order)에 따라 설계된 형상이 조금씩 다르며, 이는 제어점의 수가 다르기 때문이다. 하지만, 전체적인 형상은 비슷하다. 매개화를 수행하지 않은 경우의 형상은 전체적으로 부드러운 질이 떨어지는 것을 볼 수 있다. 또한, 설계변수와 설계변수사이를 직선으로 연결하기 때문에 인접한 선분끼리 기울기가 심하게 다른 것을 볼 수 있다. 만일 이 형상대로 제작을 하는 경우 기울기가 달라지는 부분에서 전계의 집중이 심할 것으로 판단된다.

최적 설계된 결과를 사용 CAD 프로그램이나 NC 머신으로 전달할 경우, 매개화를 수행한 경우는 제어점만을 전달하면 되나 매개화를 수행하지 않은 경우에는 설계변수의 값을 모두 전달하여야 한다. 또한, 설계된 결과로부터 제품제작을 할 때, 매개화의 경우 제어점으로부터 설계된 형상을 완벽하게 구현할 수 있으나, 매개화를 하지 않은 경우 제어점들을 직선으로 연결하기 때문에 설계된 형상을 완벽하게 구현하기 힘들다.

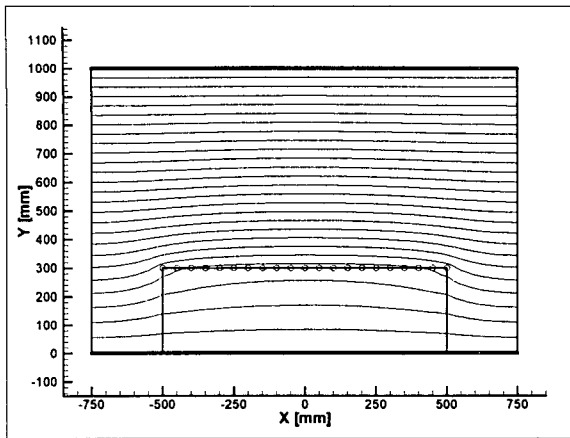


그림 2 초기형상에서의 등전위선 분포
Fig. 2 Equi-potential lines at initial shape

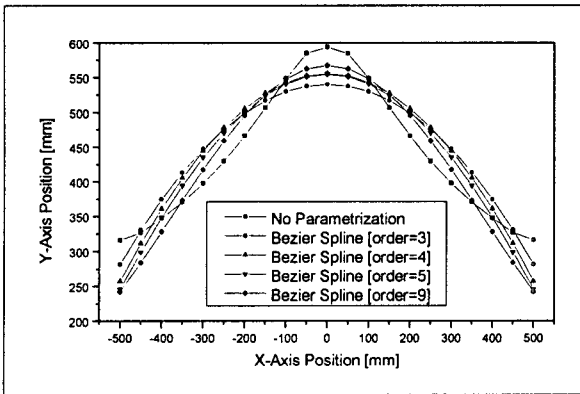


그림 3 최종 설계된 형상
Fig. 3 Designed shapes

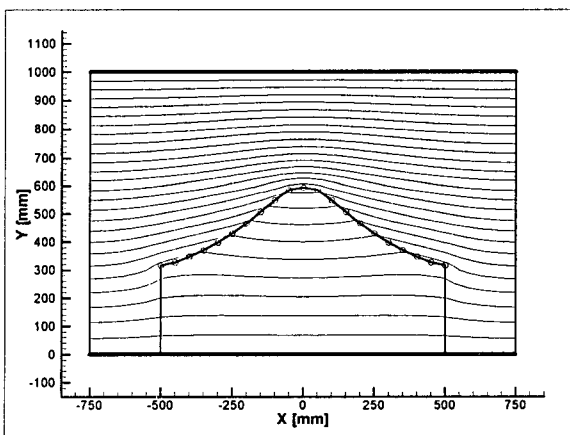


그림 4 매개화를 하지 않은 경우의 최종형상 및 등전위선 분포
Fig. 4 Designed shape and equi-potential lines (no parametrization)

그림 4 및 그림 5에서는 각각 매개화를 수행하지 않은 경우 및 매개화를 수행한 경우에 대하여 최종형상 및 그때의 등전위선 분포를 보여주고 있다. 그림 5에서는 베지어스프라인의 차수(order)가 각각 3, 4, 5, 9인 경우에 대하여 나타내었으며, 화살표를 이용하여 제어점의 위치를 나타내었다. 제어점의 수는 차수보다 1이 크다.

