

# 비균질 Pasternak지반에 의해 지지된 박판의 안정 해석

## Stability Analysis of Thin Plates on Inhomogeneous Pasternak Foundation

이 용 수\*                      김 광 서\*                      전 형 종\*\*  
Lee, Yong-Su                      Kim, Kwang-Seo                      Jeon, Hyung-Jong  
(논문접수일 : 2001년 5월 9일 ; 심사종료일 : 2001년 9월 12일)

### 요 지

본 논문은 등분포 면내응력을 받고 비균질 Pasternak지반에 의해 지지된 장방형판의 진동해석을 다룬 것이다. Winkler 지반계수와 전단지반계수가 고려된 2변수지반을 Pasternak지반이라 부른다. 판의 중앙부분과 가장자리부분의 Winkler 지반계수값을 각각  $k_1$ 과  $k_2$ 로 선택하였고 전단지반계수값은 판의 전지역에 대해 일정한 값을 취하였다. 전체 휨강성행렬, 기하강성행렬, 질량 행렬 및 Pasternak지반의 강성행렬을 조합하고 이 행렬들로 이루어지는 고유값 문제를 푼다. 그 결과 지반강성을 고려할 때 전단지반계수가 무시되면 안된다는 것으로 나타났다.

**핵심용어** : 비균질 Pasternak 지반, Winkler 지반계수, 동적안정

### Abstract

This paper deals with the vibration analysis of the rectangular plates which are subjected to uniform in-plane stresses and supported on In-homogeneous Pasternak foundation. Two parametric foundation which Winkler foundation parameter and shear foundation parameter considered, is called by the Pasternak foundation. The values of Winkler foundation parameter of central and border zone of plate are chosen as  $k_1$  and  $k_2$  respectively, and the value of shear foundation is chosen as constant about all zone of plate.

After composing global flexural stiffness matrix, geometrical stiffness matrix, mass matrix, and the stiffness matrix of the Pasternak foundation, eigenvalue problems which are composed of these matrices are solved. The result shows that the shear foundation parameter must not be ignore when considering the stiffness of foundation.

**Keywords** : In-homogeneous Pasternak foundation, Winkler foundation, dynamic stability

### 1. 서 론

판부재는 건축, 토목, 기계, 항공 등의 구조물에서 주요한 부재로 널리 사용되고 있다. 건축물의 온통기초는 토압이나 수압 또는 지진하중 등의 면내하중을 받는 지반위에 놓인 판으로 이상화할 수 있다. 최근 건설공사의 발파, 항타, 다짐, 굴착 작업등에 의한 진동과 발

전기, 동력기, 대형펌프, 공작기계등의 각종 인위적인 요인들에 의해 발생하는 지반진동이 주변의 시설물과 인체에 미치는 피해 사례가 급증하여 지반진동이 발생할 때의 판의 거동에 대한 연구의 필요성이 증대되고 있다.

비균질 Winkler지반에 의해 지지된 판에 대해 1985년 Laura, P. A. A.와 Guterrez, R.H.<sup>1)</sup>는

\* 정회원 · 원광대 건축공학과 교수, 공학박사  
\*\* 정회원 · (주)만유구조안전연구소, 공학석사

· 이 논문에 대한 토론을 2001년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

Rayleigh-Ritz법을 이용하여 동적 해석을 하였으며, 같은 해 Horenberg J. A. G.와 Kerstens J. G. M<sup>2)</sup>는 Modal Constrain 법을 이용하여 해석하였고 최근 들어 Saha K. N., Kar R. C., Datta P. K<sup>3)</sup> 등은 Galerkin법을 이용하여 이 문제를 다루었으나 국내에서는 1994년 이수곤<sup>7)</sup> 등이 중간 탄성지점을 갖는 유공부재의 탄성입계응력과 고유진동수와의 관계를 발표하였고, 1997년 및 2000년 이용수<sup>8),9)</sup> 등은 각각 탄성 지지 보강판의 좌굴해석 및 탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석을 행하였다. 아직까지 국내·외에서 비균질 Pasternak 지반에 의해 지지된 판의 동적해석에 대한 연구는 미비한 실정이다.

본 연구에서는 Winkler 지반강성과 전단지반 강성의 2가지를 고려한 Pasternak 지반상의 판의 좌굴응력과 고유진동수 그리고 판에 면내응력이 가해졌을 때 진동수를 구하고, 동적불안정영역을 표시하므로써 지하구조물설계시 기초 자료를 제공하는데 그 목적이 있다.

## 2. 유한요소법에 의한 판해석

가상일의 원리를 이용하여 판의 좌굴 및 진동 미분방정식을 유도하고 변위형상함수를 이 미분방정식에 대입하여 판의 강성매트릭스, 지반강성매트릭스, 기하강성매트릭스 및 질량매트릭스를 얻는다.

### 2.1 판의 강성 및 질량 매트릭스

판요소의 좌표축 및 변위는 그림 1과 같고 그림 2는 이상화된 Pasternak 지반 위의 판이다. 가상일의 원리를 이용하여 판에 대한 좌굴 및 진동방정식을 구한다. 먼저 판 요소의 휨모멘트에 의한 변형에너지, Winkler지반의 변형에너지, 전단지반의 변형에너지를 구하면 다음과 같다.

$$U^e = \frac{1}{2} \int_A \{m\}^T \cdot \{\chi\} \cdot dA + \frac{1}{2} \int_A F_k w^2 \cdot dA + \frac{1}{2} \int_A k_g [w_{,x}^2 + w_{,y}^2] \cdot dA \quad (1)$$

