대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.2, 267~279 September 2001

중학교 학생들의 수 개념 조사

나 귀 수 (한국교육과정평가원)

1. 들어가며

본 연구는 서울 소재 중학교에 재학중인 175명의 학생을 대상으로 우리 나라 중학교 3학년 학생들의 수 개념을 조사한 것이다.[1] 본 연구에서 조사의 초점은 학생들에게 수 개념이 어느 정도 확립되어 있는가 하는 것이다. 다시 말해서, '학생들이 다양한 수를 정확하게 분류할 수 있는가?', '수 개념에 대한 명제를 어느 정도 이해하고 있는가?', '유리수, 무리수, 실수의 정의를 어느 정도 알고 있는가?' 등의 문제를 중심으로 학생들의 수 개념 이해 정도를 조사하였다.

현행 우리 나라 교육과정에 따르면, 중학교 1학년에서 정수, 유리수를, 중학교 2학년에서 무한소수와 순환소수와 유리수를, 중학교 3학년에서 무리수와 실수를 지도하도록 되어 있다. 따라서 본 연구의 조사 대상인 중학교 3학년 학생들은 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수를 배운 상태에서 조사에 임한 것이다. 본 연구의 조사에 참여한 학생들은 제6차 교육과정을 이수한 학생들로서, 검사는 2000년 5월에 보통의 교실 조건에서 시행되었으며, 시간은 약 40분 가량 소요되었다.

2. 조사 결과 및 논의

(1) 수의 분류

1) 본 연구의 검사에 참여한 175명의 학생들은 서울시 양천구 소재의 세 학교 A, B, C에 재학중인 학생들이다. 그러므로 본 연구의 결과를 우리 나라 중학교 3학년 학생들 전체로 일반화하기에는 한계가 있다. 한편, 표집된 학생들은 A 학교에서 두 학급, B 학교에서 두 학급, C 학교에서 한 학급에 속해 있으며, 표집된 학급의 평균 수학 성적은 소속 학교의 평균 성적에 근접해 있다.

<문제 1>은 제시된 다양한 수를 학생들이 정확하게 분류할 수 있는가에 초점을 맞춘 것이며, <문제 1>에 대한 학생들의 정답율은 <표 1>과 같다.

<문제 1>

<문제 1> <보기>에 제시된 수에서 각 문항에 해당하는 수를 모두 골라 쓰시오.

<보기>

$-2,\ 5,\ 0,\ -\frac{4}{7},\ -2.454545\cdots,\ 1.542137\cdots,\ \sqrt{6},\ 0.93,\ \frac{3}{5},\ \pi,\ \sqrt{4}$

(1) <보기>에서 자연수인 것을 모두 쓰시오.
(2) <보기>에서 정수인 것을 모두 쓰시오.
(3) <보기>에서 유리수인 것을 모두 쓰시오.
(4) <보기>에서 무리수인 것을 모두 쓰시오.
(5) <보기>에서 실수인 것을 모두 쓰시오.
(6) <보기>에서 음수인 것을 모두 쓰시오.
(7) <보기>에서 양수인 것을 모두 쓰시오.

문제 1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
정답율(%)	29.1	17.7	8.6	16	37.1	74.9	30.3

<표 1> <문제 1>에 대한 학생들의 정답율

<표 1>에서 알 수 있는 바와 같이, 대부분의 학생들은 다양한 수를 정확하게 분류하지 못하고 있다. <문제 1>의 응답에서 가장 두드러지게 나타나는 특징은, 학생들이 어떤 수가 동시에 자연수, 정수, 유리수, 실수일 수 있다는 사실에 거부감을 느낀다는 것이다. 예컨대, -2는 정수이지만 유리수는 아니라든가, $-\frac{4}{7}$는 유리수이지만 실수는 아니라는 식의 오류가 나타나는데, 57.1%에 해당하는 학생들이 이러한 오류를 보였다.

이러한 오류는 개념을 '개별화', 또는 '구획화(blocking)'하는 학생들의 경향과 관련이 있다. 여기에서 '개별화' 경향이란 개념들이 서로 충돌하지 않도록 개념들 사이에 칸막이를 설치하여 개념을 개별화 또는 구획화하는 것을 의미한다(Hiebert, 1987; Zykova, 1969). 이러한 경향을 보이는 학생들은 각각의 개념을 분리되어 있는 것으로 파악한다. 개별화된 개념은 학생들을 구속하여 한 개념에서 다른 개념으로 이행할 수 있는 가능성을 박탈하며, 개념들간의 관련성을 구축하는 것을 방해한다. 이러한 경향은 개념에 극단적으로 개별화된 특성을 부과하여, 결국 문제해결과 같은 맥락에서 그 개념을 적용하는 것을 방해한다.