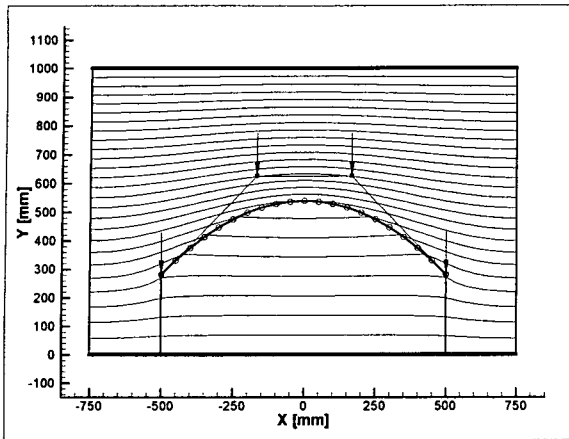
그림 6에서는 각 방법에 대하여 설계과정의 수행에 따른 목적함수값의 변화를 나타내었다. 모든 방법들이 잘 수렴하고 있음을 알 수 있다. 첫 번째 형상설계에서 목적함수값은 초기치에 비하여 20%, 2번째 형상설계에서는 약 8.7%, 3번째 형상설계에서는 약 5%이하로 되어 설계가 잘 되고 있음을 알 수 있다. 매개화를 수행하는 경우 각 설계변수에서의 값대로 절점의 형상을 변화시키지 않고 제어점을 통하여 형상설계가 이루어지므로, 매개화를 하지 않은 경우에 비하여 수렴속도가 더딘 것을 알 수 있다. 또한, 제어점의 수가 많을수록 수렴속도가 빨라지는 것을 그림에서 살펴 볼 수 있다.

그림 7에서는 매개화를 수행하지 않은 경우에 대하여 형상설계과정중 목적함수 정의영역에서의 전장의 세기의 변화를 보여주고 있다. 큰 사각형 마크가 있는 곡선이 최종적으로 원하는 값인 목적함수값이다. 그림 8에서는 매개화를 수행한 경우의 결과를 보여주고 있다. 그림 7 및 그림 8에서 첫 번째 설계된 형상에서 두 번째 설계된 형상으로의 변화량보다는 두 번째 설계된 형상에서 세 번째 설계된 형상으로의 변화량이 훨씬 적은 것을 알 수 있다. 즉 그림 6에서 보여주듯이 목적함수의 값의 변화가 세 번째 설계된 형상까지 급격히 줄어들어 있음을 알 수 있다.

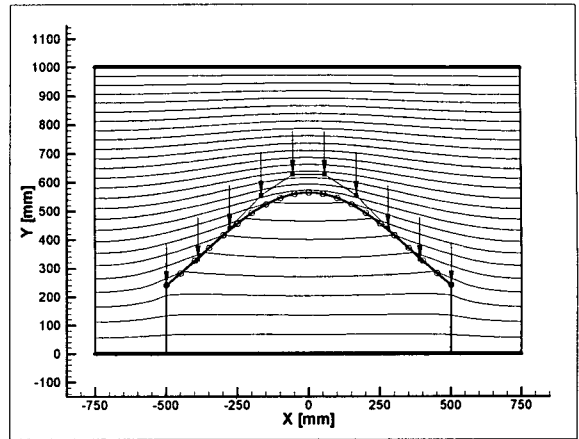
그림 9 및 그림 10에서는 각각 매개화를 수행하지 않은 경우 및 매개화를 수행한 경우에 대한 최적화 수행과정에서의 형상의 변화를 보여주고 있다. 즉, 설계변수의 변화를 보여주고 있다.

매개화를 수행하지 않은 경우의 결과를 살펴보면 처음 5번 정도의 형상설계과정에서 양 끝단에서 형상이 굽어져 있는 것을 볼 수 있다. 이러한 현상이 일어나게 되면 굽어진 부분에서 전계의 집중이 일어나기 때문에 바람직하지 않다. 상대적으로 매개화를 수행한 경우의 결과인 그림 10에서는 설계된 형상이 꺾여 있는 부분은 존재하지 않는 것을 살펴 볼 수 있다.

