

탄성 불균질 재료의 미시역학거동 (Part II : 탄성계수 및 열팽창계수)

강창석 · 홍성길 · 若島健司*

전남대학교 금속공학과
 *東京工業大學 精密工學研究所

Micromechanical Properties in Elastically Inhomogeneous Materials (Part II : Elastic Moduli and Thermal Expansion Coefficients)

Chang-Seog, Kang, Sung-Kil Hong and Kenji Wakashima*

Department of Metallurgical Engineering, Chonnam National University, Kwangju 500-757, Korea

*Precision and Intelligence Laboratory, Tokyo institute of technology, Yokohama 226, Japan

(2001년 1월 6일 받음, 2001년 3월 28일 최종수정본 받음)

초 록 Part I에서 도출된 기초 식을 적용하여 입자 분산 강화형, 섬유 강화형 및 적층형 복합재료의 유효 탄성계수 및 열팽창계수를 산정 하였다. 일방향 섬유 강화 복합재료의 경우 섬유의 유효 축비 (aspect ratio)가 고려되었으며, 유효 탄성계수는 다른 연구 결과들과 비교하였다. 입자 분산 강화형 복합재료의 유효 체적탄성률 및 전단 탄성률은 Kerner의 표식 및 Hanshin과 Shtrikman의 하한치 (lower bounds)와 일치하고 있다. 일방향 섬유 강화 복합재료에서는 5개, Hanshin과 Rosen의 모델에 나타낸 4개의 독립 탄성계수와 일치하고 있다.

Abstract A theory developed in Part I has been applied to calculate effective elastic and thermoelastic moduli of particle-strengthened, unidirectionally fiber-reinforced, and layered composites. For the unidirectional fiber composites the effect of fiber aspect ratio is taken into account. The analytical solutions obtained to the effective elastic moduli are compared with some of existing expressions and the following results are found. The effective bulk and shear moduli of the particle strengthened composites coincide with Kerner's expressions, which correspond with the lower bounds of Hanshin and Shtrikman. The same expressions as the lower bounds of Hill and Hanshin are obtained for five independent moduli of the aligned continuous fiber composites, four of which coincide with Hanshin and Rosen's exact solutions for 'composite cylinder assemblage'.

Key words: elastically inhomogeneous materials, effective elastic moduli, thermal expansion coefficients, ellipsoidal inclusion, microscopic stress-strain, composites

1. 서 론

탄성 불균질 재료의 미시 역학적 이론적 기초 (Part I)에서 다수의 타원체 재재물이 모상 내에 균일하게 분포하고 있는 복합재료의 거시적 응력-변형 관계를 해석적으로 제시하였다. 본 연구에서는 Part I의 해석 방법을 이용하여 복합재료의 탄성계수 및 열팽창계수에 관한 결과를 검토하였다.

복합재료에 대한 탄성계수의 이론적 산정에 대해서는 지금까지 많은 연구가 되어왔으며 그 보고들에 관한 재검토 또한 보고되고 있다.^{1~5)} 따라서 Part I에서 제시한 방법의 유용성을 검토함에 있어 그 방법을 이용하여 도출된 탄성계수를 지금까지 얻어진 여러 결과와 비교해 검토하는 것이 가장 타당한 방법이라 고려된다. 한편 열팽창계수의 이론적 산정에 관해서는 지금까지 그리 많은 연구가 되어 있지 않다. 그 이유의 하나로서 열팽창계수를 산정하기 위한 방법이 탄성계수의 산정 방법과 기본적으로 동일하다는 것

이다. 즉, 탄성적으로 불균질한 요소로 구성된 복합재료의 거시적인 열팽창계수는 각 구성요소의 불균질한 열팽창을 고려하여야 한다. 본 연구에서는 각 구성요소의 미시 역학 거동을 고려하여 거시적인 탄성계수와 열팽창계수의 표식을 나타내었다.

2. 탄성계수 및 열팽창계수의 산정법

본 연구에서 대상으로 하고 있는 탄성계수 및 열팽창계수는 Part I의 식 (24), 즉

$$e_{ij}^{\prime\prime} = (C_{ijkl}^{-1} + f Q_{ijkl}) \sigma_{kl}^A + (\delta_{ik} \delta_{jl} - f P_{ijkl}) \epsilon_{kl}^{T(M)} + f P_{ijkl} \epsilon_{kl}^{T(N)} \quad (1)$$

