

# 특이기지함수를 이용하여 개선한 Mesh-free 균열해석기법

## An Improved Mesh-free Crack Analysis Technique Using a Singular Basis Function

이 상 호\*

Lee, Sang-Ho

윤 영 철\*\*

Yoon, Young-Cheol

(논문접수일 : 2001년 4월 26일 ; 심사종료일 : 2001년 9월 21일)

### 요 지

본 연구에서는 균열의 특이성과 불연속성을 Element-Free Galerkin(EFG) 법에 반영하기 위해 특이기지함수를 포함하는 확장항을 기존의 EFG 근사함수에 추가하고 균열면을 가로지르는 형상함수 구성시 불연속함수를 적용한 향상된 EFG 균열해석기법을 제안하였다. 기존의 EFG법이 균열선단주변의 특이응력장을 표현하기 위해 상당한 절점추가를 필요로 하지만 본 연구에서 제안한 기법은 절점의 추가나 해석모형의 수정이 필요 없다. 또한, 기존의 확장근사함수를 사용하는 EFG법이 계방정식의 크기를 상당히 증가시키는데 반해, 개선된 EFG 균열해석기법은 확장근사함수를 적용범위를 국소영역으로 제한하여 계방정식의 크기증가를 최소화하고서도 정도 높은 수치해를 얻었다. 수치예제는 제안된 기법의 향상된 면모와 효율성을 검증하여 준다.

**핵심용어** : EFG법, 균열해석기법, 특이기지함수, 불연속함수, 특이응력장

### Abstract

In this paper, a new improved crack analysis technique by Element-Free Galerkin(EFG) method is proposed, in which the singularity and the discontinuity of the crack are successfully described by adding enrichment terms containing a singular basis function to the standard EFG approximation and a discontinuity function implemented in constructing the shape function across the crack surface. The standard EFG method requires considerable addition of nodes near the crack tip to capture the asymptotic stress field near the crack tip, but the proposed technique does not need any addition of nodes or modification of the model. In addition, the proposed method significantly decreases the size of system of equation compared to the previous enriched EFG method by using localized enrichment region near the crack tip. Numerical examples show the improvement and th effectiveness of the previous method.

**Keywords** : EFG method, crack analysis technique, singular basis function, discontinuity function, singular stress field

### 1. 서 론

요소를 이용하지 않고 절점들간의 상관관계를 이용하여 해를 찾는 Mesh-free기법 중에서 Belytschko

등<sup>1)</sup>이 제안한 Element-Free Galerkin(EFG)법은 특히 균열전파문제를 다양하게 다루어왔으며, 파괴역학이론을 접목하여 균열성장문제를 정적으로 해석할 수 있는 기법<sup>2)</sup>과 시간영역에서 동적균열전파문제를 해

\* 정희원 · 연세대학교 토목공학과, 부교수

\*\* 정희원 · 연세대학교 토목공학과, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2001년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

석할 수 있는 기법도 제안하였다.<sup>3)</sup> Fleming 등<sup>4)</sup>은 이미 알려진 균열주변 변위장에 대한 closed form 해로부터 추출한 기저함수를 이용하여 EFG 근사함수와 다항기저함수를 확장할 수 있는 몇 가지 방법들을 제안하는 한편, 균열면의 불연속성을 묘사하기 위한 기법이 균열선단 주변에서 EFG 형상함수를 과도하게 단절시키는 현상을 나타냈기 때문에 형상함수를 부드럽게 처리해주는 기법을 제안한 바 있다. 또한 Belytschko와 Fleming<sup>5)</sup>도 유사한 방법으로 EFG 근사함수를 확장하여 기존의 EFG법과 조합하는 기법을 제안하였는데 이 확장된 EFG법이 기존의 확장되지 않은 EFG법에서 정확하게 잡지 못하던 균열선단의 특이성을 성공적으로 잡아낼 수 있다는 장점을 부각시켰지만, 계방정식을 구성하는 과정의 복잡성, 상당한 수준으로 추가된 자유도로 인한 계산시간의 증가, 해석영역 전체에 대해 확장함수를 적용해야 하는 불편함, 균열선단의 영향이 미미한 영역까지 확장함수가 적용되는 비합리성 등이 단점으로 지적될 수 있었다. 또한, 최근에는 전형적인 유한요소법의 근사변위함수에 균열선단의 특이성을 표현할 수 있는 확장함수를 추가적으로 고려하여 요소망의 재구성을 최소화한 기법이 제안되었으며,<sup>7)</sup> 여기에 추가적으로 균열면의 불연속성을 반영시켜 줄 수 있는 불연속함수를 추가하고 요소망의 재구성 없이도 균열 전과현상을 해석할 수 있는 기법이 제안되기도 했다.<sup>8)</sup> 본 연구에서는 불연속함수를 이용하여 균열면의 불연속성을 편리하게 묘사해주는 동시에, 특이기저함수를 이용한 근사변위함수의 확장을 통해 균열해석의 정도향상을 도모하고, 확장된 근사변위함수의 적용범위를 균열선단 주변의 국소적인 영역으로 축소함으로써 계산의 효율성도 높일 수 있는 기법을 제안하고자 한다.

