대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.2, 281~294 September 2001

통계 영역에서 대표값의 의미와 지도에 관한 고찰

박 영 희 (청주교육대학교)

1. 서론

Moore(1992)는 통계적 자료의 맥락에 따라 자료의 의미가 해석되고, 자료의 특성에 따라 분석 방법이 결정된다고 하였다. 따라서 통계 영역의 개념 이해와 분석 방법의 선택은 통계 자료의 맥락과 특성에 따라 행해져야 한다.

평균은 7차 교육과정의 5-나 단계 목표인 '자료를 정리하여 이를 줄기와 잎 그림으로 나타낼 수 있고, 주어진 자료의 평균을 구할 수 있다'와 7-나 단계 목표인 '간단한 통계 자료를 조사, 정리하여 표나 그래프로 나타내고, 평균을 구할 수 있다'에서 나타나듯이 자료 및 표나 그래프에서 그 값을 구하는 것으로 도입된다. 이때의 평균은 산술평균을 의미한다. 6차 교육과정에 이어 7차 교육과정에서도 자료의 중심 경향을 나타내는 대표값으로 산술평균만을 도입한다.

그런데, 우리 나라 교과서에서 산술평균은 성적이나 몸무게 등의 자료 또는 도수분포표가 주어지고 그에 대한 평균을 구하는 것으로 되어 있다. 더욱이 '다음 자료의 평균을 구하여라. 76, 80, 84, 78, 82'와 같이 자료의 배경 맥락이 없이 평균을 구하는 계산에 중점을 두는 경향이 있다. 그렇지만, 박경미(2000)에 의하면 미국 중 1 교재는 '자료의 특성에 따른 그래프와 대표값의 선택'이라는 주제를 취하고 있다. 그리고, 맥락을 배제하면서 계산식으로 결과를 얻는 방식은 NCTM(2000)에서 다음과 같이 제시하는 6-8학년의 통계 영역 규준을 만족할 수 없다.

> 주어진 자료의 대표값으로서 평균, 중앙값, 최빈수를 찾아 기술하고 해석할 수 있어야 한다. 특정한 상황에서 어떤 수치가 가장 적합한 지를 알아야 한다. 그리고 각각이 자료의 어떤 점을 대표하고 대표하지 못하는 지를 이해해야 한다.

또한, 최근에 자료에 근거하여 자료의 숨겨진 특징을 다각도로 찾아내는 탐색적 자료분석의 방법에 근거하여 대표값을 도입해야 할 것이다. 이에 대하여 우정호(2000)는 '초중고에 걸쳐 탐색적 자료분석이 보다 적극적으로 도입되어야 할 것이다. 자료의 특성에 따라 대표값으로 평균 및 최빈값과 함께 저항성이 있는 대표값인 중앙값을 적절히 사용하도록 해야 한다'고 하였다.

산술평균은 명목형 자료 및 서열적 자료에 대해서는 자료의 중심 경향을 나타내기에 부적합하고, 특이점에 민감한 단점을 갖고 있다. 따라서 어떤 통계적 자료의 대표값으로서 산술평균만을 학생들이 학습하는 것은 자료의 특성과 맥락에 따라 통계적 분석 방법 선택과 의미 해석을 달리 할 수 있어야 한다는 통계 교육의 목적중의 하나를 놓치고 있는 것이다. 따라서 학생들은 산술평균과 더불어 중앙값, 최빈값을 학습하고 더 나아가 일상 생활에서 많이 사용되고 상황에 따라 산술평균대신 사용되는 조화평균, 기하평균에 대한 내용도 배워야 할 것이다.

그리고, 맥락과 자료에 알맞은 대표값을 적용하고 그 결과를 분석하기 위해서 학생들이 여러 대표값들이 각각 적용되는 상황을 통해 그 의미와 적용 범위를 알도록 해야 한다. 또한, Bakker(2000)가 강조하듯이 학생들이 일반적 형식 또는 알고리즘을 배우기 전에 대표값의 많은 질적인 측면을 우선 발견하도록 해야 한다.

다음에 대표값의 역사적 발달 및 시각적 해석을 소개하고, 대표값의 다양한 의미를 지도하기 위한 상황 및 문제를 제시하였다.