를 이용하여 산정하는 것이 가능하다. 이 식에서 $e_{ij}^{\prime\prime}$ 는 복합체의 거시적 평균 변형, σ_{ij}^A 는 복합체에 작용하는 거시적으로 일정한 외부응력, $\epsilon_{ij}^{T(M)}$ 과 $\epsilon_{ij}^{T(N)}$ 는 각각의 모상 및 개재물에 발생하는 균일한 변형률, C_{ijkl} 는 등방성 탄성체인

모상의 탄성 스티프니스 (C_{ijkl}^{-1} 는 C_{ijkl} 의 역행렬, 즉 탄성 컴프라이언스 계수) f 는 개재물의 체적분률, δ_{ij} 는 크로네커 델타 (kronecker delta)이다. 또한 P_{ijkl} 과 Q_{ijkl} 는 모상과 개재물의 축비로부터 구할 수 있는 상수이다. 이제, 모상과 개재물은 모두 등방적인 열팽창 특성을 갖는다고 가정하고, 이들의 선팅창계수를 각각 α , α^* 라 하면, 복합체 전체가 ΔT 가 되는 일정한 온도변화를 받는다는 것으로부터 발생하는 모상 및 개재물 내의 일정한 변형률은

$$\begin{cases} \epsilon_{ij}^{*(M)} = \alpha \Delta T \delta_{ij} \\ \epsilon_{ij}^{*(N)} = \alpha^* \Delta T \delta_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

로 나타낼 수 있다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면,

$$e_{ij}^{**} = (C_{ijkl}^{-1} + f Q_{ijkl}) \sigma_{kl}^A + \{ \alpha \delta_{ij} + f (\alpha^* - \alpha) P_{ijkl} \} \Delta T \quad (3)$$

가 얻어진다. 한편, 복합체의 거시적 탄성 컴프라이언스 및 열팽창계수를 각각 C_{ijkl}^{*-1} , α_{ij}^{**} 라 하면, e_{ij}^{**} 는 이들을 이용하여

$$e_{ij}^{**} = C_{ijkl}^{*-1} \delta_{kl}^A + \alpha_{ij}^{**} \Delta T \quad (4)$$

로 나타낼 수 있다. 식 (3)과 식 (4)의 우변에 대한 대응 항을 비교하면

$$C_{ijkl}^{*-1} = C_{ijkl}^{-1} + f Q_{ijkl} \quad (5)$$

$$\alpha_{ij}^{**} = \alpha \delta_{ij} + f (\alpha^* - \alpha) P_{ijkl} \quad (6)$$

의 관계를 얻을 수 있어, 본 연구에서 대상으로 하는 문제의 일반적 표식을 나타내었다.

이하에서는 실질적으로 흥미 있는 일방향 섬유 강화재, 입자 분산형 복합재 및 평판으로 이루어지는 적층재를 타원체 개재물의 축비가 주어지는 경우로서 모델화 하며, 각각의 경우에 대한 식 (5), 식 (6)의 구체적 계산 결과만을 나타내기로 한다. 이 계산에 있어서 필요한 Eshelby 텐서 S_{ijkl} 의 값은, 타원체 개재물을

$$(x_1^2 + x_2^2)/a^2 + x_3^2/c^2 = 1 \quad (7)$$

와 같이 x_3 -축에 평행한 회전축을 갖는 회전 타원체로서 가정하는 경우, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(i) $a=c$ (구상 개재물) :

$$\begin{cases} S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = (1/15) (7-5\nu)/(1-\nu) \\ S_{1122} = S_{2211} = S_{2233} = S_{3322} = S_{3311} = S_{1133} \\ = - (1/15) (1-5\nu)/(1-\nu) \\ S_{1212} = \dots = S_{2323} = \dots = S_{3131} = \dots \\ = (1/15) (4-5\nu)/(1-\nu) \end{cases} \quad (8)$$

(ii) $c/a \rightarrow \infty$ (섬유상 개재물) :

$$\begin{cases} S_{1111} = S_{2222} = (1/8) (5-4\nu)/(1-\nu) \\ S_{3333} = 0 \\ S_{1122} = S_{2211} = - (1/8) (1-4\nu)/(1-\nu) \\ S_{1133} = S_{2233} = (1/2) \cdot \nu/(1-\nu) \\ S_{3311} = S_{3322} = 0 \\ S_{1212} = \dots = (1/8) (3-4\nu)/(1-\nu) \\ S_{2323} = \dots = S_{3131} = 1/4 \end{cases} \quad (9)$$

(iii) $c/a \rightarrow$ (판상 개재물) :

$$\begin{cases} S_{3311} = S_{3322} = \nu/(1-\nu) \\ S_{3333} = 1 \\ S_{1313} = \dots = S_{2323} = \dots = 1/2 \\ S_{ijkl} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

위 식에서, ν 는 모상의 Poisson 비이다. 한편, 이하에서 표시하는 결과는 개재물과 모상 모두 동일한 탄성적 등방체라는 가정에서 도출된 것이다.