## 2. EFG 균열해석기법의 개요

### 2.1. 2차원 선형탄성문제를 위한 약형식

경계  $\Gamma(\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f)$ 에 의해 규정되는 2차원 영역  $\Omega$ 는 미소변위의 가정 하에서 선형탄성 구성방정식이 적용된다. 영역내의 임의의 점에서 지배방정식은 응력  $\sigma$ 와 체적력  $b$ 를 갖는 식(1a)과 같은 미분방정식 형태로 나타낼 수 있으며, 이 방정식은 식(1b)의 필수경계조건과 식(1c)의 자연경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1a)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (1b)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_f \quad (1c)$$

여기서, 위에 첨가된 ‘ $\bar{\quad}$ ’ 기호는 미리 규정된 경계값을 나타내고,  $n$ 은 영역  $\Omega$ 에 대한 단위수직벡터이며,  $\bar{t}$ 는 경계에 작용하는 규정된 표면력이다. 식(2a)와 (2b)는 근사해에 대해 ‘kinematically admissible’한 공간에서 근사해에 대한 시도함수(trial function) 공간, 시험함수(test function) 공간을 각각 나타낸다.

$$U = \{u \in H^1(\Omega) : u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u\} \quad (2a)$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (2b)$$

여기서,  $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\}$  이고, 이때  $L^2(\Omega) = \{u \in C^0 : \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty\}$  이다.

본 연구에서 다루는 문제는 결국 지배방정식을 만족시키는  $u \in U$ 를 찾는 과정이다. 구성방정식과 구속조건을 고려하고, 임의의 시험함수  $v$ 에 대해 지배방정식을 만족시키는 전체 계방정식에 대한 약형식은 식(3)과 같다.

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T(v) : D : \epsilon(u) d\Omega = \int_{\Omega} v^T \cdot b d\Omega + \int_{\Gamma_f} v^T \cdot \bar{t} d\Gamma \quad \forall v \in V \quad (3)$$

여기서,  $v$ 는  $H^1$ 공간의  $u$ 와 같은 공간을 갖는 시험함수이다.

### 2.2 이동최소제곱근사법

2차원 문제에 대한 EFG법은 이동최소제곱에 의한 근사법, 식(3)과 같은 지배방정식에 대한 약형식과 해석대상에 규정된 필수경계조건, 그리고 재료에 대한 구성방정식을 중요한 요소로 고려한다. EFG법에서 기준점  $x$ 를 중심으로 이웃한 절점들을 포함하는 영향영역(보간을 위한 compact support)내에서의 근사함수  $u^h(x)$ 는 이동최소제곱법에 의해서 다음과 같이 근사화될 수 있다.<sup>1)</sup>

$$u^h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ 는 임의의 차수를 갖는 다항기저함수이고,  $\mathbf{q}$ 는 이에 상응하는 미지의 절점변수이며  $m$ 은 다항기저함수의 개수를 의미한다. 각 절점에서의 미지계수는  $q_i$  가중함수가 곱해진 잔차를 최소화시키는 정적조건(stationary condition)을 이용해서 구할 수 있으며, 최종적으로 식(5a)와 같은 EFG 근사함수와 식(5b)의 형상함수를 얻을 수 있다. EFG 형상함수를 구성하는 행렬식  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 와  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 는 식(5c), (5d)와 같이 계산되며, 은 영향영역 내에 포함된 절점의 개수를 의미한다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_N} S_I(\mathbf{x}) u_I \quad (5a)$$

$$S_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}))_{jI} \quad (5b)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_N} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (5c)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = [w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \dots, w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_N}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{n_N})] \quad (5d)$$

### 2.3 가중함수

가중함수는 임의의 기준점의 영향영역 내에 포함된 절점들의 거리에 따른 상대적인 가중치를 결정하고 형상함수의 모양을 지배하기 때문에 이동최소제곱근사법에서 필수적이며 문제에 적합한 가중함수를 선택해 주어야 한다. 특히, 본 연구에서는 균열의 특이성을 표현하기 위해 근사함수에 추가된 특이기저함수로 인해 기존의 EFG법보다 고차의 형상함수를 사용하므로 가중함수의 영향은 더욱 커진다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 식(6a)와 같은 compact support를 갖는 지수함수를 가중함수로 사용하였으며, 그 미분치는 식(6b),

(6c)와 같다.

$$w(d_I) = \exp\left[-\left(\frac{d_I/d_{\max}}{\alpha}\right)^2\right], \quad d_I \leq d_{I\max} \quad (6a)$$

$$\frac{dw}{dx} = -2.0 \frac{x - x_I}{(\alpha \cdot d_{\max})^2} \exp\left[-\left(\frac{d_I/d_{\max}}{\alpha}\right)^2\right] \quad (6b)$$

$$\frac{dw}{dy} = -2.0 \frac{y - y_I}{(\alpha \cdot d_{\max})^2} \exp\left[-\left(\frac{d_I/d_{\max}}{\alpha}\right)^2\right] \quad (6c)$$

여기서,  $d_I = \sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2}$ 는 기준점에서 대상 절점까지의 거리,  $d_{\max}$ 는 영향영역의 크기,  $\alpha$ 는 가중함수의 팽창계수를 각각 의미하며, 그림 1에 본 연구에서 사용한 가중함수와 그 미분의 형상을 제시하였다.

한편, 영향영역의 크기는 이동최소제곱근사법에 의한 형상함수의 구성에 사용될 절점의 개수를 결정하기 때문에 적절한 크기로 잡아 주어야 한다. 즉, 형상

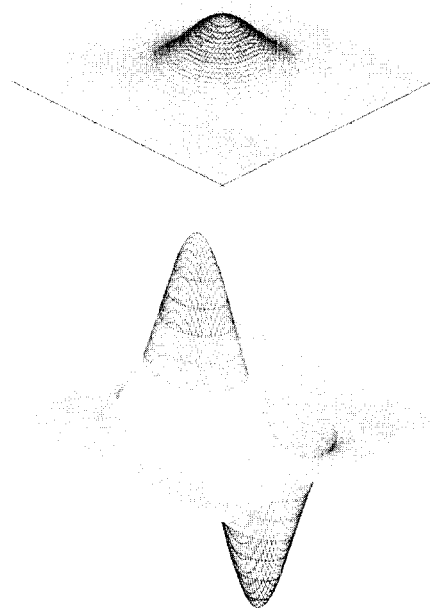


그림 1 지수함수형태의 가중함수(상)와 미분형상(하)

함수의 계산시  $A(x)$  행렬의 역행렬이 계산되도록 하기 위해 요구되는 최소한의 절점수 그 이상이 영향영역에 포함되도록 하여야 하며, 만약 절점들이 매우 가까운 거리에 위치하여  $A(x)$  행렬에서 행간 값들의 절대값의 차이가 매우 작은 경우에도 수치적으로 역행렬 계산이 불가능한 경우도 있다. 따라서 본 연구는 절점들의 배치된 밀도에 따라 자동적으로 그 크기를 변화시킬 수 있는 원형의 영향영역을 사용하였다.