여기서,

$$dA = dx \cdot dy$$

{m} : 모멘트 벡터

{χ} : 곡률 벡터

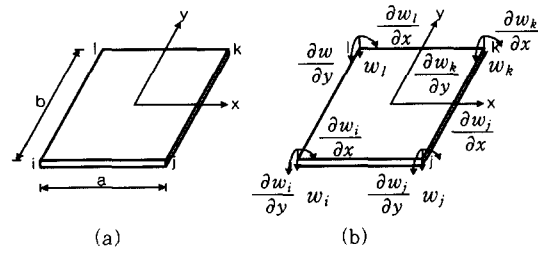
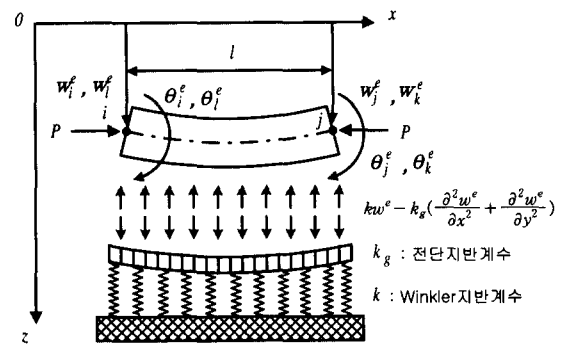


그림 1 판요소의 좌표축(a), 변위(b)



여기서 i, j, k, l : 요소의 절점, v<sup>e</sup> : 절점변위 θ<sup>e</sup> : 절점회전각

그림 2 이상화된 모델

F<sub>k</sub> : Winkler 지반강성

k<sub>g</sub> : 전단지반강성

$$w = w(x, y) \cdot w(t), \quad \dot{w} = \partial w / \partial t$$

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

판 요소의 운동에너지 T<sup>e</sup>와 면내응력이 한 일 V<sup>e</sup>를 구하면 다음과 같다.

$$T^e + V^e = \frac{1}{2} \int_A \rho \cdot h \cdot \dot{w}^2 dA + \frac{1}{2} \int_A h \cdot [\sigma] \cdot \{\theta\}^2 \cdot dA \quad (2)$$

여기서,

ρ : 판 요소 질량

h : 판 요소 두께

[σ] : 면내응력행렬

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \{\theta\}^T = \left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] : \text{처짐각 벡터}$$

절점당 3자유도를 갖으며 4개의 절점으로 이루어진 장

방형 요소를 이용하였으므로 변위함수는 다음과 같이 12개의 변수를 포함한 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 = [P] \{a\} \quad (3)$$

여기서,

$$[P] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3] \quad (4)$$

$$\{a\}^T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}] \quad (5)$$

판 요소의 처짐각 및 처짐을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = [F] \cdot \{a\} \quad (6)$$

식(6)에 요소의 각 절점  $i, j, k, l$ 의 좌표값을 대입하여 각 절점의 변위벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_i^e\} \\ \{\delta_j^e\} \\ \{\delta_k^e\} \\ \{\delta_l^e\} \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{a\} \quad (7)$$

길이  $dx, dy$ 인 판 요소에 작용하는 모멘트  $\{m\}$ 은 다음이 나타낼 수 있다.

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\chi\} \quad (8)$$

여기서,

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$\mu$  : 포아송비

$E$  : 판요소의 탄성계수이다.

식(7)를  $\{a\}$ 에 대하여 정리한 값과 식(3)을 곡률  $\{\chi\}$ 에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\{\chi\} = [C] \cdot \{a\} = [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (11)$$

식(11)을 식(8)에 대입하면

$$\{m\} = [D] \cdot [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (12)$$

식(1)에서 휨에 의한 변형에너지 및 Winkler지반, 전단지반의 변형에너지에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta U^e = \int_A \{m\}^T \cdot \delta\{\chi\} \cdot dA + \int_A F_k w \cdot \delta(w) \cdot dA + \int_A k_s [w_{,x} \cdot \delta(w_{,x}) + w_{,y} \cdot \delta(w_{,y})] \cdot dA \quad (13)$$

식(13)의 우변의 첫번째 항에서 요소강성행렬, 두번째 항에서 Winkler 지반강성행렬, 세번째 항에서 전단지반강성행렬을 각각 얻을 수 있다. 식(13)의 우변의 첫번째 항에 식(8), 식(11)을 대입하여 정리하면

$$\int_A \{m\}^T \delta\{\chi\} dA = \{\delta^e\}^T [K^e] \delta\{\delta^e\} \quad (14)$$

여기서, 요소강성 행렬  $[K^e]$ 는 다음과 같다.

$$[K^e] = \int_A [A^{-1}]^T [C]^T [D]^T [C][A]^{-1} dA \quad (15)$$

식(13)의 우변의 두 번째 항에 식(3) 및 식(7)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_A F_k w \cdot \delta(w) \cdot dA \\ &= F_k \{\delta^e\}^T \int_A [A^{-1}]^T [P]^T [P] [A]^{-1} dA \delta\{\delta^e\} \\ &= \{\delta^e\}^T [W^e] \delta\{\delta^e\} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, Winkler 지반요소강성행렬은 다음과 같이 된다.

$$[W^e] = F_k \int_A [A^{-1}]^T [P]^T [P] [A]^{-1} dA \quad (17)$$

식(13)의 우변의 마지막 항에 대해서도 마찬가지로 유사한 과정을 거치면

$$\begin{aligned} & \int_A k_g [w_{,x} \cdot \delta(w_{,x}) + w_{,y} \cdot \delta(w_{,y})] \cdot dA \\ &= \{\delta^e\}^T \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial x} [P]^T \\ & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P] [A^{-1}] dA \cdot \delta\{\delta\} \\ &= \{\delta^e\}^T [[W_{gx}^e] + [W_{gy}^e]] \delta\{\delta^e\} \end{aligned} \quad (18)$$

따라서  $[W_{gx}^e]$ 와  $[W_{gy}^e]$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} [W_{gx}^e] &= \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial x} [P]^T \\ & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P] [A^{-1}] dA \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [W_{gy}^e] &= \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial y} [P]^T \\ & \quad \cdot \frac{\partial}{\partial y} [P] [A^{-1}] dA \end{aligned} \quad (20)$$