3. 결 과

우선, 구상 입자를 분산시킨 복합재료, 원형단면의 장 섬유에서 일 방향 강화한 복합재 및 두 개의 이상평판을 적층시킨 복합재에 대해서 얻을 수 있는 결과를 나타내고, 더욱이 단 섬유 일 방향 강화재에 대한 섬유의 축비의 영향을 조사한 결과에 대해서도 언급한다. 한편, 이하에 나타낸 표식에 있어서, E 는 영률, μ 는 강성률, ν 는 Poisson비, K 는 체적탄성률, k 는 평면변형 체적탄성률 ($k=K + \mu/3$), α 는 선팅창계수, f 는 강화상의 체적분률이며, 또한 물리량 ϕ 에 대해서 ϕ , ϕ^* 및 ϕ^{**} 는 각각의 모상, 강화상 및 복합체에 대한 값을 나타내고 있다.

3.1 구상입자 분산형 복합재

이 경우, 복합재료는 거시적 등방체이기 때문에 독립적인 탄성계수는 2개, 선팅창계수는 1개로 나타낼 수 있다. 즉,

$$K^{**} = (1-f)K + fK^* + \frac{f(1-f)(K^*-K)(1/K^*-1/K)}{(1-f)/K + f/K^* + (4\mu/3KK^*)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mu^* &= (1-f)\mu + f\mu^* \\ &+ \frac{f(1-f)(\mu^*-\mu)(1/\mu^*-1/\mu)}{(1-f)/\mu + f/\mu^* + (1/6\mu^*)(9K+8\mu)/(K+2\mu)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{**} &= (1-f)\alpha + f\alpha^* \\ &+ \frac{f(1-f)(\alpha^*-\alpha)(K^*-K)}{(1-f)/K + f/K^* + (3KK^*/4\mu)} \end{aligned} \quad (13)$$

3.2 일방향 장섬유 강화 복합재

이 경우의 복합재료는 5개의 독립 탄성계수와 2개의 독립 선팅창계수를 갖는다. Fig. 1에 나타낸 것과 같은 하중 조건에서 다음의 탄성계수를 구한다. 즉, 섬유방향의 일축 인장 하중에 대한 영률 E_a^* 및 Poisson 비 ν_a^{**} , 섬유 축 방향의 변형은 구속하고 횡 방향으로부터의 균등 하중에 의한 평면 변형 체적 탄성률 k_i^* , 섬유 축 방향의 종 전단 하중에

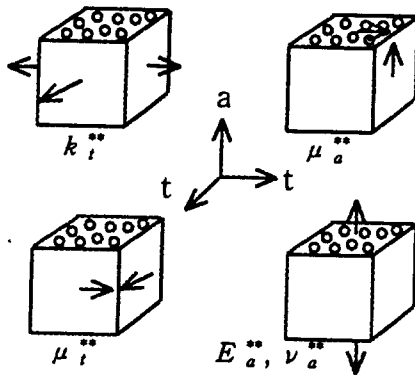


Fig. 1. Basic loading to evaluate the five elastic moduli of a unidirectional fiber composite.

대한 강성률 μ_a^{**} 및 섬유 축에 직각 방향의 횡 전단 하중에 대한 강성률 μ_i^{**} 가 되는 5개의 탄성계수이다. 그것들은

$$E_a^{**} = C_{3333}^{**} - \frac{C_{1133}^{**2}}{C_{1111}^{**} + C_{1122}^{**}} \tag{14}$$

$$\nu_a^{**} = \frac{C_{1133}^{**}}{C_{1111}^{**} + C_{1122}^{**}} \tag{15}$$

$$k_i^{**} = \frac{1}{2} (C_{1111}^{**} + C_{1122}^{**}) \tag{16}$$

$$\mu_a^{**} = C_{2323}^{**} \tag{17}$$

$$\mu_i^{**} = C_{1212}^{**} \tag{18}$$

로 나타낼 수 있다. 또한, 2개의 독립적인 선폽창계수로서 섬유 축 방향의 종 팽창계수 α_a^{**} 와 섬유 축에 직각 방향의 횡 팽창계수 α_i^{**} 는,

$$E_a^{**} = (1-f) E + f E^* + \frac{f(1-f) 4kk^*(\nu^*-\nu)^2}{(1-f)k + fk^* + (kk^*/\mu)} \tag{19}$$

$$\nu_a^{**} = (1-f)\nu + f\nu^* + \frac{f(1-f)(k^*-k)(\nu^*-\nu)}{(1-f)k + fk^* + (kk^*/\mu)} \tag{20}$$