**2.4 벌칙기법(Penalty method)을 이용한 필수경계조건의 처리**

EFG법의 형상함수가 Kronecker delta 조건을 만족시키지 못하기 때문에 필수경계조건을 완벽하게 처리하지 못하는 문제가 발생하는데<sup>6)</sup> 본 연구에서는 벌칙기법을 사용하여 이러한 문제를 처리하였다. 그 개념을 간단히 설명하면 다음과 같다. 식(1b)의 필수경계조건에 대해 시험함수  $v$ 를 곱해주고 약형식을 취하면 다음의 식과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{\Gamma_u} v^T \cdot u d\Gamma = \int_{\Gamma_u} v^T \cdot \bar{u} d\Gamma \quad (7)$$

여기에 약형식을 벌칙계수(penalty parameter)  $\beta$ 를 적용시키고 이산화하면 식(8a)을 얻을 수 있으며, 이 식은 다시 식(8b)과 같이 계방정식의 형태로 표현될 수 있다.

$$\left\{ \beta \int_{\Gamma_u} S^T S d\Gamma \right\} \{\bar{u}\} = \beta \int_{\Gamma_u} S^T \bar{u} d\Gamma \quad (8a)$$

$$\beta [K_{II}^{pen}] \{\bar{u}\} = \beta \{\bar{f}_I^{pen}\} \quad (8b)$$

이와 같이 필수경계조건을 처리하기 위한 최종 이산식(8b)는 3.2절에서 유도되는 최종적인 계방정식에 그대로 추가되어 해석에 반영된다.

**3. 불연속함수와 확장변위함수를 이용한 개선된 EFG기법**

**3.1 불연속함수**

본 연구에서는 해석대상 내에 존재하는 균열면의 불

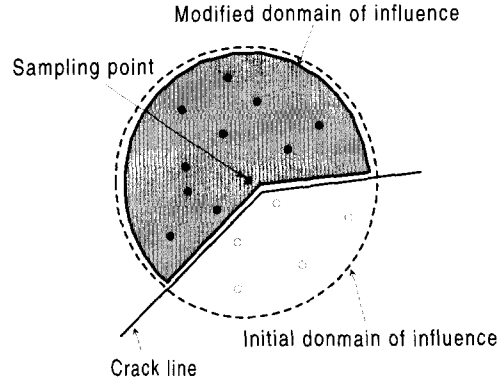


그림 2 균열에 의해 완전히 잘린 영향영역의 수정

연속성을 표현하기 위해 불연속함수를 이용하였는데, 그림 2와 같이 균열에 의해 기준점의 영향영역이 완전히 잘리는 경우, 형상함수를 계산할 때 불연속함수를 기준으로 균열반대편의 절점들의 영향을 배제함으로써 균열의 불연속성을 표현하였다.

절점이 기준점에 대해 균열 반대편에 있는지의 여부를 판단하기 위한 기준으로써 불연속함수를 사용하는데, 그림 3과 같이 임의의 균열선분들이 이루는 각에 대해 기준점과 이루는 각과 이웃절점이 이루는 각의 관계로부터 식(9)와 같은 두 개의 부호함수(sign function)를 정의할 수 있다.

$$G(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_\alpha / \theta_C \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_\alpha / \theta_C < 1 \end{cases} \quad \text{그리고,}$$

$$H(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_\beta / \theta_C \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_\beta / \theta_C < 1 \end{cases} \quad (9)$$

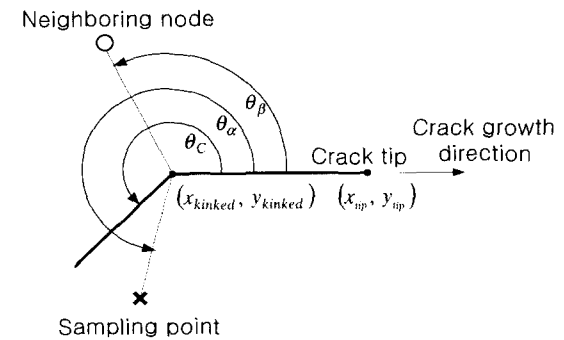


그림 3 불연속함수를 정의하기 위한 균열선분, 기준점, 이웃절점 사이의 관계각

두 개의 부호함수들의 곱으로부터 식(10)과 같은 불연속함수를 정의할 수 있는데, 이 함수의 값을 형상 함수 계산시 영향영역 내에 포함된 절점 중에서 균열면 대편에 위치하는 절점들을 판단하는 기준으로 사용하였다.