식(2)에서 운동에너지에 대한 변분을 취하면 요소 질량 행렬을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta T^e &= \int_A \rho h \dot{w} \delta(\dot{w}) dA \\ &= \int_A \rho h \{\dot{\delta}^e\}^T [A^{-1}]^T [P]^T [P] [A^{-1}] \delta\{\dot{\delta}^e\} dA \\ &= \{\dot{\delta}^e\}^T [M^e] \delta\{\dot{\delta}^e\} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, 요소질량행렬  $[M^e]$ 는 다음과 같다.

$$[M^e] = \int_A \rho h [A^{-1}]^T [P]^T [P] [A^{-1}] dA \quad (22)$$

식(2)에서 면내응력이 한 일에 대한 변분을 취 하면

$$\delta V^e = \int_A h \{\theta\}^T [\sigma] \delta\{\theta\} dA \quad (23)$$

여기서  $\{\theta\}$ 는 판 요소 처짐각 벡터로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\theta\} = \left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T = [G] \{\alpha\} = [G] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (24)$$

식(24)을 식(23)에 대입하면 정리하면

$$\begin{aligned} \delta V^e &= \{\delta^e\}^T \int_A h [A^{-1}]^T [G]^T [\sigma] [G] [A^{-1}] dA \delta\{\delta^e\} \\ &= \{\delta^e\}^T [K_g^e] \delta\{\delta^e\} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $[K_g^e]$ 가 판요소의 기하강성행렬이 되고 다음과 같이 된다.

$$[K_g^e] = \int_A h [A^{-1}]^T [G]^T [\sigma] [G] [A^{-1}] dA \quad (26)$$

## 2.2 고유치 방정식

변형에너지 변분, 운동에너지 변분 및 면내응력이 한 일의 변분을 전체 판 요소에 대해 조합하고 가상일의 원리를 적용하면  $\delta U = \delta(T + V)$  가 되므로 다음과 같은 장방형 판의 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K] - \sigma [K_g] - \omega_e^2 [M] = 0 \quad (27)$$

여기서,  $[K]$ 는 판의 전체 강성행렬,  $[K_g]$ 는 단위면내응력에 대한 판의 전체 기하강성행렬,  $[M]$ 은 전체 질량행렬,  $\omega_e$ 는 판의 고유진동수,  $\sigma$ 는 면내응력을 나타낸다. 식(27)에서  $\omega_e$ 를 0으로 하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[K] - \sigma [K_g] = 0 \quad (28)$$

식(28)을 만족하는  $\sigma$ 가 임계응력이고 이에 대응하는  $\{\delta\}$ 가 좌굴 Mode가 된다. 또 식(28)을 만족하는

$\sigma$  중 가장 작은 값이 판의 좌굴응력  $\sigma_{cr}$ 이다. 식(27)에서  $\sigma$ 를 0으로 놓으면 식(29)를 얻을 수 있다.

$$[K] - \omega_e^2 [M] = 0 \quad (29)$$

식(29)은 판의 자유진동 문제에 대한 것으로 식(29)을 만족하는  $\omega_e$ 는 고유진동수,  $\{\delta\}$ 는 진동 Mode가 된다. 식(27)에서 임의의 면내응력  $\sigma$ 가 가해진 판에 대한 진동 문제를 해결할 수 있다.  $\sigma = \alpha\sigma_{cr}$  ( $0 \leq \alpha < 1$ )로  $\sigma$ 를 가해진 상태에서 식(30)과 같은 고유치 문제를 해석함으로써 면내응력이 가해진 판의 진동 문제를 다룰 수 있다.

$$[[K] - \alpha\sigma_{cr}[K_g]] - \omega_e^2 [M] = 0 \quad (30)$$

식(30)에서  $\alpha=1$ 이면 판이 좌굴상태가 되므로 진동은 일어나지 않게 되어  $\omega_e=0$ 가 된다.

### 2.3 판의 동적안정이론

주기적인 면내응력을 받는 판에 대해 D'Alembert의 원리를 적용하여 운동방정식을 세우고 이를 행렬 형태로 정리하면 식(31)을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{w}\} + [K]\{w\} - [K_g]\{w\} = 0 \quad (31)$$

식(31)에서  $[K_g]$ 는 면내응력  $\sigma$ 의 함수로 주기응력  $\sigma$ 를 평균응력  $\sigma_0$ 와 응력진폭  $\sigma_1$ 로 나누고  $\sigma_0$ 와  $\sigma_1$ 를 정적 좌굴 응력  $\sigma^*$ 에 대한 함수로 나타내면  $\sigma$ 는 다음과 같다.

$$\sigma = \alpha\sigma^* + \beta\sigma^* \cos \Omega t \quad (32)$$

여기서  $\alpha$ 는 정적응력계수,  $\beta$ 는 동적응력계수이고  $\Omega$ 는 면내 응력의 진동수 이다.

식(32)를 식(31)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 행렬 형태의 Mathieu-Hill 방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{w}\} + [[K_e] - \alpha\sigma^*[K_{gs}] - \beta\sigma^* \cos \Omega t [K_{gt}]]\{w\} = 0 \quad (33)$$

불안정영역의 경계는 미분방정식의 주기가  $T$ 와  $2T$ 인 해를 갖는 조건을 발견함으로써 결정될 수 있다.<sup>4)</sup>

따라서  $w(t)$ 를 다음과 같은 급수형태로 가정한다.

$$w(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots} \left( a_k \sin \frac{k\Omega}{2} t + b_k \cos \frac{k\Omega}{2} t \right) \quad (34)$$

식(34)을 식(33)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$[M] \sum_{k=1,3,5,\dots} \left[ -\left( \frac{k\Omega}{2} \right)^2 \left\{ a_k \cos \frac{k\Omega}{2} t + b_k \sin \frac{k\Omega}{2} t \right\} \right] + [[K_e] - \alpha\sigma^*[K_{gs}] - \beta\sigma^* \cos \Omega t [K_{gt}]] \times \sum_{k=1,3,5,\dots} \left( a_k \sin \frac{k\Omega}{2} t + b_k \cos \frac{k\Omega}{2} t \right) = 0 \quad (35)$$

$k=1,3,5,\dots$  일 경우 각각에 대해 식(35)가 성립되어야 하므로 연립방정식을 얻을 수 있고 이를 풀면 판의 진동수와 진동 Mode를 구할 수 있다.