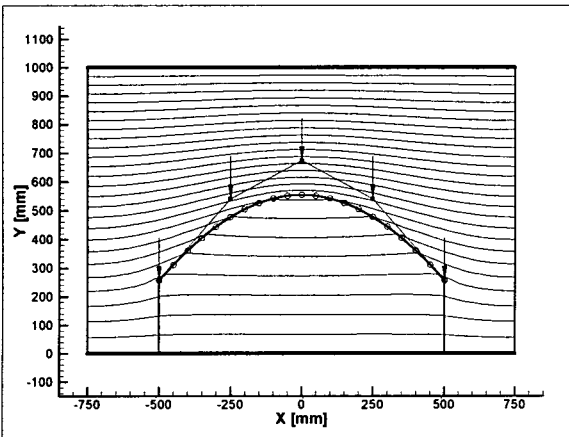
그림 11에서는 매개화를 수행한 경우에 대한 최적화 수행과정에서의 제어점의 위치변화를 보여주고 있다. 그림 11과 그림 10을 비교하면 베지어스프라인의 특징을 살펴볼 수 있다. 제어점들의 각 점을 잇게 되면 다각형이 구성되며, 이를 컨벡스헐(convex hull)이라 한다. 베지어스프라인에 의하여 생성되는 곡선은 반드시 이 컨벡스헐(convex hull)내부에 존재하게 되며, 그림 10 및 그림 11에서 이를 확인 할 수 있다. 또한 스피라인의 시작 및 끝부분에서의 기울기가 다각형의 시작 및 끝부분의 선분의 기울기와 동일하다는 것을 알 수 있다.



(a) 차수가 3인 경우
(a) order = 3



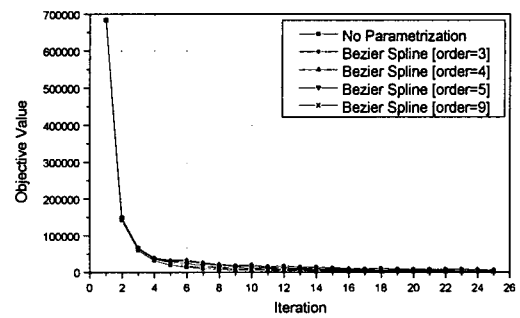
(d) 차수가 9인 경우
(d) order = 9



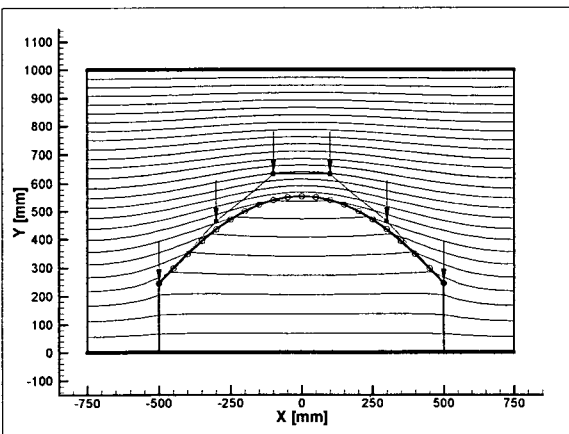
(b) 차수가 4인 경우
(b) order = 4

그림 5 매개화를 수행한 경우의 최종형상 및 등전위 선 분포

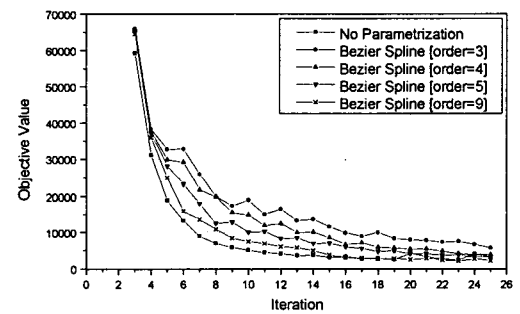
Fig. 5 Designed shape and equi-potential lines (parametrization)



(a) 초기치부터 최종설계까지의 목적함수의 변화
(a) Variation of the objective function



(c) 차수가 5인 경우
(c) order = 5



(b) 두번째설계부터 최종설계까지의 목적함수의 변화
(b) Variation of the objective function (from second iteration)