$$I(\theta) = G(\theta) \cdot H(\theta) \quad (10)$$

즉,  $I(\theta)$  가 1이면  $x_m \in I^{nbr}$  이고,  $I(\theta)$  가 -1이면  $x_m \notin I^{nbr}$  인데 이것은 불연속함수의 값이 1이면 해당 절점  $x_m$  이 균열면을 중심으로 기준점과 같은 편에 위치하기 때문에 형상함수의 구성에 포함시키고 -1인 경우에는 제외시킨다는 의미이다. 이때,  $I^{nbr}$  은 식(11)과 같이 정의하며  $N$ 은 해석영역내의 모든 절점이고,  $dist(x_l, \mathbf{x})$ 는 기준점에서 고려하는 절점까지의 거리이다.

$$I^{nbr} = \{x_m \in N : dist(x_l, \mathbf{x}) < d_{l_{max}}\} \quad (11)$$

### 3.2 확장된 근사함수와 계방정식

서론에서 언급하였듯이, Moës 등<sup>(8)</sup>은 기존의 유한 요소 근사함수에 불연속면을 표현하기 위한 함수와 특이성을 묘사하는 확장항을 추가하여 요소망의 재구성 없이 균열전파문제를 해석할 수 있는 기법을 제안하였다. 본 연구는 이 방법에서 이용한 근사함수 확장방법과 유사하게 EFG 근사함수를 확장하여 균열선단의 특이성을 표현하는 한편, 불연속함수를 이용한 형상함수의 수정으로 균열면의 불연속성을 모형화하는 기법을 제안하고자 한다.

균열선단주변에 대해 알려진 이론해로부터 추출한 특이기저함수  $g(\mathbf{x})$ 는 식(12)과 같이 정의할 수 있는데, 이 함수는 EFG 근사함수를 전체 해석영역에 걸쳐 확장시키기 위해 Fleming 등이 사용하였던 형태와 같다.<sup>(4),5)</sup>

$$g(\mathbf{x}) = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (12)$$

여기서,  $r$ 은 균열선단에서의  $\theta$  거리,  $\theta$ 는 균열면에 대한 각을 나타낸다. 기존의 EFG 근사함수에는 균열선단의 특이성을 표현할 수 있는 항이 없었지만, 본 연구에서는 EFG 근사함수에 식(13a)과 같이 특이기저함수를 포함한 확장항을 EFG 근사함수에 추가하여 균열선단

주변의 절점들에 적용함으로써 특이성을 표현할 수 있게 된다. 식(13b)에는 근사함수를 미분한 결과를 나타냈다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_N} S_l u_l + \sum_{l=k=1}^{n_k} \sum_{l=k=1}^4 \bar{S}_l g_k(\mathbf{x}) a_{lk} \quad (13a)$$

$$u^{h,i}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_N} S_{l,i} u_l + \sum_{l=k=1}^{n_k} \sum_{l=k=1}^4 [\bar{S}_{l,i} g_k(\mathbf{x}) + \bar{S}_l g_{k,i}(\mathbf{x})] a_{lk} \quad (13b)$$

여기서,  $S_l$ 와  $n_N$ 는 각각 기존의 EFG 형상함수와 영향영역 내에 포함된 이웃한 모든 절점들의 개수이며,  $\bar{S}_l$ ,  $n_E$ , 그리고  $a_{lk}$ 는 각각 개선된 EFG형상함수와 영향영역에 포함된 절점 중에서 확장된 형상함수를 적용하는 균열선단 근처의 절점들의 개수, 그리고 확장함수와 연관된 절점해이다.

지배방정식에 대한 약형식을 이산화하기 위한 변형률, 미소변형률, 시험함수는 각각 식(14a), (14b), (14c)와 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{T}} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{h}) \tilde{\mathbf{a}} \quad (14a)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}^T + \tilde{\mathbf{a}}_v^T (\bar{\mathbf{T}} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{S}} \mathbf{h})^T \quad (14b)$$

$$\mathbf{v}^T = \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{S}^T + \tilde{\mathbf{a}}_v^T \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{S}}^T \quad (14c)$$

여기서, 각각  $\mathbf{T} = \mathbf{S}_{,i}$ ,  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{S}}_{,i}$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{g}_{,i}$ , 인데 이 식들을 식(3)에 대입하면 계방정식은 유도될 수 있는데, 이때 약형식의 좌변과 우변에 대한 상세한 계산과정은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[ \tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{T}_i^T + \tilde{\mathbf{a}}_v^T (\mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{T}}_i^T + \mathbf{h}_k^T \bar{\mathbf{S}}_i^T) \right] \\ & \quad \cdot \mathbf{D} \cdot \left[ \mathbf{T}_j \tilde{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{T}}_j \mathbf{g}_i + \bar{\mathbf{S}}_j \mathbf{h}_i) \tilde{\mathbf{a}} \right] \, d\Omega \\ &= \tilde{\mathbf{v}}^T \left[ \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{T}_i^T \mathbf{D} \mathbf{T}_j \, d\Omega \right\} \{ \tilde{\mathbf{u}} \} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{T}_i^T \mathbf{D} (\bar{\mathbf{T}}_j \mathbf{g}_i + \bar{\mathbf{S}}_j \mathbf{h}_i) \, d\Omega \right\} \{ \tilde{\mathbf{a}} \} \right] \\ & \quad + \tilde{\mathbf{a}}_v^T \left[ \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{T}}_i^T + \mathbf{h}_k^T \bar{\mathbf{S}}_i^T) \mathbf{D} \mathbf{T}_j \, d\Omega \right\} \{ \tilde{\mathbf{u}} \} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{T}}_i^T + \mathbf{h}_k^T \bar{\mathbf{S}}_i^T) \mathbf{D} (\bar{\mathbf{T}}_j \mathbf{g}_i + \bar{\mathbf{S}}_j \mathbf{h}_i) \, d\Omega \right\} \{ \tilde{\mathbf{a}} \} \right] \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{S}_l^T + \tilde{\mathbf{a}}_v \cdot \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T) \mathbf{b} \, d\Omega \\
 &+ \int_{\Gamma_r} (\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{S}_l^T + \tilde{\mathbf{a}}_v^T \cdot \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T) \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \\
 &= \tilde{\mathbf{v}}^T \left[ \int_{\Gamma_r} \mathbf{S}_l^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{S}_l^T \mathbf{b} \, d\Omega \right] \\
 &+ \tilde{\mathbf{a}}_v^T \left[ \int_{\Gamma_r} \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T \mathbf{b} \, d\Omega \right] \quad (15b)
 \end{aligned}$$