$k=1$ 인 경우만 고려하고 평균응력  $\sigma_0$ 와 시간에 따른 응력항  $\sigma_1$ 의 영향을 같은 것으로 하여  $[K_{gs}] = [K_{gt}] = [K_g]$ 로 하면 다음 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left\{ [K_e] - \left( \alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) \sigma^* [K_g] - \frac{\Omega^2}{4} [M] \right\} \{w\} = 0 \quad (36)$$

식(36)에서  $\alpha = \beta = 0$ 이면 판의 자유진동에 대한 방정식  $\alpha=1, \beta=0, \Omega=0$ 이면 판의 정적안정에 대한 방정식,  $\beta \neq 0, \Omega \neq 0$ 인 경우 판의 동적 안정에 대한 방정식이 된다.

## 3. 유한요소법의 적용 및 비교분석

### 3.1 적용조건 및 모델

정방형판의 형상, 면내응력 및 지지조건등의 대칭성을 고려하여 판의 1/4만을 모델링한다. 1/4판에 대해 요소분할수에 따른 해의 수렴성을 검증한다.

요소분할한 비균질 Winkler 지반에 지지된 정방형 판과 지반에 지지되지 않은 정면내응력을 받는 정방형 판에 대해 진동수를 구하여 기존해와 비교한다. 기존해가 없는 비균질 Pasternak 지반에 지지된 정방형 판에 대해 좌굴 응력, 고유진동수, 불안정영역등을 결정한다.

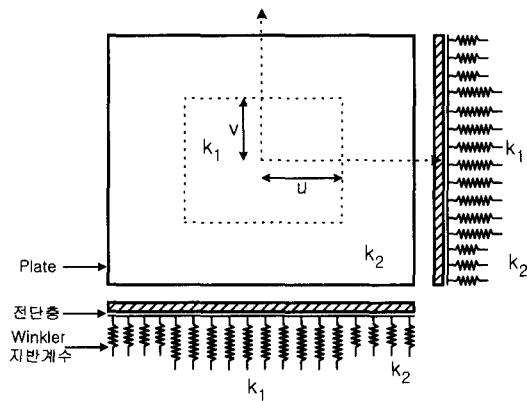


그림 3 비균질지반위 판의 모델

적용모델은 그림 3과 같다. Pasternak지반은 Winkler 지반과 전단지반의 조합으로 이루어져 있다. Winkler 지반의 강성은 Winkler 지반계수  $WF_P$ 를 적용하여 대신한다.  $WF_P$ 는  $F_k \bar{a}^4 / D$  ( $F_k$ : Winkler 지반강성,  $\bar{a}$ : 판 길이,  $D$ : 판의 휨강성)으로 하며 비균질 지반을 고려하기 위해 그림 3에서와 같이 판 중앙에서  $u, v$  범위의 구역은  $k_1$ , 기타 범위는  $k_2$ 의 Winkler지반계수를 갖는 것으로 한다. 전단지반은 전 구역에 걸쳐 일정한 값을 갖는 것으로 하고 전단지반계수  $SF_P$ 는  $\frac{k_g \bar{a}^2}{D}$  ( $k_g$ : 전단지반강성)을 사용한다. 비균질 Pasternak 지반에 지지된 판의 제반조건은 다음과 같다.

- 1) 탄성계수 ( $E$ ): 20,390,000,000 kgf/m<sup>2</sup>
- 2) 포아송비 ( $\mu$ ): 0.3
- 3) 판두께 ( $h$ ): 0.001 m
- 4) 판의 크기 ( $\bar{a} \times \bar{b}$ ): 1×1m
- 5)  $u, v$ : 0, 0.1, 0.3 m
- 6)  $WF_P(k_1, k_2)$ : 0, 20, 50, 100
- 7)  $SF_P$ : 0, 5, 20
- 8)  $D = \frac{Ek^3}{12(1-\mu^2)}$

### 3.2 검증

판을 7×7( $\frac{1}{4}$  판 기준)로 요소 분할하여 좌굴응력을 기존해와 비교한 결과 표 1과 같다.

판을 7×7로 요소분할 한 결과 좌굴응력에 대해서는 최대 -0.5%의 작은 오차를 나타내었다. 판을 7×7

표 1 판의 좌굴응력(단위: kgf/m<sup>2</sup>)

단순지지			고정지지		
본연구	문헌(5)	오차(%)	본연구	문헌(5)	오차(%)
73569.98	73714.72	-0.19	184815.70	185759.54	-0.50

표 2 판의 고유진동수  $\lambda^2$  ( $u=v=0.1m$ )

$WF_P$		단순지지			고정지지		
$k_1$	$k_2$	본연구	문헌(1)(2)	오차(%)	본연구	문헌(1)(2)	오차(%)
0	20	25.68	[25.74] [25.70]	[-0.23] (-0.07)	39.17	[39.32] [39.23]	[-0.38] (-0.15)
0	50	32.64	[32.73] [32.63]	[-0.27] (0.03)	43.68	[43.83] [43.80]	[-0.34] (-0.27)
0	100	41.68	[41.87] [41.62]	[-0.45] (-0.14)	50.26	[50.47] [50.36]	[-0.42] (-0.20)
20	0	20.86	[20.91] [20.91]	[-0.24] (-0.24)	36.79	[36.95] [36.98]	[-0.43] (-0.51)
50	0	22.47	[22.54] [22.51]	[-0.31] (-0.18)	38.16	[38.34] [38.51]	[-0.47] (-0.91)
100	0	24.82	[25.02] [24.86]	[-0.80] (-0.16)	40.28	[40.55] [40.78]	[-0.67] (-1.23)