2. 여러 대표값의 의미와 지도

(1) 산술평균의 의미와 지도

산술평균은 대표값 중에서 가장 널리 사용되는데, 학생들은 산술평균의 계산식만이 아니라 그 안에 추정, 상호조정, 균형점, 공평함과 재분배, 오차의 최소화, 가중평균의 여러 의미가 있음을 알아야 할 것이다. 그리고, 산술평균의 무리한 적용의 단점도 알아야 할 것이다.

가. 추정

산술평균에 대한 추정은 전체 합을 구하는 것과 관련이 있다. $n\times\mu=\Sigma$(n: 개수, μ: 평균, Σ: 전체합)에서 전체합을 구하기 위해 산술평균을 추정하여야 하고 이때 산술평균을 정확하게 구하지 않고 산술평균의 많은 의미를 암묵적으로 사용할 수 있다(Bakker, 2000).

큰 나무에 달린 열매의 수를 추정할 때, 평균 개수의 열매가 달려있는 듯한 가지를 선택하여 그 가지에 달린 열매의 수를 세고 다시 전체 나무의 가짓수를 세어서 전체 열매의 수를 구하였다는 얘기가 전해진다.

우리 나라의 콩 한 말 세기 얘기도 산술평균의 추정 개념과 관련된다.

> 조선시대 이항복이 아홉 살 때 개구쟁이인 항복을 아버지가 혼내주려고 하루만에 콩 한말을 세어 놓으라고 했다. 항복은 콩 한 사발을 퍼서 그 밥사발에 들어 있는 콩의 수를 하인들에게 세게 하였다. 그리고 밥사발로 콩을 퍼서 콩 한말을 채웠다. 그런 후에 밥사발에 들어 있던 콩의 수와 콩 한 말을 채우기 위해 필요한 밥사발의 수를 곱하여 콩 한 말의 수를 구하였다.

이런 상황 속에서 학생들이 전체 나뭇가지 중에서 적절한 가지(열매가 너무 달리지도 않고 너무 작게 달리지도 않은 가지)를 선택하거나 콩이 다르게 담겨있는 사발들 중에서 적절하게 담겨 있는 사발을 선택하는 문제를 해결하도록 지도할 수 있다.

그리고, 5학년 학생들에게 '제한무게가 500Kg인 엘리베이터에 너희가 몇 명 정도 탈 수 있는가? 너희들의 몸무게를 정확히 알지 못한다고 하고 해결하여라'란 문제를 제시하여 $\Sigma/\mu = n$인 방법으로 그 답을 구하도록 할 수 있다. 이 때 μ를 구하기 위해 학생들은 자신들 몸무게의 평균이 얼마가 될지를 추정해야 한다.

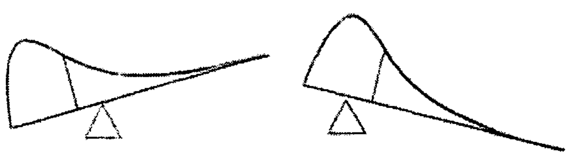
나. 그리스적 정의: 상호조정

그리스 수학은 주로 기하학적이고 시각적이었으며 이는 산술평균의 정의에도 나타나 있다. 이 시대에 a와 c(a<c)의 산술평균인 b는 b-a=c-b로 정의된다. 이를 수직선에 나타내면 산술평균이 서로 다른 두 수의 중간임을 알 수 있다. 여러 값들에 대해 정의되는 현대의 산술평균이 계산이 간편하고, 일반화하기 쉬운 반면, 그리스적 정의는 시각적으로 이해하기 쉽고, 상호조정의 의미를 담고 있다. 이러한 그리스적 정의는 최대값과 최소값의 평균인 범위의 중앙(midrange)과 비슷하다. 그리고, 현대의 산술평균의 정의보다 앞서서 도입한다면 산술평균이 최소값과 최대값 사이에 있어야 한다는 시각적 직관을 학생들이 가질 수 있을 것이다(Bakker, 2000).