식(15a)와 식(15b)로부터 식(16a)과 같은 최종적인 계방정식을 얻을 수 있으며 계방정식의 각 성분들은 식(16b)~(16f)와 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{IJ} & \mathbf{K}_{III} \\ \mathbf{K}_{III}^T & \mathbf{K}_{IIkl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_I \\ \tilde{\mathbf{f}}_{Ik} \end{Bmatrix} \quad (16a)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{T}_I^T \mathbf{D} \mathbf{T}_J \, d\Omega \quad (16b)$$

$$\mathbf{K}_{III} = \int_{\Omega} \mathbf{T}_I^T \mathbf{D} (\bar{\mathbf{T}}_J \mathbf{g}_l + \bar{\mathbf{S}}_J \mathbf{h}_l) \, d\Omega, \quad l=1, \dots, 4 \quad (16c)$$

$$\mathbf{K}_{IIkl} = \int_{\Omega} (\mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{T}}_l^T + \mathbf{h}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T) \mathbf{D} (\bar{\mathbf{T}}_J \mathbf{g}_l + \bar{\mathbf{S}}_J \mathbf{h}_l) \, d\Omega \quad (16d)$$

$k, l=1, \dots, 4$

$$\tilde{\mathbf{f}}_I = \int_{\Omega} \mathbf{S}_I^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} \mathbf{S}_I^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (16e)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{Ik} = \int_{\Omega} \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_r} \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{S}}_l^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (16f)$$

$k=1, \dots, 4$

식(16a)의 전체 강성도행렬은 이산화과정에서 같은 공간 내의 같은 형태의 시험함수와 시도함수를 선택하여 사용하였기 때문에 유한요소법과 마찬가지로 계방정식의 전체 강성도 행렬은 대칭조건을 유지하며, positive definite인 특성을 갖게 된다. 일반적으로 필수경계상의 절점에는 확장함수를 적용할 필요가 없으므로 필수경계조건을 만족시키기 위한 벌칙기법으로부터 얻어지는 추가적인 구속조건식, 식(8b)과 합성하면 다음과 같은 최종적인 계방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{IJ} & \mathbf{K}_{III} \\ \mathbf{K}_{III}^T & \mathbf{K}_{IIkl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} + \beta \left[ \mathbf{K}_{IJ}^{pen} \right] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} \right) \\
 &= \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_I \\ \tilde{\mathbf{f}}_{Ik} \end{Bmatrix} + \beta \left\{ \tilde{\mathbf{f}}_I^{pen} \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

벌칙기법을 적용한 후에도 전체 강성도행렬의 대칭성은 깨지지 않으며, 이론적으로는 벌칙계수  $\beta$ 가 큰 값을 가질수록 근사해가 참값에 근접하지만, 너무 큰 값을 사용하면 행렬의 조건수(condition number)가 나빠지므로 경험을 바탕으로 적절한 수준의 값을 사용해야 한다.

한편, 기존의 EFG법을 이용한 균열성장 모형화 기법과 다수의 피로균열성장해석에 관한 사항은 이상호와 윤영철<sup>9),10)</sup>을 참조할 수 있다. 본 연구에서 개선된 EFG 근사함수와 불연속함수를 이용하지만, 해석은 기존의 EFG법과 마찬가지로 역시 절점들만을 이용한다. 그러나 기존의 방법과 달리, 균열이 자라는 동안에도 절점의 재배치나 추가·삭제의 과정을 거치지 않고 정확도 높은 해석을 수행할 수 있다는 장점이 있다. 실제 수치예제의 해석에서 균열선단이 영향영역내에 포함되는 경우에는 부드러운 해를 얻기 위해 형상함수를 부드럽게 해주는 기법(smoothing technique)<sup>5)</sup>을 적용하였으며, 응력확대계수의 산정은 선형탄성과괴를 가정하므로 J-적분을 영역적분의 형태로 변환한 M-적분기법<sup>11)</sup>을 이용하였다.

#### 4. 수치해석예제

##### 4.1 균열을 갖는 문제에 대한 patch시험

균열문제와 같이 특이성을 갖는 문제의 검증은 일반적인 유한요소법에서 사용하는 patch시험 방법을 그대로 적용할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 이론해로 알려져 있는 모드 I에 대한 변위식<sup>12)</sup>인 식(18a)와 식(18b)를 이용하여 해석모형의 경계에 이론해의 변위값을 미리 규정하고 해석을 수행하여 해석모형 내부의 응력값을 역으로 검토하는 방법을 사용하였는데, 본 연구의 해석방법이 정확하다면, 이론해로 미리 규정한 변위에 의한 해석모형 내부의 응력값은 이론 응력해와 일치할 것이다.