표 3 정면내응력을 받는 판의 진동수비 ( $\omega/\omega_e$ )

$\sigma_0/\sigma_{cr}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
본연구	1	0.8943	0.7738	0.6305	0.4446
문헌(6)	1	0.8943	0.7746	0.6325	0.4472
오차(%)	0.0	-0.01	-0.1	-0.3	-0.6

로 요소분할하고 Winkler지반계수를 20,50,100으로 변화시키고  $u=v=0.1m$ 로 하여 판의 고유진동수 ( $\lambda^2 = \omega_e \bar{a}^2 \sqrt{\rho h / D}$ )를 구해 본 결과 표 2와 같았다.

표 2에 의하면 단순지지의 경우 기존해와의 최대오차가 0.80%, 고정지지의 경우 -1.23%로 나타났다. 정면내응력을 받는 판의 진동해석을 한 결과를 기존해와 비교한 결과는 표 3에 나타나 있다.

여기서  $\omega_e$ 는 면내응력이 가해지지 않은 경우 판의 고유진동수이다. 기존해와 비교결과 응력비가 0.8인 경우 최대 -0.6%의 오차를 보였다.

### 3.2 유한요소법의 적용

#### 3.2.1 좌굴응력

Winkler 지반계수  $WF_P$ 를 0,20,50,100, 전단지반

계수  $SF_P$ 를 0.5, 20으로 변화시키고  $u$ 와  $v$ 는 0.1m, 0.3m경우로 하여 단순지지판과 고정지지판의 좌굴응력을 구한 결과가 표 4, 표 5에 나타나있다. 표 4, 표 5에 의하면 Winkler지반강성 뿐만 아니라 전단지반 강성이 커짐에 따라 좌굴응력이 상당히 커짐을 알 수 있다. 그러므로 구조물 설계시 전단지반계수를 고려하지 않는 Winkler 지반으로 해석할 경우 구조물의 좌굴응력이 실제보다 작아 과대설계의 우려가 있다. 보다 정확한 판의 좌굴응력을 얻기 위해서는 전단지반강성을 고려한 Pasternak 지반상의 판으로 해석하여야 한다.

3.2.2 고유진동

좌굴응력과 마찬가지로 Winkler 지반계수  $WF_P$  및 전단지반계수  $SF_P$ , 그리고  $u, v$ 의 변화에 따른 판의 고유진동수를 계산하였다.  $u=v=0.1m, 0.3m$ 인 경우 단순지지, 고정지지판의 고유진동수가 표 6, 표 7에 나타나 있다.

4변 단순지지판 및 고정지지판 모두 좌굴응력에서의 경우와 유사한 양상을 보인다. Winkler 지반계수만 고려한 경우보다 전단지반 계수를 고려한 경우 지반

의 전단강성이 커질수록 진동수가 상당히 커짐을 알 수 있으며  $u, v$ 값이 커질수록 진동수가 작아지는 것으로 나타났다.

3.2.3 정면내응력을 받는 판의 진동

좌굴응력값의 0.4배, 0.8배에 해당하는 면내응력을 가한 판에 대해 진동수를 구한다. 지지조건은 4변고정과 4변단순지지로 하고  $u, v$ 를 0.1m, 0.3m로 변화시켜 진동해석을 한다. 정면내응력이 가해진 경우도 탄성지반에 대한 영향은 유사한 것으로 나타났다. 표 6~표 11에 의하면 정면내응력이 가해진 경우 진동수는 자유진동에 대한 고유진동수 보다 작은 것을 알 수 있다.

3.2.4 동적 안정

식(32)에서  $\alpha=0.4, 0.8$ 인 경우 비균질 Pasternak 지반에 지지된 4변 고정지지판과 4변 단순지지판에 대해 동적안정영역을 구한다.

$u=v=0.1m, k_1=20, k_2=50, 100, SF_P=5$ 인 경우에 대해 동적안정영역을 그림 4~그림 11에 나타내었다. 단순지지판이나 고정지지판 모두 Winkler지반

표 4 단순지지판의 좌굴응력(단위:  $kgf/m^2$ )

	$WF_P$		$SF_P$			
	$k_1$	$k_2$	0	5	20	
$u=v=0.1m$	0	20	125781.70	201722.90	386381.40	
		50	201235.00	263254.40	396815.00	
		100	236256.70	279325.80	410486.60	
	50	0	20	82541.67	158270.90	380828.70
			50	95677.84	171087.10	384232.50
			100	116082.40	190597.60	381586.40
	100	50	20	214289.70	266507.00	397215.50
			50	237688.80	280948.10	411488.70
			100	248180.90	225176.60	388739.60
	50	100	20	239225.80	282173.30	413707.70
			50	168169.10	241244.90	389865.50
		20	50	224766.50	269436.00	398098.50
100			84710.44	160959.30	382328.10	
100		0	50	100644.80	176995.30	392926.00
			100	124858.20	200310.40	395247.40
	20	0	50	123571.80	199557.10	388634.30
			100	194676.10	254837.70	389311.60
	50	100	20	220774.10	264931.70	398201.00
			50	152092.50	228695.30	396626.60
$u=v=0.3m$	20	50	176165.90	246465.40	401671.70	
		100	207833.50	262845.80	392903.10	
	50	100	20	230059.40	276769.30	405582.30
			50	224922.90	269117.00	402979.00
	100	50	20	232274.60	276309.40	408077.50

표 5 고정지지판의 좌굴응력(단위 :  $kgf/m^2$ )