다. 확률분포곡선에서 균형점

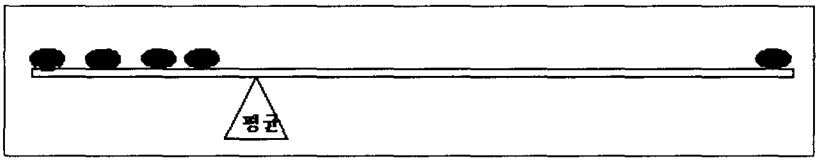
관측치들이 단위무게를 갖는다고 가정하여, 그 관측치가 나타날 확률에 따라 확률분포함

수의 곡선과 x축사이의 무게가 결정된다고 하자. 그래서, 확률분포함수에 대한 곡선이 x축과 이루는 부분이 딱딱한 물질로 만들어졌다고 할 때, 그 확률분포함수에 대한 산술평균에 해당하는 x축의 지점은 <그림 1>처럼 왼쪽과 오른쪽의 균형을 맞춰주는 지레받침이 놓이는 위치가 된다[1](Moore & McCabe, 1993). 이를 이용하면 비대칭분포일 때에 왜 평균이 분포의 꼬리 쪽으로 중앙값보다 더 치우치게 되는지를 학생들이 시각적으로 쉽게 이해하도록 도울 수 있을 것이다.



<그림 1> 균형점으로서 산술평균

그리고, 산술평균이 특이점으로부터 얼마나 많은 영향을 받는지에 대하여 그림 2와 같은 모델을 통해 학생들의 직관적 이해를 도울 수 있다. <그림 2>에서 왼쪽에서 세 번째가 중앙값이 되고 따라서 중앙값이 특이점으로부터 영향을 덜 받음을 보여 줄 수 있다.



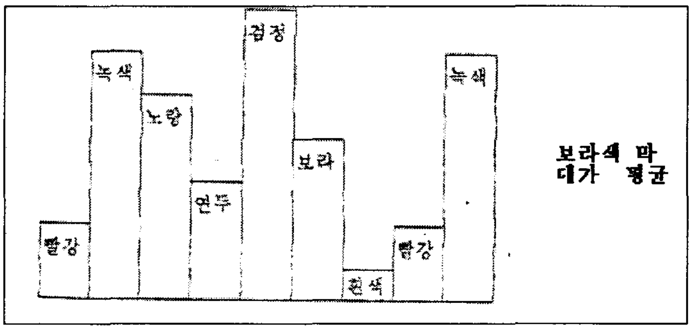
<그림 2> 특이점에 민감한 평균

라. 공평함과 재분배

평균이라는 아이디어는 원시적인 보험에 그 기원을 두고 있다. 과거에 폭풍우로 배가 위험할 때 배의 짐 일부를 바다에 던져서 위험을 벗어나면, 짐을 잃은 주인들은 무사히 운반된 짐의 주인들과 협의하여 보상을 받았었다. 이때의 배상금에 대한 단어가 현대의 평균의 기원이 되었다고 한다(Bakker, 2000). 공평함과 재분배와 관련하여, 자료를 크기와 비례하는

1) m이 산술평균이라고 할 때, $\int(x-m)f(x)dx=\int xf(x)dx-m=0$이 성립하므로 무게가 평형이 될 때의 지렛대의 위치가 평균이다.

종이막대로 표시하도록 한 후에, 긴 종이를 잘라서 그것을 작은 종이에 붙이는 것으로 산술평균을 지도할 수 있다. 이외에 <그림 3>과 같이 퀴즈네르 막대 또는 십진블록 또는 바둑알 등을 이용할 수 있을 것이다(김성만 외, 1997). <그림 3>에서 막대들의 총합은 보라색 막대 9개의 총합과 같으며, 따라서 보라색 막대와 다른 막대간의 차이를 비교하면서 남거나 모자라는 부분을 합하면 0이 됨을 알 수 있고 따라서 $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$이 성립함을 직관적으로 이해하는데 도움이 될 것이다.



<그림 3> 퀴즈네르 막대를 이용한 산술평균 구하기

그리고 두 집단이상에 대하여 공평한 비교를 하기 위하여 산술평균이 사용된다. 또한 '30개의 과자를 7명에게 똑같이 나누어주기 위해서 한 사람에게 몇 개의 과자를 주어야 하는가'라는 문제처럼 공평한 분배를 위해 산술평균이 이용된다. 이때는 $n \times \mu = \Sigma$라는 식이 사용되는 추정의 의미와 다르게 $\Sigma / n = \mu$라는 식이 사용된다.

마. 오차의 최소화

관측 오차를 줄이기 위하여 평균을 취하는 방법은 천문학에서 주로 개발되었다. 오차의 합은 관측값 전체의 합과 비교할 때 상대적으로 작은 수라고 가정되었다. 그것은 달의 지름을 측정하거나, 금화의 무게를 잴 때 사용되었다.