개념의 '개별화' 특징은, 다음의 <표 2>와 같은 학생 A의 응답을 예로 들어 생각해 볼

수 있다. 이 학생은 5는 자연수에는 속하지만, 정수, 유리수, 실수에는 속하지 않는다고 생각하고 있다. 마찬가지로, 0은 정수이지만 유리수도 실수도 아닌 것으로 파악하고 있다.

(1) 5, $\sqrt{4}$,	(2) -2, 0	(3) $-\frac{4}{7}$, 0.93, $\frac{3}{5}$
(4) -2.454545⋯, 1.542137⋯, π		
(5) $-\frac{4}{7}$, 0.93, $\frac{3}{5}$, -2.454545⋯, 1.542137⋯, π		
(6) -2, $-\frac{4}{7}$, -2.454545⋯, 0.93, $\frac{3}{5}$, π		
(7) 5, 0, 1.542137⋯, 0.93, $\frac{3}{5}$, $\sqrt{4}$		

<표 2> <문제 1>에 대한 학생 A의 응답

각각의 문항에 대한 학생들의 반응을 자세하게 살펴보면 다음과 같다. 자연수를 찾아내는 (1)번 문제에서 학생들이 가장 많은 오류를 범한 부분은 0을 자연수에 포함시키는 것과 $\sqrt{4}$를 자연수에 포함시키지 않은 것이다. 0을 자연수에 포함시킨 학생들은 26.5%이며, $\sqrt{4}$를 자연수에 포함시키지 않은 학생들은 37.1%이다. 0을 자연수에 포함시키는 학생들은, 초등학교 1학년에서부터 자연수와 0을 거의 함께 다룸으로써 0을 자연수로 이해하고 있는 것으로 생각된다. 또한, $\sqrt{4}$를 포함시키지 않은 학생들은 $\sqrt{4}$의 외형적 형태에만 주목함으로써 $\sqrt{4}$를 자연수가 아닌 것으로 파악하는 것으로 생각된다.

정수를 모두 쓰는 (2)번 문제에서 학생들이 가장 많이 보인 오류는, 자연수를 정수에 포함시키지 않는 오류, 5와 $\sqrt{4}$를 정수에 포함시키지 않는 오류, 0을 정수에 포함시키지 않는 오류, $\sqrt{6}$을 정수에 포함시킨 오류이다. 또한 어떤 학생들은 $-\frac{4}{7}$, -2.454545⋯, 0.93, $\frac{3}{5}$, π 등을 정수에 포함시키는 오류를 보였다.

유리수를 모두 쓰는 (3)번 문제에서 학생들이 가장 많이 보인 오류는, 자연수나 정수에 속하는 수를 유리수에 포함시키지 않는 오류, -2.454545⋯을 유리수에 포함시키지 않는 오류, 1.542137⋯을 유리수에 포함시키는 오류이다.

무리수를 모두 쓰는 (4)번 문제에서 학생들이 가장 많이 보인 오류는, $\sqrt{6}$과 π을 무리수에 포함시키지 않는 오류와 $\sqrt{4}$, $-\frac{4}{7}$, -2.454545⋯등을 무리수에 포함시키는 오류이다. $\sqrt{4}$를 무리수에 포함시킨 학생들은 근호로 나타낸 수는 무리수라는 잘못된 개념 이미지를 갖고 있으며, -2.454545⋯를 무리수에 포함시킨 학생들은 무한소수를 모두 무리수로 파악하고

있는 것으로 생각된다. 또한 $-\frac{4}{7}$를 무리수에 포함시킨 학생들은 $-\frac{4}{7}$를 소수로 고쳤을 때 유한소수가 아니라는 것을 생각하여 무리수에 포함시킨 것으로 파악된다. 이런 오류는 중학교 2학년에서 배운 유리수와 유한소수와 순환하는 무한소수를 착각하여 발생하는 것이라고 할 수 있다.