$$k_i^{**} = (1-f)k + fk^* + \frac{f(1-f)(k^*-k)(1/k^*-1/k)}{(1-f)k + f/k^* + (\mu/kk^*)} \tag{21}$$

$$\mu_a^{**} = (1-f)\mu + f\mu^* + \frac{f(1-f)(\mu^*-\mu)(1/\mu^*-1/\mu)}{(1-f)/\mu + f/\mu^* + (1/\mu^*)} \tag{22}$$

$$\mu_i^{**} = (1-f)\mu + f\mu^* + \frac{f(1-f)(\mu^*-\mu)(1/\mu^*-1/\mu)}{(1-f)/\mu + f/\mu^* + (k/\mu^*)/(k+2\mu)} \tag{23}$$

$$\alpha_a^{**} = (1-f)\alpha + f\alpha^* + f(1-f)(\alpha-\alpha) \left[\frac{C-D}{AC-BD} E^*-1 \right] \tag{24}$$

$$\alpha_i^{**} = (1-f)\alpha + f\alpha^* + f(1-f)(\alpha-\alpha) \left[\frac{A-B}{AC-BD} E^*-1 \right] \tag{25}$$

여기서,

$$A = (1-f) \frac{2\nu\nu^*\mu^* + 2(1-2\nu^*)\mu}{1-\nu} + 2f(1-\nu^*)\mu^* \tag{26}$$

$$B = (1-f) \frac{\nu\mu^* + (1-2\nu^*)\nu\mu}{1-\nu} + 2f\nu^*\mu^* \tag{27}$$

$$C = (1-f) \frac{\mu^* + (1-2\nu^*)\mu}{1-\nu} + 2f\mu^* \tag{28}$$

$$D = (1-f) \frac{2\nu^*\mu^* + 2(1-2\nu^*)\nu\mu}{1-\nu} + 4f\nu^*\mu^* \tag{29}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

3.3 적층 복합재

이 경우도 전 항에서 나타낸 일 방향 장 섬유 강화재에 대한 것과 동일하게 거시적 대칭성이 있으므로 독립적인 탄성계수는 5개, 독립적인 팽창계수는 2개가 된다. 따라서, 전 항의 일 방향 장 섬유 강화재에 대한 섬유축 방향을 적층판의 판 면법선 방향에 대응시켜 생각하면, 식 (14) ~ (18)에서 정의한 5개의 탄성계수 E_a^{**} , ν_a^{**} , k_i^{**} , μ_a^{**} 및 μ_i^{**} 으로 주어지며, 선폽창계수에 대해서도 동일하게 α_a^{**} 과 α_i^{**} 으로 나타내어 각각의 판 면법선 방향 및 판면 평행방향의 값으로 한다. 결과는,

$$\frac{1}{E_a^{**}} = \frac{(1-f)}{E} + \frac{f}{E^*} - \frac{f(1-f)(2/EE^*)(\nu^*E-\nu E^*)^2}{(1-f)(1-\nu^*)E + f(1-\nu)E^*} \tag{30}$$

$$\frac{1}{\nu_a^{**}} = \frac{(1-f)}{\nu} + \frac{f}{\nu^*} + \frac{f(1-f)(1/2)(1/\nu^*-1/\nu k)(\nu^*E-\nu E^*)}{(1-f)(1-\nu^*)\nu + f(1-\nu)\nu^*} \tag{31}$$

$$\frac{1}{k_i^{**}} = \frac{2(1-\nu^*)(1-\nu)}{(1-f)(1-\nu^*)E + f(1-\nu)E^*} - 4E_a^{**} \left(\frac{\nu_a^{**}}{E_a^{**}} \right)^2 \tag{32}$$

$$\frac{1}{\mu_i^{**}} = \frac{1-f}{\mu} + \frac{f}{\mu^*} \tag{33}$$

$$\mu_i^{**} = (1-f)\mu + f\mu^* \tag{34}$$

$$\alpha_a^{**} = (1-f)\alpha + f\alpha^*$$

$$+ \frac{f(1-f)(\alpha - \alpha^*)2(\nu^*E - \nu E^*)}{(1-f)(1-\nu^*)E + f(1-\nu)E^*} \quad (35)$$

$$\alpha_i^* = (1-f)\alpha + f\alpha^* +$$

$$\frac{f(1-f)(\alpha^* - \alpha)(1-\nu)E^* - (1-\nu^*)E}{(1-f)(1-\nu^*)E + f(1-\nu)E^*} \quad (36)$$