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (18a)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (18b)$$

본 예제에서 그림 4(a)와 같이 균열의 선단은 좌표 (1.0a, 1.0a)에 위치하며 균열길이 a값은 단위값 1이고, 해석모형의 가로, 세로의 길이가 각각 2a이다. 응력확대계수는 단위값  $1 Pa\sqrt{m}$ 을 임의로 미리 규정하

였고 필수경계조건은 벌칙기법을 이용하여 만족시켜 주었으며 균열선단에 표시된 원은 확장된 근사변위함수가 적용될 영역을 나타낸다. 그림 4(b)는  $\theta = 0^\circ$ 인 인 경우의 수직방향응력값을 도시한 것으로, 기존의 EFG 해석기법이 균열선단 근처에서 응력의 특이성을 적절하게 표현하고 있지 못한 반면, 특이기저함수를 사용하여 개선된 EFG법으로 계산된 응력 profile은 이론해와 거의 정확하게 일치하고 있는 것을 보여주고 있다. 그림 5에는 수직방향응력에 대한 등고선도(contour)를 도시하였는데, 기존의 EFG 해석기법과 비교하여 볼 때, 응력집중으로 인한 균열선단의 특이성을 훨씬

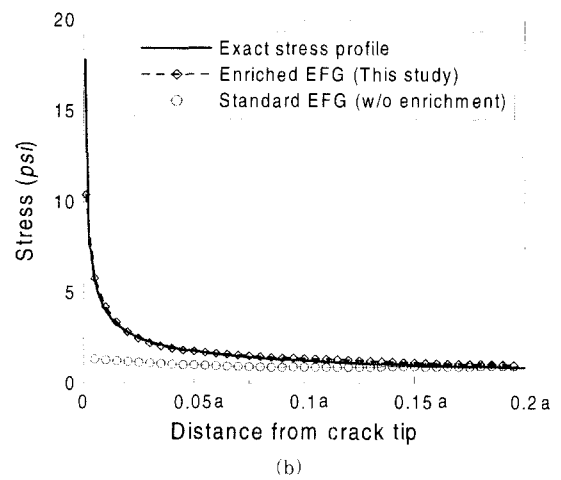
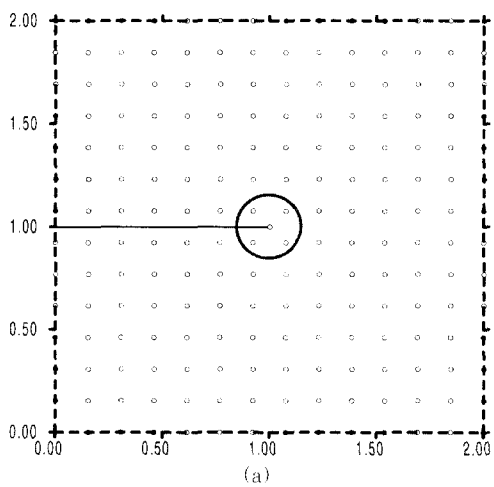


그림 4 균열문제의 patch 시험 (a)균열과 절점의 배치 및 확장근사함수 적용영역 (b)균열선단 앞쪽의 응력분포도 ( $\theta = 0, r > 0$ )

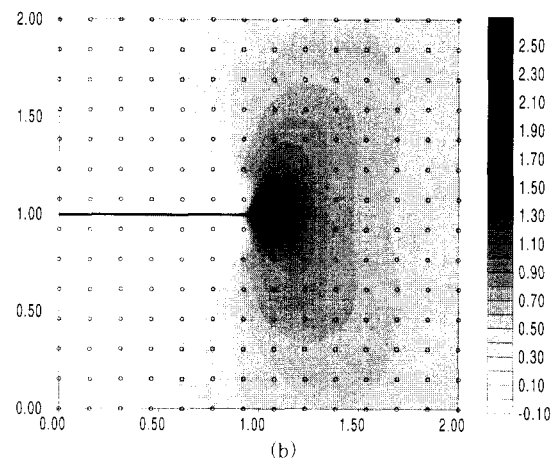
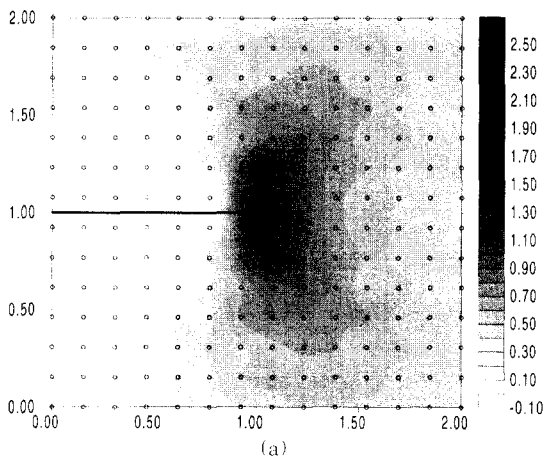


그림 5 균열선단 주변의 수직응력장 (a) 기존 EFG 해석기법 결과 (b) 개선된 EFG 해석기법 결과

더 효과적으로 묘사해 줄 수 있을 뿐만 아니라 좀더 부드러운 형상의 응력분포도가 얻어지는 것을 확인할 수 있다.

#### 4.2 모드 I 균열성장 문제

개발된 균열해석기법의 검증을 위해 수평한 편축균열을 갖고 하단의 수직변위가 구속되어 있는 평판에 1 psi ( $7.0 \times 10^{-2} \text{kgf/cm}^2$ )의 인장하중이 작용하는 문제를 해석하였다. 본 해석에서 탄성계수  $E$ 는  $3 \times 10^6 \text{psi}$  ( $42.6 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$ )이고 포아송비  $\nu$ 는 0.3을 사용하였다. 그림 6(a)에는 해석을 위한 절점의 배치와 부재의 형상과 치수, 확장함수가 적용된 영역이 도시되어 있다. 초기균열  $a$ 에서  $\Delta a$  만큼 성장하는 과정을 해석하였다. 그림 6(b)에는 균열의 성장에 따른 모드 I 응력확대계수값의 이론해에 대해 기존의 EFG 해석기법을 이용한 결과와 본 연구의 해석결과를 비교하여 나타냈다. 기존의 방법으로 얻은 응력확대계수값이 대체적으로 이론해보다 작은 값을 보이는데 반해, 특이기저함

수를 이용하여 근사변위함수를 확장시킨 개선된 EFG 해석기법을 이용한 결과는 특이성을 나타내는 이론해와 매우 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 표 1에는 균열의 길이에 따른 응력확대계수에 대한 상대오차를 비교하여 제시하였다.