실수를 쓰는 (5)번 문제에서는 자연수나 정수나 유리수를 실수에 포함시키지 않는 오류, π와 $\sqrt{6}$를 실수에 포함시키지 않는 오류 등 다양한 오류들이 나타났다. 양수를 모두 쓰는 (6)번 문제에 대한 정답율이 음수를 모두 쓰는 (7)번 문제에 대한 정답율보다 낮은 이유는 0, π, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$ 의 영향이 크다. 18.3%의 학생들이 0을 양수인 것으로 생각하고 있으며, $\sqrt{4}$나 $\sqrt{6}$을 양수에 포함시키지 않은 학생들은 17.1%로 나타났다. π는 무리수인 원주율을 대표하는 기호임에도 불구하고, π를 양수로 취급하지 않은 학생들이 23.5%로 나타났다.

(2) 수 체계의 이해

<문제 2>는 학생들이 수 체계를 어느 정도 이해하고 있는가를 알아보기 위한 것으로서, 수의 포함관계를 정확하게 알고 있는가에 초점을 맞춘 것이다. <문제 2>의 <보기>에 제시된 각 명제의 참·거짓에 대한 학생들의 정답율은 <표 3>과 같다.

<문제 2>

<문제 2> 아래의 <보기>에 제시된 명제 중에서 참인 것과 거짓인 것을 모두 골라 쓰세요.

<보기>

(1) 자연수는 모두 정수이다. (2) 정수는 모두 유리수이다.
(3) 정수는 모두 자연수이다. (4) 자연수는 모두 유리수이다.
(5) 정수는 모두 실수이다. (6) 실수는 모두 무리수이다.
(7) 유리수는 모두 실수이다. (8) 자연수는 모두 실수이다.
(9) 실수는 모두 유리수이다. (10) 유리수는 모두 정수이다.
(11) 무리수는 모두 실수이다.

* 참인 명제:
* 거짓인 명제:

문제 2	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
정답율(%)	63.4	47.4	46.3	48	54.9	61.6	58.9	50.9	58.3	57.7	51.4

<표 3> <문제 2>에 대한 학생들의 정답율

한편, <문제 1>과 <문제 2>에 대한 학생들의 응답을 동시에 고려하면 학생들의 수 개념과 관련된 중요한 인지적 특징이 발견되는데, 그것은 바로 <문제 2>에 대한 응답과 <문제 1>에 대한 응답이 서로 연결되지 않고 분리되어 있다는 것이다. 다시 말해서 수를 분류하는 <문제 1>에 대한 응답과 수에 관한 명제의 참·거짓을 구별하는 <문제 2>에 대한 응답이 서로 일관되지 않는다는 것인데, 이러한 경향을 보인 학생들이 40%에 달하였다. 이 학생들의 경우 수 개념이 혼란 상태에 있다고 할 수 있다.

위에서 언급한 학생 A는 <문제 2>에서 '자연수는 모두 정수이다', '자연수는 모두 유리수이다', '자연수는 모두 실수이다', '정수는 모두 유리수이다', '정수는 모두 실수이다'라는 명제를 참인 명제라고 답하였다. 그러나 <문제 1>에서는 <표 2>와 같은 응답을 하였다. 예컨대, 이 학생은 '자연수는 모두 정수이다'라는 명제가 참이라고 답하였지만, <문제 1>의 정수를 모두 쓰는 문제에서는 자연수 5는 정수에 포함시키지 않고 0과 -2만을 정수라고 답하였다. 이러한 오류를 보이는 학생들은 '자연수는 모두 정수이다'라는 명제의 의미를 제대로 이해하지 못한 것이다. 이런 학생들은 사고 내용을 명제에 담아 명제를 수단으로 사고할 수 있는, 소위 피아제(Piaget)의 형식적 사고기에 도달하지 못한 것이라고 할 수 있다.

한편, <문제 2>에서 명제를 제시하고 참인가 거짓인가를 구별하도록 하는 문제의 질문 형식으로 인해, 학생들은 명제의 의미를 정확히 이해하지 못하고서 정답을 할 수도 있다. 실제로 <문제 1>과 <문제 2>의 모든 문항에 대해 정확한 답을 한 학생은 2.9%에 불과했다.

(3) 유리수와 무리수의 이해

<문제 3>은 학생들이 중학교에 와서 본격적으로 학습한 유리수, 무리수, 소수, 유한소수, 무한소수, 순환소수 사이의 관계를 정확하게 이해하고 있는가에 초점을 맞춘 것이다. <문제 3>의 각 문항에 대한 학생들의 정답율은 <표 4>와 같다.