그림 6 목적함수의 변화

Fig. 6 Variation of the objective function

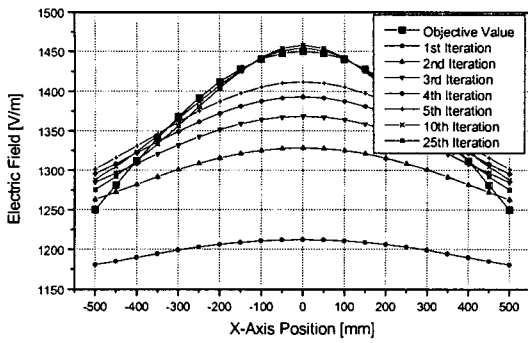
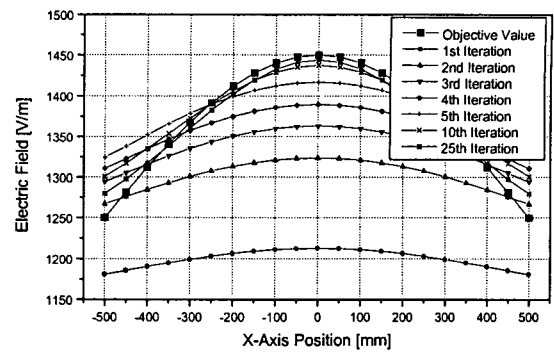
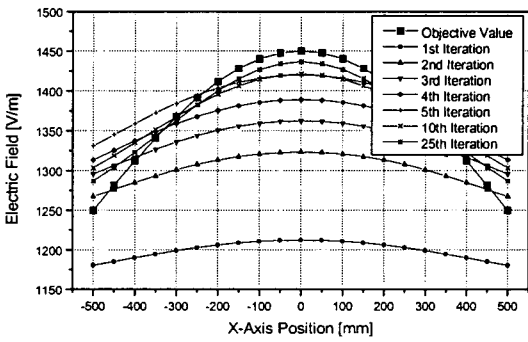


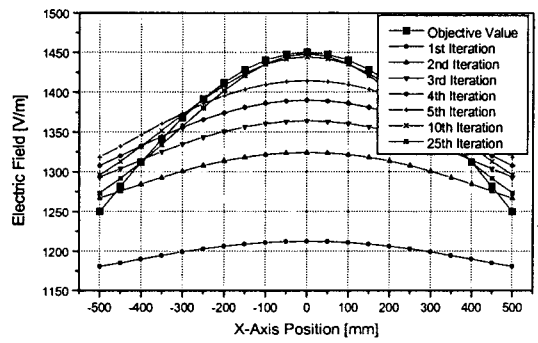
그림 7 매개화를 수행하지 않은 경우의 전장의 변화
Fig. 7 Variation of electric field (no parametrization)



(c) 차수가 5인 경우
(c) order = 5

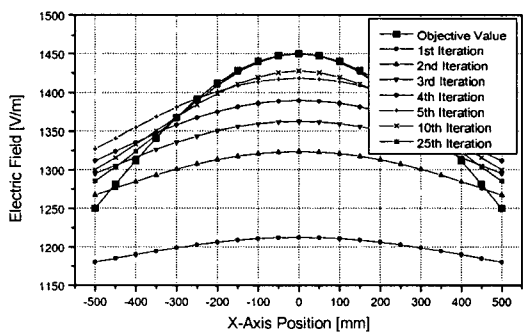


(a) 차수가 3인 경우
(a) order = 3



(d) 차수가 9인 경우
(d) order = 9

그림 8 매개화를 수행한 경우의 전장의 변화
Fig. 8 Variation of electric field (with parametrization)



(b) 차수가 4인 경우
(b) order = 4

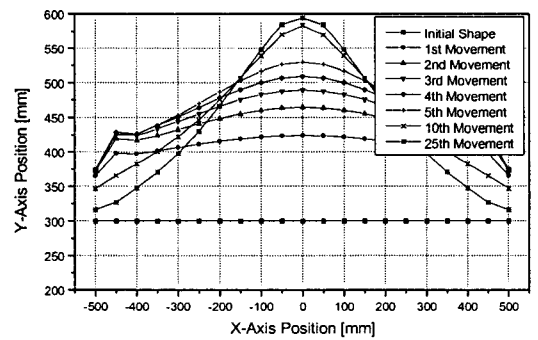
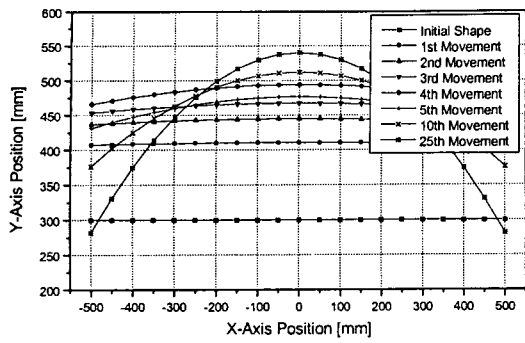
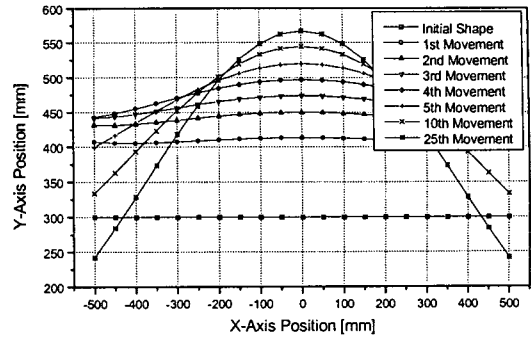