3.4 일방향 단섬유 강화 복합재

강화상 단섬유를 식 (7)의 형태 ($c/a > 1$)로 하고, 계산에 필요한 Eshelby 텐서 S_{ijkl} 의 값은 모상의 Poisson 비와 섬유의 축비 (c/a)의 함수로 나타낸다(부록참조).⁶⁾ 따라서 이 경우의 복합재료에 대해서도 지금까지와 동일하게 취급할 수 있으나, 해석적으로 일반식을 얻기 위해서는 다소 복잡하기 때문에 여기서는 유리섬유-에폭시 복합재료 및 보론 섬유-알루미늄 복합재료에 대한 수치계산 결과의 일례를 나타낸다. Fig. 2는 일방향 섬유 강화재에 있어서 가장 커다란 강화 효과가 얻어지는 섬유 축 방향에 주목하고, 그 방향의 영률 E_a^* 의 섬유 체적률 의존성이 섬유 축비를 바꿈으로써 어느 정도 변화하는가를 유리 섬유-에폭시 복합체에 대해서 조사하여 나타낸 것이다. Fig. 2에서의 c/a 및 f 는 각각 유리섬유의 축비와 체적률을 나타내고 있으며, 각 구성요소의 탄성률 및 Poisson비는 $E_{\text{glass}} = 7,000\text{kg/mm}^2$, $\nu_{\text{glass}} = 0.23$, $E_{\text{epoxy}} = 300\text{kg/mm}^2$, $\nu_{\text{epoxy}} = 0.36$ 라 가정하였다. Fig. 2에서 가장 위에 있는 직선은 단순한 혼합법칙(rule of mixtures)의 결과를 나타내고 있으며, 이는 $c/a \rightarrow \infty$ 의 연속 장섬유 강화재에 대한 결과 식 (19)에 근사하게 일치하고 있다. 또한 가장 하위의 곡선은 $c/a=1$ 의 구상 입자 분산 강화재에 대한 결과이다. 축비의 증가에 따라 E_a^* 가 점차 혼합법칙의 값에 가까워지고 있음을 알 수 있다. 이 결과를 Fig. 3에서는 구성상 영률의 비가 다른 두 개의 복합재료로서 유리섬유-에폭시 및 보론 섬유-알루미늄 복합재료를 선택하여, 이들의 섬유 체적률이 0.5일 때 얻어지는 축 방향 영률 E_a^* 의 혼합법칙 값 $\langle E \rangle$ 에 대한 분할을 섬유 축비에 대해서 나타내었다. $E_a^*/\langle E \rangle$ 의 값은 축비 c/a 및 E^*/E 에 의존하고, $E_a^*/\langle E \rangle$ 의 어떤 일정 값을 얻는데 있어 E^*/E 이 작을수록, c/a 가 작을수록 유리한 것이 일반적이다. 즉, Fig. 3에서 알 수 있는 것처럼 예를 들어 $E_a^*/\langle E \rangle = 0.9$ 가 되는 c/a 의 값은 보론 섬유-알루미늄 계에서 약 7인 것에 비해 유리-에폭시 복합재료에서는 약 25가 된다.

종래의 단섬유 강화 복합재료의 영률에 관해서는 Cox⁷⁾의 모델이 기초가 되었다. 이 모델에서는 외부 응력에 대해 모상의 응력 분포는 균일하다고 가정하고 단섬유 축 방향의 응력 분포를 규정하였다. 즉 섬유 축 방향의 탄성계수를 해석할 수 있는 모델이다. 그러나 이 모델에서는 섬유와 모상의 탄성계수의 차에 기인하는 내부응력의 고려가 없으며, 섬유의 축방향의 성질만이 해석 가능한 거시 역학적 해석 방법이었다.

4. 고 찰

이상의 계산 결과를 지금까지 보고된 여러 가지 결과와

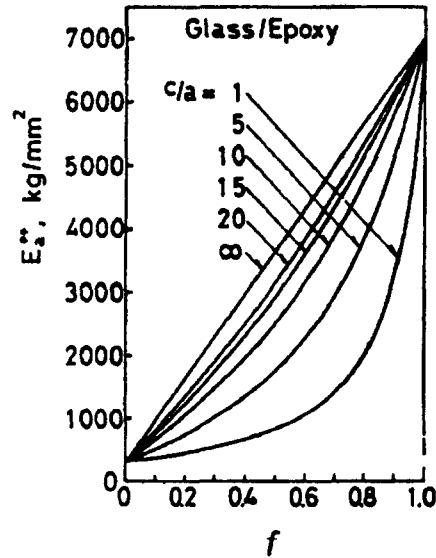


Fig. 2. Axial Young's modulus E_a^* of aligned discontinuous glass fiber/epoxy composites. c/a and f are the aspect ratio and volume fraction of glass fiber, respectively. Assumed moduli for the constituents are : $E_{\text{glass}} = 7,000\text{kg/mm}^2$, $\nu_{\text{glass}} = 0.23$, $E_{\text{epoxy}} = 300\text{kg/mm}^2$, $\nu_{\text{epoxy}} = 0.36$.