<표 4>에서 알 수 있는 바와 같이, 소수, 유리수, 무리수의 관계에 대하여 60% 이상의 정답율을 보인 내용은, 유한소수는 모두 유리수라는 것과 무리수는 두 정수의 비로 나타낼 수 없다는 것 두 가지 뿐이다.

63.4%의 학생들은 순환소수가 무한소수가 아니라고 이해하고 있거나, 순환소수와 무한소수 사이의 관계를 전혀 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 53.7%의 학생들은 순환소수와 무리수의 관계를 제대로 이해하고 있지 못하며, 67.4%의 학생들은 무한소수와 무리수의 관계를 제대로 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 또한 45.1%, 57.2%, 51.4%의 학생들이 각각 순환소수와 무리수, 유리수와 두 정수의 비, 소수와 유리수의 관계를 제대로 이해하지 못하

고 있는 것으로 나타났다. 한편 '순환소수는 모두 무리수이다'라는 명제와 '순환소수는 모두 유리수이다'라는 명제를 모두 참이라고 답한 학생이 34.9%인데, 이 학생들의 경우에는 서로 대비되는 개념으로서의 유리수와 무리수의 개념이 형성되어 있지 않다고 할 수 있다. <문제 3>의 모든 문항에 대해 모두 옳은 답을 한 학생은 3.4%에 불과했다.

<문제 3>

<문제 3> 아래의 <보기>에 제시된 명제 중에서 참인 것과 거짓인 것을 모두 골라 쓰세요.

<보기>
(1) 순환소수는 모두 무한소수이다. (2) 순환소수는 모두 유리수이다.
(3) 무한소수는 모두 무리수이다. (4) 유한소수는 모두 유리수이다.
(5) 순환소수는 모두 무리수이다. (6) 유리수는 모두 두 정수의 비로 나타낼 수 있다.
(7) 소수는 모두 유리수이다. (8) 무리수는 모두 두 정수의 비로 나타낼 수 있다.

* 참인 명제:
* 거짓인 명제:

문제 3	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
정답율(%)	36.6	46.3	32.6	66.3	54.9	42.9	48.6	65.7

<표 4> <문제 3>에 대한 학생들의 정답율

<문제 1>에 대한 응답과 <문제 3>에 대한 응답을 동시에 분석해 보면, (2)절의 '수 체계의 이해'에서 언급한 바 있는, 수 개념의 예를 선택하는 문제에 대한 응답과 수 개념 관련 명제에 대한 응답이 일관적이지 않은 현상이 여기에서도 나타남을 알 수 있다. 예컨대, <문제 3>의 (2)번 문항 '순환소수는 모두 유리수이다'가 참인 명제라고 답한 46.3%의 학생들 중에서 23.2%가 <문제 1>에서 -2.454545…를 유리수에 포함시키지 않았다.

이러한 조사 결과에서 알 수 있는 것은, 소수, 무한소수, 유한소수, 순환소수, 유리수, 무리수에 대한 개념 체계가 학생들에게 명확하게 형성되어 있지 않다는 것이다. 학생들은 초등학교에서 배운 소수, 중학교 1학년에서 배운 유리수, 중학교 2학년에서 배운 유한소수와 무한소수, 순환소수와 유리수, 중학교 3학년에서 배운 순환하지 않는 무한소수와 무리수 등의 개념을 혼란스러워하고 있는 것이다.

유리수, 무리수 개념과 관련된 위와 같은 오류를 드러낸 20명의 학생들을 면담한 결과, 초등학교에서 소수에 대해 학습한 내용, 중학교 2학년에서 학습한 유한소수와 무한소수의 구분 등이 학생들의 유리수, 무리수 개념 확립에 장애로 작용한다는 사실이 드러났다. 초등

학교에서는 소수를 학습하면서 소수를 분수로 나타내는 연습을 하는데, 이것이 학생들에게 '소수는 모두 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다'라는 식으로 고착된다. 결국, 이러한 오개념을 갖는 학생들은 초등학교에서 다루었던 소수는 유한소수라는 것을 인식하지 못한 것이다. 또한, 중학교 2학년에서 학습한 유한소수와 무한소수의 구분은 학생들의 혼란을 막기 위해 미리 마련된 장치인데, 이것이 '유한소수는 유리수, 무한소수는 무리수이다'라는 식으로 고착되어 학생들의 유리수, 무리수 개념 형성에 장애로 작용하는 것이다.