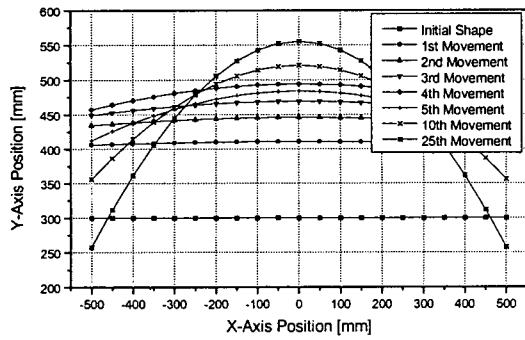
그림 9 매개화를 수행하지 않은 경우의 형상변화
Fig. 9 Shape variation (no parametrization)



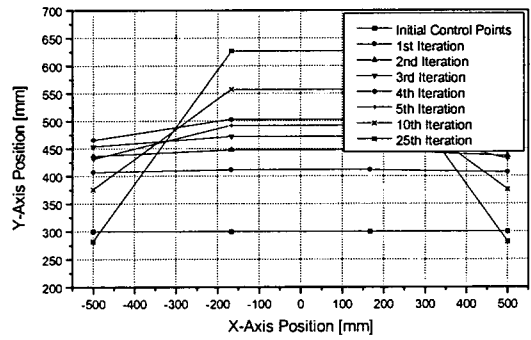
(a) 차수가 3인 경우
(a) order = 3



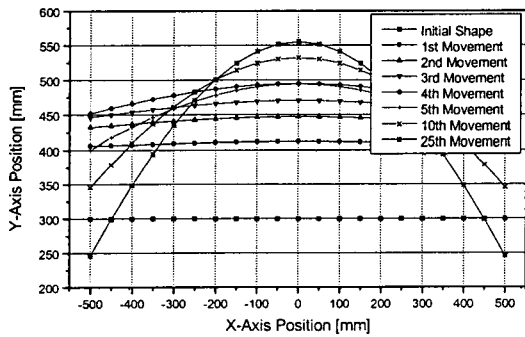
(d) 차수가 9인 경우
(d) order = 9
그림 10 매개화를 수행한 경우의 형상변화
Fig. 10 Shape variation (with parametrization)