	$WF_P$		$SF_P$			
	$k_1$	$k_2$	0	5	20	
$u=v=0.1m$	0	20	213529.70	276616.40	447962.70	
		50	248735.40	307028.00	465332.90	
		100	288124.00	339100.40	484815.10	
	50	0	20	195292.30	260772.50	438746.90
			50	210257.80	274974.50	447107.00
			100	233464.70	296113.40	462949.30
	100	50	20	257254.80	313825.20	469122.60
			50	294254.70	344797.10	489021.10
			100	236698.40	297641.20	460707.10
	50	100	20	302820.20	352588.80	492698.50
			50	258412.40	316488.60	475744.90
		20	100	50	285987.60	33869.80
50				196761.30	260850.90	436800.80
100		0	50	211761.00	274722.10	445228.30
			100	233045.30	291871.30	455488.50
	20	0	50	212392.60	276235.30	447644.30
			100	250213.80	309652.60	466912.20
	50	100	20	297657.80	348578.80	492583.70
			50	236462.20	296594.80	460421.00
$u=v=0.3m$	20	50	254276.10	310460.00	469186.00	
		100	258491.60	316006.30	471402.60	
	50	100	20	282003.00	334752.50	486150.30
			50	301351.00	351027.80	494871.00
	100	50	20	306729.40	356229.70	495869.40

표 6 단순지지판의 고유진동수  $\lambda^2$

	$WF_P$		$SF_P$		
	$k_1$	$k_2$	0	5	20
$u=v$ $=0.1m$	0	20	25.68	32.46	47.30
		50	32.64	38.21	51.43
		100	41.68	46.20	57.63
	20	0	20.86	28.79	44.86
			22.46	29.98	45.86
	100	24.81	31.80	46.87	
	20	50	33.39	38.85	51.90
		100	42.31	46.75	58.07
	50	20	27.90	34.25	48.55
		100	43.21	47.57	58.71
	100	20	29.87	35.88	49.73
		50	36.13	41.23	53.71
$u=v$ $=0.3m$	0	20	21.11	28.98	44.97
		50	23.02	30.41	45.92
		100	25.75	32.55	47.41
	20	0	25.44	32.27	47.16
			32.15	37.80	51.12
	100	40.86	45.47	57.07	
	20	50	28.18	34.47	48.70
		100	30.51	36.43	50.13
	50	20	33.12	38.61	51.72
		100	36.47	41.54	53.95
	100	20	41.68	46.19	57.63
		50	42.84	47.23	58.45

표 8 4변단순지지판의 진동수  $\lambda^2$  ( $\sigma=0.4\sigma_c$ )

	$WF_P$		$SF_P$		
	$k_1$	$k_2$	0	5	20
$u=v$ $=0.1m$	0	20	19.83	25.03	37.67
		50	25.27	30.03	42.47
		100	35.11	39.22	49.48
	20	0	16.14	22.23	34.73
			17.37	23.17	35.62
	100	19.20	24.62	37.25	
	20	50	25.71	30.74	43.03
		100	35.83	39.85	49.98
	50	20	21.56	26.39	39.16
		100	36.86	40.78	50.69
	100	20	23.12	19.47	40.56
		50	28.78	33.60	45.17
$u=v$ $=0.3m$	0	20	16.32	22.34	34.84
		50	17.80	23.44	35.73
		100	19.90	25.15	37.51
	20	0	19.64	24.88	37.44
			24.91	29.80	42.30
	100	34.56	38.73	49.10	
	20	50	21.73	26.54	39.15
		100	23.57	26.54	39.15
	50	20	25.62	30.57	42.94
		100	29.02	33.74	45.29
	100	20	35.45	39.50	49.66
		50	36.63	40.55	50.52

표 7 고정지지판의 고유진동수  $\lambda^2$

	$WF_P$		$SF_P$		
	$k_1$	$k_2$	0	5	20
$u=v$ $=0.1m$	0	20	39.17	44.83	58.31
		50	43.68	48.85	61.52
		100	50.26	54.87	66.48
	20	0	36.79	42.73	56.64
			38.15	43.88	57.47
	100	40.28	45.70	58.81	
	20	50	44.49	49.56	62.65
		100	50.99	55.52	66.98
	50	20	41.33	46.69	59.67
		100	52.04	56.46	67.72
	100	20	43.32	48.42	60.97
		50	47.50	52.22	64.08
$u=v$ $=0.3m$	0	20	36.12	42.20	56.33
		50	36.62	42.65	56.72
		100	37.40	43.38	57.35
	20	0	39.70	45.26	58.59
			44.93	49.89	62.19
	100	52.48	56.76	67.77	
	20	50	40.46	45.98	59.23
		100	41.18	46.66	59.84
	50	20	45.21	50.16	62.44
		100	46.27	51.19	63.39
	100	20	52.73	57.00	68.00
		50	53.10	57.37	68.34

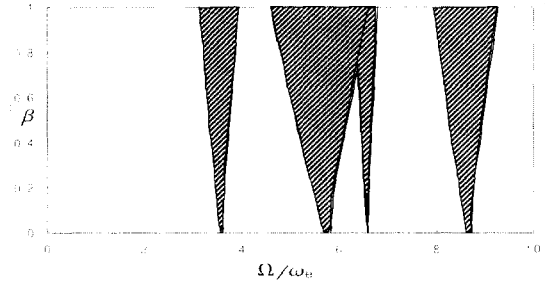
표 9 4변단순지지판의 진동수  $\lambda^2$  ( $\sigma=0.8\sigma_c$ )