이러한 면담 결과는 소위 '인식론적 장애'로 해석될 수 있는데, '인식론적 장애'는 학생의 과거의 지식이 현재의 학습에(또는 현재의 지식이 장래의 학습에) 장애로 작용할 가능성이 있음을 의미한다(Brousseau, 1997, pp. 86-87). 다시 말하여, 이전에는 흥미롭고 성공적이었던 지식이 현재에는 부적합함으로 인해 학생들의 현재 학습에 어려움을 초래한다는 것이다. 이러한 인식론적 장애는 회피할 수 없을 뿐만 아니라 잘못된 지식을 구성하기까지 하는바, 인식론적 장애를 극복하기 위해서는 학생이 기존에 가지고 있는 잘못된 개념이 틀리거나 부적합한 것으로 부각될 수 있는 상황(situation)이나 문제를 제기해야 한다. 결국 학생들이 오개념을 극복할 수 있는 상황이나 문제를 설정하는 것이 중요한데, 본 논문에서는 그러한 상황이나 문제 설정의 범위까지는 나아가지 못하고 있다.

한편 교과서를 살펴보면, 현재 우리 나라에서 사용되고 있는 대부분의 교과서에서 유한소수, 무한소수, 순환소수, 유리수와 순환소수, 무리수를 다음과 같은 방식으로 설명하고 있음을 알 수 있다. 다음과 같은 현행 교과서의 전개 순서에서, 대부분의 학생들은 소수를 유한소수와 무한소수로 구분하고, 무한소수로부터 순환소수를 도입한 후에, 분수 중에서 유한소수와 순환소수로 표현될 수 있는 것을 구분하고, 다시 순환소수를 유리수와 관련짓는 이중의 분류와 범주화로 인해 많은 어려움을 겪는다고 생각된다.

> 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한 개인 소수를 유한소수라 하고, 유한소수가 아닌 소수를 무한소수라 한다.………
> 한편 0.333…, 0.424242…와 같이 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 무한소수를 순환소수라 한다.………
> (예제 1) 다음 분수를 소수로 나타내고, 유한소수와 순환소수를 찾아라.………
> [문제 2] 다음 등식이 성립함을 확인하여라
> (1) 5=0.4999…   (2) 1=0.9999…   ………
> 위에서 모든 순환소수는 유리수이고, 역으로 0이 아닌 모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.(박 두일 외, 1997a, pp. 12-17)

이와 같이, 순환하지 않는 무한소수를 무리수라고 한다.(박 두일 외, 1997b, p. 19)

위의 교과서 전개 순서에서, 유한소수, 무한소수, 순환소수는, 분수를 소수로 표현했을 때 유한소수나 순환소수로 표현될 것을 대비해서 미리 도입하는 것이다. 그러나 프로이덴탈(Freudenthal, 1983)의 '교수학적 현상학'에 따르면, 이러한 지도 방식은 다분히 '반교수학적 전도'에 해당된다. '반교수학적 전도'는, 본질이라고 할 수 있는 수학적 개념이 요구되는 현상을 제시하고 그 현상을 정리하는 수단으로서 개념을 도입하는 대신에, 현상을 제시하지 않고 개념을 미리 형식적으로 조급하게 도입함으로써 현상과 본질의 도입 순서가 전도되는 것을 의미한다. 이러한 '반교수학적 전도'에서 탈피하는 가능한 한 가지 방식으로, 학생들로 하여금 분수를 소수로 표현해 보는 활동을 먼저 경험하게 한 다음에, 분수의 소수 표현에서 발생할 두 종류의 소수를 정리하는 수단으로서 유한소수와 순환소수 개념을 도입하는 방식을 생각해 볼 수 있다.