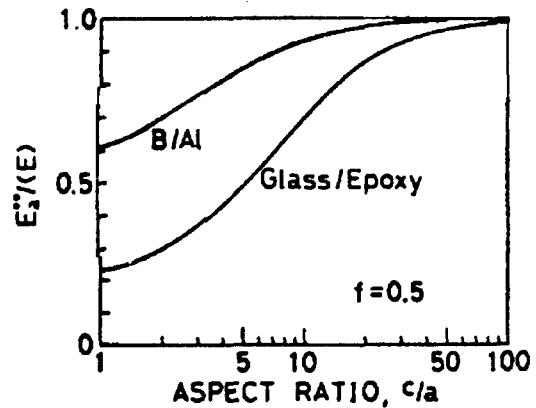


Fig. 3. Modulus ratio, $E_a^*/\langle E \rangle$, as a function of the aspect ratio of fibers in unidirectional boron fiber/aluminum and glass fiber/epoxy composites containing 50% fiber. (E_a^* : axial Young's modulus, $\langle E \rangle$: rule of mixtures prediction) Assumed moduli for the constituents are : $E_{\text{glass}} = 7,000\text{kg/mm}^2$, $\nu_{\text{glass}} = 0.23$, $E_{\text{epoxy}} = 300\text{kg/mm}^2$, $\nu_{\text{epoxy}} = 0.36$, $E_B = 42,000\text{kg/mm}^2$, $\nu_B = 0.20$, $E_{Al} = 7,040\text{kg/mm}^2$, $\nu_{Al} = 0.30$.

비교한다. 열팽창 계수에 관해서는 그리 많은 연구보고가 없어 주로 탄성계수에 관해서 비교를 언급한다.

우선, 구상 입자분산형 복합재에 대해서 얻어진 결과는, 이전 Kerner⁸⁾가 제시한 방법과 전혀 다른 취급 방법에도 불구하고 그 결과와 일치하고 있다. 더욱이 그 결과는 임의의 상조직을 갖는 거시적으로 등방체인 복합재에 대해서 얻어진 Hashin-Shtrikman⁹⁾의 K^* 및 μ^* 에 대한 하한치(lower bounds)와도 일치하고 있다. Kerner가 이용한 모형이란, 개재물과 동일한 탄성계수를 갖는 1개의 구상 입자의 주위에 모상과 동일 탄성계수를 갖는 구각(양과겹질 형상)을 고려하고, 더욱이 그 외측에는 구하고자 하는 복합체의 것과 동일 탄성계수를 갖는 무한 매체가 존재한다

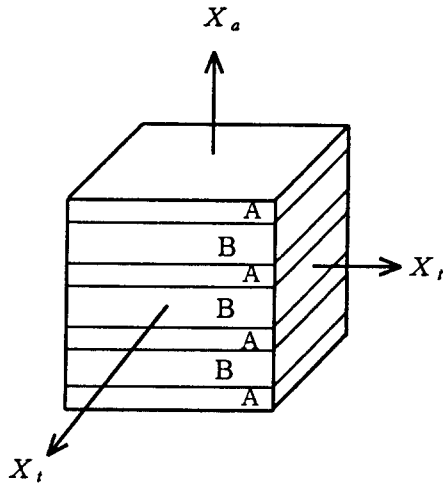


Fig. 4. Schematic illustration of layered composite. Both phases labeled by A and B are assumed to be elastically isotropic.