	$WF_P$		$SF_P$		
	$k_1$	$k_2$	0	5	20
$u=v$ $=0.1m$	0	20	11.27	14.14	24.52
		50	14.51	18.48	31.00
		100	26.60	30.41	39.56
	20	0	9.27	12.63	20.01
			9.96	13.19	21.29
	100	11.01	14.11	23.84	
	20	50	14.38	19.50	31.80
		100	27.65	31.30	40.20
	50	20	12.30	14.81	26.64
		100	29.10	32.60	41.12
	100	20	13.25	16.08	28.50
		50	18.66	23.54	34.58
$u=v$ $=0.3m$	0	20	9.34	12.60	20.10
		50	10.15	13.18	20.95
		100	11.30	14.16	23.40
	20	0	11.14	14.03	24.06
			14.26	18.48	30.97
	100	26.05	29.89	39.17	
	20	50	12.24	14.81	26.29
		100	13.27	16.41	28.16
	50	20	14.65	19.38	31.80
		100	18.61	23.32	34.49
	100	20	27.35	31.02	39.96
		50	28.97	32.44	41.15



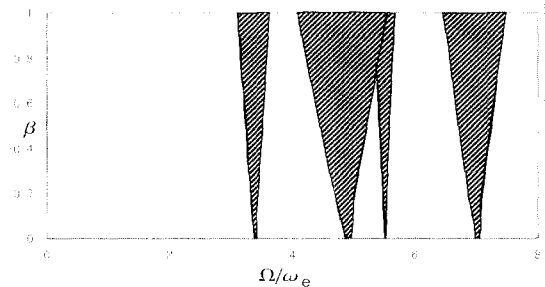
표 10 4변고정지지판의 진동수  $\lambda^2$  ( $\sigma=0.4\sigma_v$ )

	$WF_p$		$SF_p$			
	$k_1$	$k_2$	0	5	20	
$u=v$ $=0.1m$	0	20	31.10	35.87	47.62	
		50	35.18	39.67	50.98	
		100	41.60	45.77	56.30	
	20	0	20	29.01	33.93	45.90
			50	30.13	34.90	45.74
			100	31.93	36.50	48.03
	50	50	35.90	40.35	51.55	
		100	42.33	46.42	56.84	
		20	32.95	37.52	49.03	
	100	100	43.39	47.40	57.68	
20		34.69	39.12	50.29		
50		38.76	42.98	53.71		
$u=v$ $=0.3m$	0	20	28.48	33.50	45.61	
		50	28.90	33.90	45.99	
		100	29.58	34.54	46.61	
	20	0	20	31.53	36.22	47.86
			50	36.35	40.67	51.68
			100	44.03	47.87	57.87
	50	50	32.21	36.89	48.48	
		100	32.85	37.53	49.13	
		20	36.61	40.91	51.93	
	100	100	38.59	41.91	52.75	
		20	44.25	48.05	58.07	
		50	44.57	48.39	58.36	



( $\alpha=0.4, k_1=20, k_2=50, SF_p=5$ )

그림 4 단순지지판의 동적불안정영역

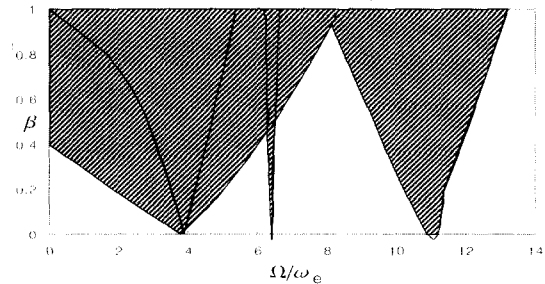


( $\alpha=0.4, k_1=20, k_2=100, SF_p=5$ )

그림 5 단순지지판의 동적불안정영역

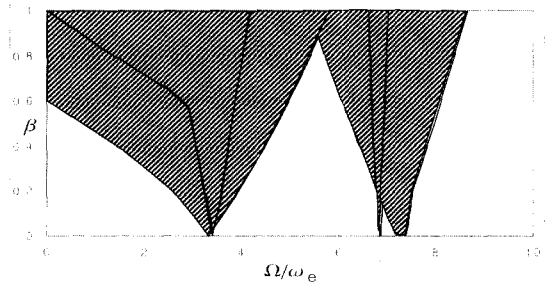
표 11 4변고정지지판의 진동수  $\lambda^2$  ( $\sigma=0.8\sigma_v$ )

	$WF_p$		$SF_p$			
	$k_1$	$k_2$	0	5	20	
$u=v$ $=0.1m$	0	20	18.60	21.83	30.84	
		50	21.66	24.96	34.28	
		100	27.22	30.70	39.85	
	20	0	20	17.12	20.34	29.23
			50	17.81	20.98	30.24
			100	19.08	22.28	31.60
	50	50	22.21	25.64	35.07	
		100	27.94	31.38	40.50	
		20	19.92	23.17	32.57	
	100	100	29.05	32.44	41.73	
20		21.25	24.64	33.92		
50		24.89	28.41	37.83		
$u=v$ $=0.3m$	0	20	16.78	20.03	28.87	
		50	17.06	20.30	29.20	
		100	17.53	20.75	29.69	
	20	0	20	18.85	22.03	31.06
			50	22.79	26.02	35.27
			100	30.36	33.60	42.71
	50	50	19.34	22.57	31.49	
		100	19.77	23.08	32.18	
		20	22.97	26.16	35.44	
	100	100	23.66	27.00	35.65	
		20	30.46	33.56	42.75	
		50	30.60	33.73	42.76	



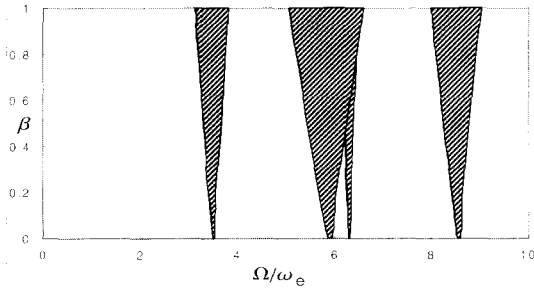
( $\alpha=0.8, k_1=20, k_2=50, SF_p=5$ )