이러한 맥락에서, 현재의 지도 계열인 '유리수 → 유한소수·무한소수 → 순환소수 → 분수의 소수(유한소수와 무한소수) 표현 → 유한소수의 순환소수 표현 → 순환소수와 유리수 → 순환하지 않는 무한소수와 무리수'는 재고의 여지가 있다. 의미 풍부한 맥락에서 순환소수를 유리수와, 순환하지 않는 무한소수를 무리수와 관련시키지 않고, '유한소수'에 대한 정의까지 하면서 소수를 유한소수와 무한소수로 미리 구분한 후에 유리수와 무리수를 지도하는 현재의 방식은 교수학적으로 별다른 가치가 없다고 생각된다. 현재의 지도 계열 대신에 '유리수 → 분수의 소수 표현 → 유리수와 유한소수·순환소수 → 유한소수의 순환소수 표현 → 순환소수와 유리수 → 순환하지 않는 무한소수와 무리수'와 같은 지도 계열을 생각해 볼 수 있지만, 이러한 지도 계열은 충분한 연구를 통해 검증된 후에 실제로 적용될 수 있을 것이다.

(4) 수의 정의

<문제 4>는 학생들이 유리수·무리수·실수의 정의를 어떻게 알고 있는가를 조사한 것이다. <문제 4>의 각 문항에 대한 학생들의 정답율은 <표 5>와 같다.

<문제 4>의 (1)번 유리수의 정의에 대해서는 '분수로 표현할 수 있는 수', '두 정수의 비로 표현할 수 있는 수', '순환소수' 라고 쓴 응답을 옳은 것으로 분류하였다. <표 4>에서 보는 바와 같이, 32%의 학생들이 옳은 답을 제시했으며, 57.1%의 학생들이 아무런 답도 제시하지 못했다. 나머지 학생들은 여러 가지의 틀린 답을 제시하였다. 가장 많이 나온 오답은 유리수를 '한계가 있는 수, 끝이 있는 수, 나누어지는 수, 답이 정해져 있는 것'으로서 8.6%

의 학생들이 이런 답을 제시하였는데, 이 학생들에게 있어서 유리수는 '유한성'을 의미한다고 할 수 있다.

<문제 4>

<문제 4>
(1) 유리수의 정의를 쓰고, 유리수에 대해 아는 사실을 가능한 한 자세하게 설명해 보시오.
(2) 무리수의 정의를 쓰고, 무리수에 대해 아는 사실을 가능한 한 자세하게 설명해 보시오.
(3) 실수의 정의를 쓰고, 실수에 대해 아는 사실을 가능한 한 자세하게 설명해 보시오.

문제 4	(1)	(2)	(3)
정답율(%)	32	26.3	38.3

<표 5> <문제 4>에 대한 학생들의 정답율

(2)번 무리수의 정의에 대해서는 '분수로 표현할 수 없는 수', '순환하지 않는 무한소수', '두 정수의 비로 표현할 수 없는 수'를 옳은 답으로 간주하였다. 26.3%의 학생들이 옳은 답을 했으며, 51.4%의 학생들은 아무런 답도 제시하지 못했다. 나머지 학생들은 여러 가지의 틀린 답을 제시하였다. 가장 많이 나온 오답은 무리수를 '한계가 없는 수, 끝이 없는 수, 더 이상 나누어지지 않는 수, 답이 무한한 것, 숫자가 무한히 나가는 것'으로서 18.3%의 학생들이 이런 답을 제시하였다. 이런 답을 한 학생들은 무리수가 순환하지 않는 무한소수라는 사실을 간과한 것으로서, 학생들의 이런 대답에는 바로 소수 자리수의 무한성(즉, 완벽하게 표현할 수 없는 수) 그 자체가 무리수를 나타낸다는 생각이 내포되어 있다고 할 수 있다.

(1)번과 (2)번에 대한 응답을 통해, 수 개념에 있어서는 '유리수'에서 '유', '무리수'에서 '무'와 같이 용어가 주는 '유한하다', '무한하다'는 느낌이 학생들의 개념 이미지에 강력한 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.[2] 유리수를 '유한'과 관련된 것으로, 무리수를 '무한'과 관련된 것으로 파악하는 학생들은, '유리수'와 '무리수'에서 '유'와 '무'에만 집중하고 '리'의 의미를 충분히 이해하지 못한 것이다. 학생들의 이러한 오류는 용어의 문제에서 비롯된다고 할 수 있다. 원래의 용어인 'rational number', 'irrational number'에는 비(ratio)와 관련되어 구분되는 수가 'rational number'와 'irrational number'이며, 'rational number'는 '비로 나타낼 수 있는 수', 'irrational number'는 '비로 나타낼 수 없는 수'라는 의미가 용어 자체에 내포

2) 이는, 평행사변형과 같은 기하 개념에서는 그림(drawings)이나 상(image)이 학생들의 개념 이미지에 강한 영향을 미치는 것과는 대조적이다. 수 개념과 기하 개념에서의 이러한 차이는 평행사변형과 같은 기하 개념은 개념에 해당하는 전형적인 시각적 모델이 있는 반면에, 유리수와 같은 수 개념은 시각적 모델이 없는 데서 기인한다고 할 수 있다.