고 하는 것이다. 이와 같은 모형을 이용하는 배경에는 입자 체적률이 높은 복합체에 대해서는 입자간의 탄성적 상호작용을 어떤 형태로든 고려해야하기 때문이며, 그 때문에 Kerner는 상기와 같은 모형을 고려하였다고 생각된다. 한편 Budiansky¹⁰⁾ 및 Hill¹¹⁾에 의해 제시된 해석모델 (self-consistent 접근법)은 Kerner의 방법과 다소 다른 모형이 이용되고 있다. 즉, 그들의 모형에서는 Kerner의 모형에 대한 모상과 동일 탄성계수를 갖는 구각의 존재가 생략되어 있다. 이들 2개의 모형은 다수의 구상입자를 포함하는 복합체에 대한 것으로서 직감적으로 도입된 것이기 때문에 단지 모형화의 면에서는 그들의 우열은 결정하기 어렵다. 그러나 이들의 모형을 이용하여 도출된 결과를 비교한 경우, Budiansky-Hill의 결과에는 다음과 같은 불합리한 점이 내포되어 있다. 즉, 극한의 경우로서 비압축성 모상 ($K = \infty$) 중에 구상 공공 ($K^* = \mu^* = 0$) 혹은 강체구 ($K^* = \mu^* = \infty$)가 분산된 복합체를 고려하면 공공의 체적률이 50% 이상에서는 $K^* = \mu^* = 0$, 또한 강체구의 체적률이 40% 이상에서는 $K^* = \infty$ 의 타당한 값이 되나, μ^* 까지도 $\mu^* = \infty$ 가 되어 받아들이기 어려운 결과가 된다. 이에 대해서 Kerner의 결과 (본 계산 결과 : 식 (11) ~ (12))는 상기와 같이 극한의 경우에 대해서도 불합리한 점 없이 건전한 결과가 된다고 생각된다. 한편, 체적 탄성률에 대한 표식, 식 (11)은, Hashin¹²⁾의 해석모델에 의한 결과와 일치하는 것을 알 수 있다.

다음으로, 일 방향 장 섬유 강화재에 대한 결과, 식 (19) ~ (23)에 대해서 검토한다. 이들 표식은 임의의 단면형상을 하고 있는 연속 섬유에 의한 일 방향 강화재에 대해서 Hill¹³⁾ 및 Hashin¹⁴⁾이 제시한 탄성계수의 하한치와 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한, Hashin-Rosen¹⁵⁾ 모델에 의한 결과와 비교한 경우, 그들이 구할 수 있었던 4가지의 정밀한 해는 식 (19) ~ (22)와 일치하고 있음을 알 수 있다. 한편 보론 섬유-에폭시 계에서 얻어진 실험결과는 Hill 및 Hashin의 하한치의 근방에 있음도 알려져 있으므로, 이들을 총합하면 본 계산 결과는 실제에 가까운 예측이 가능하

다고 생각할 수 있다.

이상, 구상 입자 분산 강화재와 일방향 섬유 강화재에 관해 지금까지의 결과와 비교를 행하였다. 그러나, 적층재에 관해서는 본 연구에서와 같이 2종류의 등방 탄성체로 구성되었다는 해석의 취급은 보고된 바 없어 타 연구의 결과와 비교할 수는 없지만, 식 (30) ~ (36)은 다음과 같은 간단한 해석으로부터 본 연구의 방법과는 독립적으로 도출 가능함을 나타낼 수 있다. Fig. 4에 나타낸 것처럼, E, ν 로 이루어지는 탄성계수를 갖는 A 층과 E^*, ν^* 로 이루어지는 B 층이 각각 체적률 $(1-f)$ 및 f 를 가지고 적층된 충분한 크기를 갖는 적층재를 고려한다. x_a 축 및 x_i 축을 각각 적층 방향과 적층판에 평행한 방향으로 잡고, x_a 축 방향에 단순 인장 응력 σ_a 를 작용시킨 경우, A, B 양 층에 발생하는 탄성변형은, 대칭성으로부터 $\epsilon_a^A, \epsilon_a^B, \epsilon_i^A, \epsilon_i^B$ 만으로 생각할 수 있다. 응력을 $\sigma_a^A, \sigma_a^B, \sigma_i^A, \sigma_i^B$ 로 하고, Hooke의 법칙을 적용하면, A 층에서는,

$$\sigma_a^A = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\epsilon_a^A + 2\nu\epsilon_i^A \} \quad (37)$$

$$\sigma_i^A = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu\epsilon_a^A + \epsilon_i^A) \quad (38)$$

또한 B 층에서는,

$$\sigma_a^B = \frac{E^*}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \{ (1-\nu^*)\epsilon_a^B + 2\nu^*\epsilon_i^B \} \quad (39)$$

$$\sigma_i^B = \frac{E^*}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} (\nu^*\epsilon_a^B + \epsilon_i^B) \quad (40)$$

한편, 응력의 연속조건으로부터

$$\sigma_a^A = \sigma_a^B = \sigma_a \quad (41)$$

$$(1-f)\sigma_i^A + f\sigma_i^B = 0 \quad (42)$$

이며, 또한 A, B 양 층의 접착 계면에 있어서 불일치가 없으므로

$$\epsilon_i^A = \epsilon_i^B \quad (43)$$

가 된다. 적층재의 x_a 축 방향의 연신 ϵ_a 는

$$\epsilon_a = \epsilon_a^A + \epsilon_a^B \quad (44)$$

로 주어지기 때문에, 식 (37) ~ (44)를 이용하면, $E_a^{**} = \sigma_a / \epsilon_a$ 에 의해 정의된 적층재의 x_a 축 방향 영률을 E, E_a, ν, ν^* 및 f 의 함수로 표현할 수 있으며, 그 결과는 식 (30)과 일치하고 있음을 알 수 있다. 동일한 방법으로 식 (31) ~ (36)도 도출 가능하지만 그 구체적인 것은 생략한다.