모든 해석은 자동화된 균열진전해석 알고리즘을 바탕으로 해석 중간단계에서의 해석모형의 수정없이 수행되었다. 그림 7은 균열성장해석 중  $a = 3.5 \text{in}$ 인 상태에서의 수직응력의 분포를 나타낸 것인데 개선된 EFG 법이 균열선단근처의 응력집중현상을 더 잘 표현하고 있는 것을 확인할 수 있다.

수치예제의 수행을 통하여 다음과 같은 몇 가지 추가적인 사항을 확인할 수 있었다. 확장근사함수를 이용할 때에는 가중함수가 얼마나 compact한 형상을 갖고 있느냐 하는 것이 중요했다. 기존의 확장되지 않은 EFG 해석에서는 부드러운 형상의 가중함수를 주로 사용해 왔는데, 개선된 EFG법에서는 너무 부드러운 형상의 가중함수를 사용하면 오히려 해의 정도가 떨어지고 상당히 compact한 형태의 가중함수를 사용해야 정

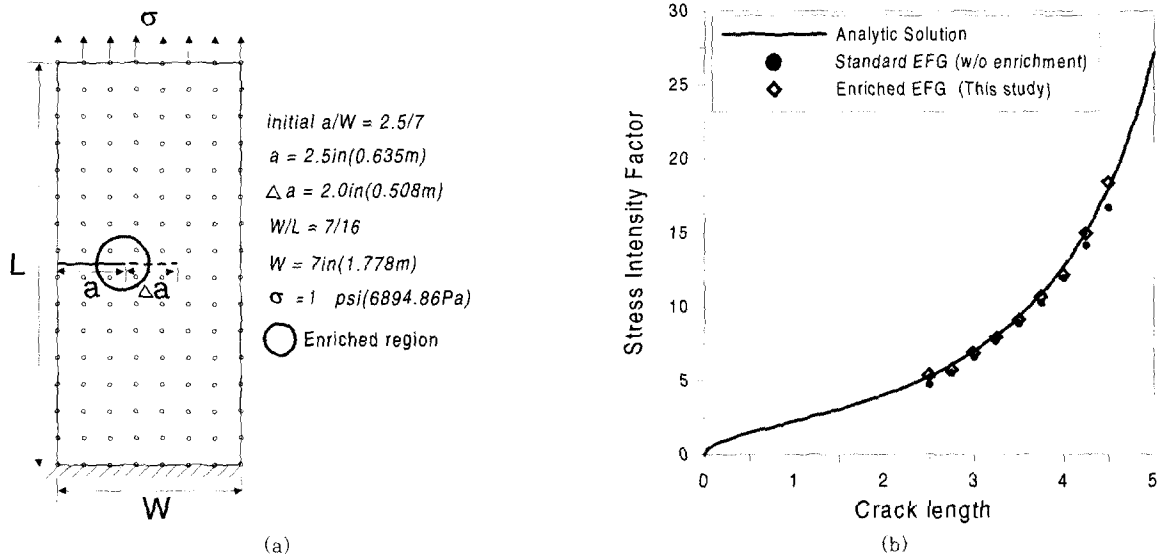


그림 6 모드 I 균열성장문제 (a)균열과 절점의 배치 및 확장영역 (b)균열성장에 따른 응력확대계수 비교

표 1 균열의 성장에 따른 응력확대계수의 상대오차(%) (단, 1in=0.255m)

Crack length (in)	2.50	2.75	3.00	3.25	3.5	3.75	4.00	4.25	4.50
Standard EFG	11.00	9.90	5.42	4.34	5.20	5.85	6.50	6.42	7.65
Enriched EFG	1.38	6.21	1.44	1.64	2.53	1.96	4.66	1.04	1.65



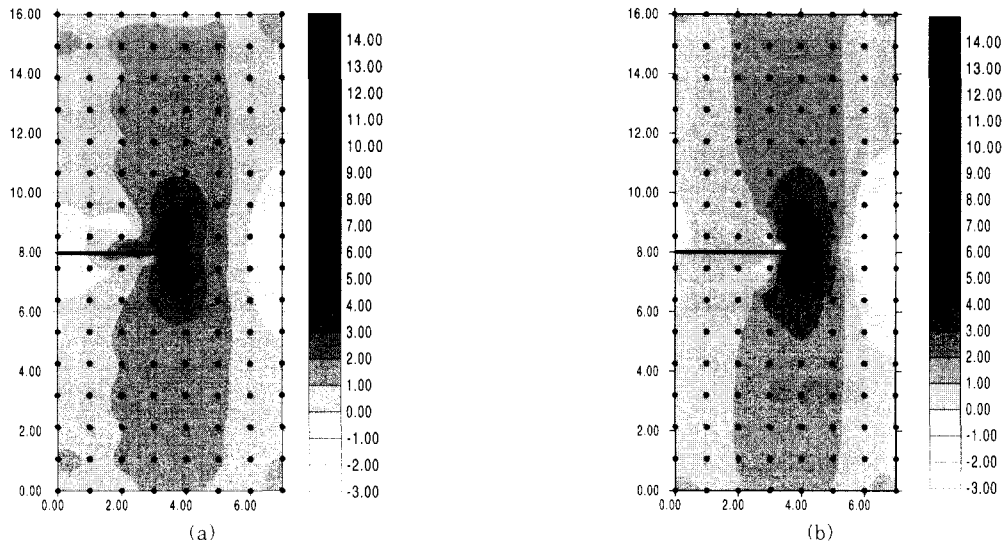


그림 7 모드 I 균열성장문제의 수직응력 분포도( $a=3.5in$ ) (a) 기존의 EFG법 결과 (b) 특이기지함수를 적용한 개선된 EFG법 결과