되어 있다. 그러나 우리의 용어인 '유리수'나 '무리수'는 영어의 'rational number', 'irrational number'를 한문으로 번역한 '有理數', '無理數'를 차용한 것이다. 한문인 '有理數', '無理數'에서 '理'는 비를 의미한다고 하지만, 우리의 용어인 '유리수'나 '무리수'에서 '리'는 비와 관련된 의미나 느낌이 전혀 없다. 결국 우리 나라의 학생들은 '유리수'나 '무리수'에서 자신들에게 익숙한 '유'와 '무'에 집중함으로써 잘못된 개념 이미지를 형성할 위험성이 훨씬 높다고 할 수 있다. 이러한 결과와 분석은, 우리 나라에서 사용하고 있는 수학적 용어의 적합성 문제를 신중하게 검토해야 할 필요성을 부각시킨다고 하겠다.

질문 (3)에 대해서는 '유리수이거나 무리수인 수', '우리가 아는 모든 수'를 실수의 정의에 대한 정답으로 간주하였다.[3] 38.8%의 학생들이 정확하게 대답한 반면에 69%의 학생들은 아무런 답도 제시하지 못하였다.

한편, <문제 4>와 <문제 1>에 대한 학생들의 대답을 동시에 고려했을 때, 흥미로운 사실이 나타난다. 21.1%의 학생들이 <문제 4>의 유리수 정의에 대해서는 옳은 답을 제시했지만, 유리수의 예를 모두 쓰는 <문제 1>의 (3)번 문항에 대해서는 틀린 답을 제시하였다. 예컨대, 유리수의 정의에 대해서는 '분수로 나타낼 수 있는 수'라고 답하고 <문제 1>의 (3)번에 대해서는 '$-\frac{4}{7}$, 0.93, $\frac{3}{5}$'이라는 틀린 답을 제시한 학생이 이런 경우에 해당된다. 이러한 오류를 보이는 학생들은 자연수, 정수, 순환소수를 분수로 표현할 수 있다는 사실을 간과한 것인데, 이는 이미 (1)절에서 언급한 바 있는, 자연수나 정수에 속하는 수를 유리수에 포함시키지 않거나, $-2.454545\cdots$을 유리수에 포함시키지 않는 학생들의 오류와 일맥 상통한 것이다.

개념을 갖는다는 것을 개념을 언어적 수준에서 추상적으로 이해할 뿐만 아니라 개념을 통해서 그 개념이 실제로 적용될 수 있는 사례들을 볼 수 있는 능력을 의미한다고 할 때 (졸고, 1996, p. 351), 유리수의 정의를 올바르게 답한 32%의 학생들 중에서 21.1%의 학생들을 제외한 10.9%의 학생들만이 유리수 개념을 제대로 갖고 있다고 할 수 있다. 이상의 결과를 종합해 볼 때, 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수, 분수, 유한소수, 무한소수, 순환소수, 순환하지 않는 무한소수 등의 용어가 많은 학생들의 마음에 혼란스럽게 자리잡고 있음을 알 수 있다.

---

3) '우리가 아는 모든 수'를 실수의 정의에 대한 정답으로 간주한 것은, 언어적으로 명확하게 기술된 것은 아니지만, 중학교 3학년 학생들에게 있어서는 '우리가 아는 모든 수'가 실수를 의미하는데 충분하다고 판단했기 때문이다.

3. 맺으며

본 논문에서는 우리 나라 중학교 3학년 학생들의 수 개념을 검사지를 통해 조사하였다. 이상에서 논의한 바와 같이, 대부분의 학생들에게 있어서 수 개념은 의미 충실하게 형성되어 있지 않다고 할 수 있다. 대부분의 학생들은 다양한 수를 정확하게 분류하지도 못할 뿐만 아니라 수 개념의 정의를 언어적 수준에서 설명하지 못한다. 또한 학생들은 수 개념과 관련된 명제의 단순한 참·거짓은 구별하면서도 그 명제가 갖는 의미를 완전하게 이해하지는 못한 것으로 나타났다.