5. 결 론

본 연구에서는 Part I에서 전개한 일반이론을 적용하여

복합재료의 거시적 탄성계수와 열팽창계수의 산정을 시도하였다. 해석방법에서는 강화물 형상을 타원체 개재물로 가정하고 Eshelby 텐서를 도입하여 다양한 강화재의 응력-변형관계를 통일적으로 취급하였다. 타원체 개재물의 축비를 변화시켜 입자 강화 복합재료에 대해서는 입자를 구형 ($a/c=1$)으로, 섬유 강화재에 대해서는 섬유형상을 편장 타원체로 취급함으로써 단섬유 ($a/c>1$), 장섬유 ($a/c \rightarrow \infty$)를 불문하고 통일적으로 해석하여 그 타당성을 탄성계수 및 열팽창 계수의 고찰로부터 검토하였다.

부 록

단섬유에 대한 Eshelby tensor⁵⁾

단섬유가 식(7)의 형(c/a)에 가까운 경우, Eshelby 텐서 S_{ijkl} 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= S_{2222} = Q\xi + R\Psi \\
 S_{3333} &= Q\eta + 2R(2\pi - \Psi) \\
 S_{1122} &= S_{2211} = \frac{1}{3}Q\xi - R\Psi \\
 S_{1133} &= S_{2233} = Q\xi - R\Psi \\
 S_{3311} &= S_{3322} = Q\xi/\alpha^2 - 2R(2\pi - \Psi) \\
 S_{1212} &= \dots = \frac{1}{3}Q\xi + R\Psi \\
 S_{2323} &= \dots = S_{3131} = \dots = \frac{1}{2}Q\xi\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}R(4\pi - \Psi)
 \end{aligned}$$

여기서, α 는 섬유 축비 ($\alpha = c/a$),

$$\begin{aligned}
 \Psi &= 2\pi \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} [\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \ln(\sqrt{\alpha^2-1})] \\
 \xi &= \frac{1}{\alpha^2-1} (\pi\alpha^2 - \frac{3}{4}\Psi) \\
 \zeta &= \Psi - \frac{4}{3}\xi \\
 \eta &= \frac{4}{3}\pi - 2\zeta
 \end{aligned}$$

Q 와 R 은 모양의 Poisson비 ν 에 의존하는 정수로

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{3}{8\pi(1-\nu)}, \\
 R &= \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}
 \end{aligned}$$

나타낼 수 있다.

참 고 문 헌

1. Z. Hanshin : Appl. Mech. Rev., **17**, 1 (1964)
2. G. P. Sendeckyj : Composite Materials., (Lawrence J. Broutman & Richard H. Krock, Eds.) Vol. 2, Mechanics of Composite Materials, Academic, New York, 45 (1973).
3. Z. Hanshin : Appl. Mechanics of Composite Materials (F. W. Wendt, H. Liebowitz & (1967).
4. C. -S. Kang, K. Maeda, K. -J. Wang, K. Wakashima : Acta mater., **46**, 1209 (1998).
5. C. -S. Kang, B. K. Ahn, K. Wakashima : J. of the Korean Inst. of Met. & Mater., **38**, 84 (2000).
6. J. D. Eshelby : Proc. Roy. Soc. London, **A241**, 376 (1957).
7. H. L. Cox : Brit. J. Appl. Phys., **3**, 72 (1952).
8. E. H. Kerner : Proc. Phys. Soc., **69B**, 808 (1956).
9. Z. Hanshin, S. Shtrikman : J. Mech. Phys. Solids, **11**, 127 (1963).
10. B. Budiansky : J. Mech. Phys. **13**, 223 (1965).
11. R. Hill : J. Mech. Phys. Solids, **13**, 189 (1965).
12. Z. Hanshin : J. Appl. Mech., **29E**, 143 (1962).
13. R. Hill : J. Mech. Phys. Solids, **12**, 199 (1964).
14. Z. Hanshin : J. Mech. Phys. Solids, **13**, 119 (1965).
15. Z. Hanshin, B. W. Rosen : J. Appl. Mech., **31**, 223, (1964).