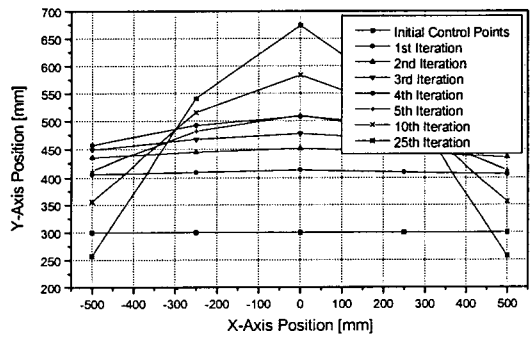
(b) 차수가 4인 경우
(b) order = 4



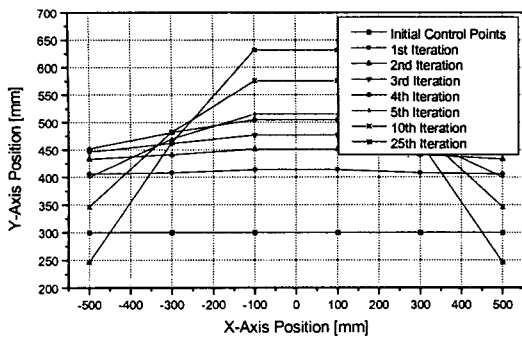
(a) 차수가 3인 경우
(a) order = 3



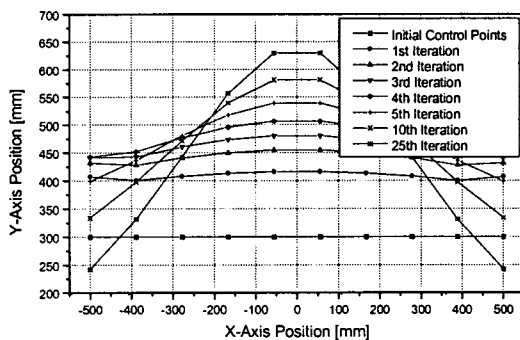
(c) 차수가 5인 경우
(c) order = 5



(b) 차수가 4인 경우
(b) order = 4



(c) 차수가 5인 경우
(c) order = 5



(d) 차수가 9인 경우
(d) order = 9

그림 11 매개화를 수행한 경우의 제어점의 변화
Fig. 11 Variation of control points (with parametrization)

5. 결론

본 논문에서는 매개화를 이용한 전기기기의 최적설계에 대하여 연구하였다. 매개화를 한 경우와 그렇지 않은 경우의 결과를 서로 비교하여 장단점을 비교하였다. 매개화를 하지 않은 경우 최적형상을 찾기 위한 목적함수의 감소가 빠른 반면, 매개화를 한 경우는 상대적으로 느린 수렴속도를 보였다. 하지만, 세 번 정도의 반복과정을 통하여 5%이내로 들어갔기 때문에 수렴속도는 거의 차이가 없다고 할 수 있다. 최종적으로 설계된 형상에서 매개화를 한 경우에서 매개화를 하지 않은 경우보다 부드러운 형상을 보여주고 있었다. 형상설계 후 CAD 프로그램과의 연계를 통하여 설계자료를 옮겨야 하며, 매개화를 한 경우는 매개화를 하지 않은 경우에 비하여 제어점만 넘겨주면 되므로 넘겨주는 자료의 양이 줄어들뿐더러 실제 기기제작시 설계형상을 완벽하게 재현이 가능하다. 따라서, 본 논문의 결과 컴퓨터를 이용한 형상설계를 상용 CAD 프로그램 또는 NC 머신과의 연결이 훨씬 실제에 가까워 졌다는 것을 알 수 있다.

감사의 글

이 논문은 1999년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음 (KRF-99-003-E00153)

참고 문헌

- [1] 박일한, 전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석, 서울대학교 박사학위논문, 1990.
- [2] D. F. Rodgers and J. A. Adams, Mathematical Elements for Computer Graphics, 2nd. ed., pp. 289-305, McGraw-Hill Publishing Company, 1990.
- [3] D. G. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming, 2nd. ed., pp. 214-220, Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [4] N. N. Rao, Elements of Engineering Electromagnetics, 4th ed., Prentice hall, 1994.
- [5] E. B. Becker, G. F. Carey and J. T. Oden, Finite Elements : An Introduction, Vol. 1, Prentice-Hall, 1981.

저 자 소 개



이 항 범 (李 亨 範)

1967년 10월 21일 생. 1989년 서울대 전기공학과 졸업. 1991년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1996년-1998년 군산대 전임강사. 1998년-현재 숭실대 전기공학과

교수.

Tel : 02-820-0641m, Fax : 02-817-7961

E-mail : hyang@saint.ssu.ac.kr



박 일 한 (朴 日 韓)

1960년 5월 7일 생. 1984년 서울대 전기공학과 졸업. 1986년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박사). 1991년-1992년 프랑스 그레노블공대 post-doc. 1998년-현재 성균관대 전기전자 및 컴퓨터공학부 부교수. 주 관심분야 : 전기기기 최적설계, 전자장 수치해석

Tel : 031-290-7146, Fax : 031-290-7179

E-mail : ihpark@yurim.skku.ac.kr



한 승 엽 (韓 松 暉)

1939년 3월 14일 생. 1963년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1968년 서울대 전기공학과 전임강사. 1979년 프랑스 로렌공과대학 대학원 졸업(공학박사). 1995년~1996년 당 학회 회장. 현 서울대 공과대 교수

Tel : 02-880-7246

E-mail : syhahn@plaza.snu.ac.kr