수의 분류에 관한 학생들의 주요 오개념은, 학생들이 수를 '개별화' 또는 '구획화'한다는 것이다. 이러한 오개념을 갖는 학생들은 어떤 수가 동시에 자연수, 정수, 유리수, 실수일 수 있다는 사실을 거부함으로써, 개념을 분리되어 있는 것으로 파악하고 개념들간의 관련성을 구축하는 데 어려움을 겪는다.

본 논문에서는 수 체계의 이해와 관련하여 수 체계와 관련된 명제의 참·거짓을 학생들로 하여금 구별하도록 질문하였다. 학생들의 응답에서 나타난 결과는, 예컨대, '자연수는 모두 정수이다'와 같은 수 체계에 대한 명제의 의미를 제대로 이해하지 못하고 있다는 것이다. 그리고 대부분의 학생들에게 있어서 수의 분류에 대한 응답과 수 체계에 대한 응답이 일관되지 않은 결과가 나타났다.

유리수, 무리수, 실수의 정의를 쓰는 문제에 대해서는, 유리수를 '유한한 것'으로 무리수를 '무한한 것'으로 취급하는 오류가 주로 나타났다. 이러한 결과로부터, '유리수'에서 '유', '무리수'에서 '무'와 같이 용어가 주는 느낌이 학생들의 개념 이미지에 많은 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 학생들의 이러한 오류는 수학적 용어의 문제와도 연결되는바, 우리 나라에서 사용하는 있는 수학적 용어의 적합성에 대한 신중한 검토가 필요하다고 하겠다.

또한, 본 논문에서는 유리수와 무리수 개념에 대한 학생들의 오개념을 '인식론적 장애', '교수학적 현상학'과 관련하여 논의하였다. '인식론적 장애'와 관련하여, 초등학교에서 소수에 대해 학습한 내용, 중학교 2학년에서 학습한 유한소수와 무한소수의 구분 등이 학생들의 유리수, 무리수 개념 확립에 장애로 작용한다는 사실이 드러났다. 또한 '교수학적 현상학'과 관련해서는, 현재의 지도 계열인 '유리수 → 유한소수·무한소수 → 순환소수 → 분수의 소수(유한소수와 무한소수) 표현 → 유한소수의 순환소수 표현 → 순환소수와 유리수 → 순환하지 않는 무한소수와 무리수'를 재고할 필요가 있음이 드러났다.

한편, 본 논문에서는 검사지를 통해서 학생들의 수 개념 이해 정도를 조사하는데 중점을

두었던 바, 학생들의 빈약한 수 개념의 원인이 어디에 있는지, 학생들의 수 개념을 개선하기 위해서 어떻게 해야 할 것인가에 대한 소박한 논의만 제시되었을 뿐 적극적인 논의가 충분히 이루어지지 못했다. 수 개념 지도의 적극적인 개선 방향을 논의하기 위해서는, 학생들의 수 개념에 대한 조사와 더불어 수 개념을 지도하는 교실 상황, 교육과정, 교과서를 더욱 철저하게 분석할 필요가 있으므로 이에 대한 연구가 시급히 이루어져야 할 것으로 생각된다.

참고문헌

박두일 외.(1997a). 중학교 수학 2. 교학사.

박두일 외.(1997b). 중학교 수학 3. 교학사.

우정호.(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

졸고.(1997). 기하 개념의 이해와 적용에 관한 소고. 대한수학교육학회 논문집, 7(2), 349-358.

Brousseau, G.(1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kruwer Academic Publishers.

Fischbein, E., & Jehiam, R and Cohen, D.(1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.

Freudenthal, H.(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherland: D. Reidel Pubishing Company.

Hiebert, J., & Lefevre, P.(1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1-27.

Zykova, V. I.(1969). Operating with concepts when solving geometry problems. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Vol. 1, 93-148. Chicago, IL: University of Chicago.

A Study on the Number Concept of Middle School Students

Na, Gwi-Soo (KICE)

The aim of this study is to examine the number concept of middle school student at grade 9. The research problems of this study are "Can the students classify the various number correctly?", "How do the students understand the proposition related to the number concept?", and "How do the students know the definition of rational number, irrational number, and real number?". In order to examine these problems, we analyze the students' responses about the questions related to the number concept. The result of this examination is that the number concept of students is very insufficient and lacking.