도 높은 해를 얻을 수 있었다. 이것은 근사함수에 추가된 특이기지함수를 포함하는 확장항이 고차의 거동을 보이기 때문에 부드러운 가중함수로는 이러한 특이성을 정확히 반영해주지 못하기 때문인 것으로 사료된다. 즉, 형상함수의 미분이 응력의 상태를 표현하게 되는데 그 안에 포함된 가중함수의 미분이 특이성을 보이는 응력을 표현할 수 있을 정도로 compact한 형상을 갖고 있어야 한다는 의미이다. 또한 영향영역의 크기도 기존의 확장하지 않은 EFG 해석에서 일반적으로 사용하던 것보다 1/2 이상 작은 영향영역을 사용하는 경우에 보다 정확한 해를 얻을 수 있었는데 이것은 해석시간의 단축면에서도 매우 고무적인 현상이라 할 수 있다. 특이기지함수를 사용하여 근사함수를 확장시킨 개선된 EFG 균열해석 기법에 있어서 가중함수의 종류와 영향영역의 크기에 따른 해의 정도 비교에 관한 연구는 추후의 연구에서 자세하게 다루어 질 예정이다.

### 5. 토론 및 결론

본 연구는 기존의 EFG법의 근사함수에 특이기지함수를 포함하는 확장항을 추가하여 균열선단의 특이성을 모형화하는 한편, 형상함수가 균열면에 의해 완전히 잘리는 경우, 불연속함수를 이용하여 균열면의 불연속성이 반영되도록 하는 개선된 EFG 균열해석 기법을 제안하였다.

Fleming 등<sup>4)</sup>의 연구나 Belytschko와 Fleming<sup>5)</sup>의 연구결과는 확장기지함수를 포함하지 않는 기존의 EFG 해석기법에서 균열선단 주변에 절점을 추가함으로써 균열선단의 특이성을 좀더 잘 포착할 수 있다는 점과 함께 EFG 근사함수나 기저함수를 확장함으로써 균열선단 주변에서 정도 높은 해를 얻을 수 있다는 것을 보여 주며 주었다. 그러나 확장함수를 적용하여 계방정식을 유도하는 과정이 복잡할 뿐만 아니라 확장함수를 해석영역 전체에 적용해야 하기 때문에 계방정식의 크기가 많이 증가되는 단점을 갖고 있었다. 물론, 계산의 효율성을 높이기 위해 확장하지 않은 EFG법과 조합하는 방법이 제안되기도 했지만 접합경계에서의 적합성을 확보해 주어야 하는 추가적인 문제가 발생하였다.

그러나 본 연구에서 제안하는 방법은 우선, 계방정식을 유도하는 과정이 기존의 확장방법보다 간편하고 접합경계의 도입이 필요치 않으며, 또 균열선단 주변의 한정된 영역내의 절점들에만 확장근사함수에 적용하기 때문에 계방정식의 크기 증가는 무시할 만하다는 이점이 있다. 본 연구에서 통하여 얻어진 결론은 다음과 같이 정리할 수 있다.

- 1) 특이기지함수를 포함하는 확장항을 EFG 근사함수에 추가하여 균열선단 주변의 특이응력장을 성공적으로 표현할 수 있었다.
- 2) 해석시 확장함수를 적용하는 절점의 개수를 4~5개

- 로 제한하여도 만족할 만큼 정확한 해를 얻는 동시에 전체 계방정식의 크기증가를 최소화할 수 있었다.
- 3) 가중함수는 기존의 EFG법에서 사용하던 것보다 좀더 compact한 형상의 가중함수를 사용하는 경우에 보다 정도 높은 수치해를 얻을 수 있었다.
  - 4) 영향영역은 기존의 EFG법보다 더 작은 크기의 영향영역을 사용할 때 정도 높은 수치해를 얻을 수 있었으며, 이로 인해 형상함수 계산에 소요되는 시간을 상당히 단축시키는 효과를 얻을 수 있었다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)의 연구비 지원으로 이루어졌으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 1994, pp.229~256
2. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. and Tabbara, M., "Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.32, 1995, pp.2547~2570
3. Belytschko, T. and Tabbara, M., "Dynamic fracture using element-free Galerkin Methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, 1996, pp.923~938
4. Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., "Enrichment Element-Free Galerkin methods for crack tip fields," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, 1997, pp.1483~1504
5. Belytschko, T. and Fleming, M., "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method," *Computer and Structures*, Vol.71, 1999, pp.173~195
6. Belytschko, t., Krongauz, D., Organ, M., Fleming, M. and Krysl, P., "An overview and recent developments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, 1996, pp.3~47
7. Belytschko, T. and Black, T., "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, 1999, pp.601~620
8. Moes, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, 1999, pp.131~150
9. 이상호, 윤영철, "Element-Free Galerkin법을 이용한 혼합모드상태 균열의 균열진전해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권 제3호, 1999a, pp.485~494
10. 이상호, 윤영철, "EFG법을 이용한 다수균열 함유 강부재의 피로균열 성장거동 해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권 제4호, 1999b, pp.691~700
11. Moran, B. and Shih C. F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.27, 1987, pp.615~641
12. Anderson, T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and applications*, 2<sup>nd</sup> ed. CRC Press, 1995