그림 6 단순지지판의 동적불안정영역



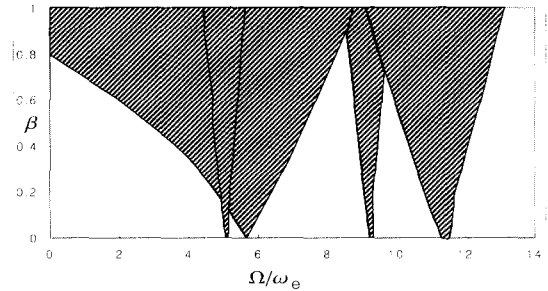
( $\alpha=0.8, k_1=20, k_2=100, SF_p=5$ )

그림 7 단순지지판의 동적불안정영역



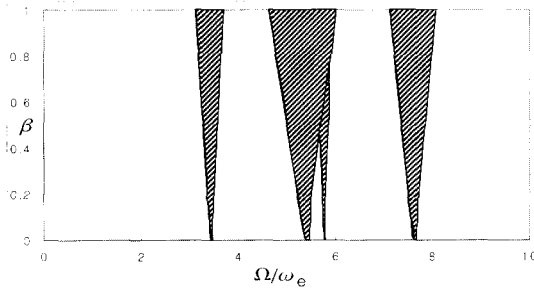
( $\alpha=0.4, k_1=20, k_2=50, SF_p=5$ )

그림 8 고정지지판의 동적불안정영역



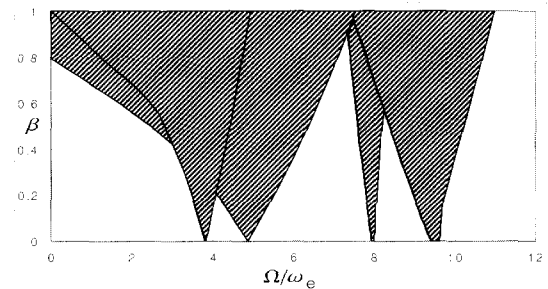
( $\alpha=0.8, k_1=20, k_2=50, SF_p=5$ )

그림 10 고정지지판의 동적불안정영역



( $\alpha=0.4, k_1=20, k_2=100, SF_p=5$ )

그림 9 고정지지판의 동적불안정영역



( $\alpha=0.8, k_1=20, k_2=100, SF_p=5$ )

그림 11 고정지지판의 동적불안정영역

계수  $k_1, k_2$  및 전단지반계수  $SF_p$  값이 증가하면 1~4 차모드의 불안정영역이  $\beta$ 축에 가까워지는 것을 알 수 있었다.  $\alpha$  값이 0.4인 경우에 비해 0.8인 경우는 1차 모드와 2차모드의 불안정영역이 확대되면서 겹치는 현상을 보였다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 지반강성이 다른 두 개의 지반위에 지지된 판의 좌굴 및 진동해석을 하였다.

이질지반의 크기  $u, v$ 가 0.1 m, 0.3 m인 경우에 대해서 Winkler 지반계수  $k_1, k_2$ 는 0, 20, 50, 100으로 변화시키고 전단지반 계수  $SF_p$ 는 0, 5, 20으로 각각 변화시켜 판의 좌굴응력과 고유진동수 그리고 면내응력을 주었을 때 판의 진동수를 구하였다. 또  $u=v=0.1m, k_1=20, k_2=50, 100, SF_p=5$ 인 경우 4번 단순지지, 고정지지판에 대한 동적안정영역을 결정하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1. 기존해와 본 유한요소 프로그램을 비교한 결과 좌굴응력과 정면내응력을 가했을 때의 판의 진동수 그리고 비균질 Winkler 지반에 의해 지지된 판의 고유진동수는 최대 -1.23%의 오차를 보이는 것으로 나타났다.
2. 지반에 지지된 판의 좌굴응력, 고유진동수를 산정할 때 전단지반 강성이 커질수록 좌굴응력과 진동수가 상당히 커지는 것으로 보아 지반해석에 있어서 전단지반 강성은 무시할 수 없을 정도로 큰 영향을 주는 것으로 나타났다.
3. 비균질 Pasternak 지반에 의해 지지된 판의 동적 안정해석을 한 결과 면내응력이  $0.4 \sigma_{cr}$ 을 가한 경우는 지반계수가 변화하여도 불안정영역은 거의 비슷한 형상을 보이고 있다. 그러나 면내응력이  $0.8 \sigma_{cr}$ 인 경우는 지반계수가 커질수록 불안정영역이 작아지는 것으로 나타났으며 1차 모드와 2차 모드에서 불안정영역이 겹쳐지는 것으로 나타났다.

### 감사의 글

본 연구는 2000년 원광대학교 교내 학술 연구비 지원에 의해 수행된 것으로 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고 문헌

1. Laura, P. A. A and Guterrez, R. H., "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogenous Foundations Part I: Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.101, 1985, pp.307~315
2. Horenberg, J. A. G. and Kerstens, J. G. M., "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II: Modal Constraint Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.101, 1985, pp.317~324
3. Saha, K. N., Kar, R. C. and Datta, P. K., "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation," *Computers & Structures*, Vol.63, 1997, pp.1213~1222
4. Bolotin, V. V., *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, 1964, pp.18~29
5. Timoshenko, S. P., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961, pp.348~389
6. Mei, C., "Large Amplitude Vibrations of Plates with Initial Stresses," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.60, 1978, pp.461~464
7. 이수곤, 김순철, 김용빈, "중간탄성지점을 갖는 유공부재의 탄성임계응력과 고유진동수와의 관계", 대한건축학회논문집, 제8권 제12호, 1992, pp.97~104
8. 이용수, "지지단 보강재의 뒤틀림을 고려한 면내 휨을 받는 탄성지지 보강판의 좌굴해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제10권 제1호, 1997, pp.135~148
9. 이용수, 김광서, 백승복, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 대한건축학회 논문집, 제16권 제12호, 2000, pp.41~47