산술평균의 이런 개념은 측정 영역과 관련하여 지도할 수 있다. 어떤 대상을 측정할 때, 한번 잰 값보다 여러 번 잰 값들의 산술평균이 더 참값에 가까울 가능성이 높다. 다른 예로는 학생들에게 1분에 호흡을 각자 몇 번 하는지 조사하라고 하고, 각자의 1분간 호흡수를 가능한 한 정확히 알기 위해 어떻게 구하여야 하는지 생각해 보라고 한다.

오차의 최소화를 위한 산술평균의 사용에 대한 학생들의 직관적인 이해는 이후에

$V(A) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2$를 최소화 할 수 있는 A값은 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 산술평균이라는 수리통계학의 정리2)와 연결될 수 있다.

바. 가중평균

앞에서는 주로 한 집단에 대한 대표값으로서 산술평균의 의미를 살펴보았는데, 두 집단 이상의 산술평균의 의미도 학생들이 알 필요가 있다. 두 집단 이상의 산술평균은 가중평균의 특수한 한 예로 볼 수 있다. 두 집단 이상이 있고 각 집단에 대한 산술평균이 주어져 있으며 각 집단들의 구성원 수가 서로 다르다고 할 때, 모든 집단을 합친 것의 대표값을 구한다고 하자. 이때, 모든 집단의 산술평균을 구하기 위해 총합을 구하게 되는데 각 집단 구성원수가 가중치가 되어서 각 집단의 평균과 곱하고 그 결과들을 합하여 총합을 얻는다.

그리고, '5학년 1반 학생들의 수학시험 성적 평균이 85점이다. 남학생의 평균은 81점이고, 여학생의 평균은 86점이다. 5학년 1반 남・여 학생 수의 비는 얼마인가?'라는 문제를 생각해 보자. 이 문제는 남자 수가 □, 여자 수가 △라고 할 때, $\frac{\square\times 81 + \triangle\times 86}{\square + \triangle} = 85$이므로 $(85-81)\times\square = (86-85)\times\triangle$에서 $\square : \triangle = 1:4$라고 답을 구할 수 있다. 이를 해결하기 위해서 남자 수와 여자 수가 각 집단에 대한 평균의 가중치가 되어야 한다. 학생들이 이를 이해하지 못하면 단순히 두 평균을 합하고 2로 나누어 전체의 산술평균을 구하는 오류를 범할 수 있다.

사. 산술평균의 단점

자료가 특이점을 포함하고 있을 때는 산술평균이 대표값으로서 제대로 역할을 못해 준다. 이외에도 산술평균의 맹점을 알도록, 주가지수 또는 물가지수의 계산에 산술평균을 적용하는 다음 상황을 학생들에게 제시할 수 있다.

기준일에 두 종목의 주식 가격이 10000원이었다. 그런데, 하루가 지날 때마다 종목 A는 10%씩 하락하고, 종목 B는 10%씩 상승하였다. 이때, 지수(두 종목의 산술평균)의 변동을 알아보면

1일 후: 산술평균=(9000 + 11000)/2 = 10000, 2일 후: 산술평균=(8100 + 12100)/2 = 10100

3일 후: 산술평균=(7290 + 13310)/2 = 10300, 4일 후: 산술평균=(6561 + 14641)/2 = 10601

2) HTTP://ebook.stat.ucla.edu/textbook/singles/describe_single/central/mean.html에 증명이 있음

로서 지수는 6% 정도 오른다. 두 종목이 각각 같은 비율로 상승과 하락을 하므로 지수가 일정하여야 할 것 같은데 왜 이렇게 지수가 상승하였을까? 산술평균대신 어떻게 지수를 정의하여야 할지도 생각하여라.

여기서 산술평균은 두 종목간의 가격차이를 반영하기 때문에 지수가 6% 상승으로 나타나게 되어 산술평균은 대표값으로서 역할을 못해 주고 있다. 따라서 실생활에서 많이 이용되는 주가지수[3]나 물가지수를 산술평균이 아니라 기준시점 대비 비교시점의 가격이라는 다른 방식으로 나타냄을 학생들이 이해하도록 할 수 있다.

아. 교과서의 평균 개념

7차교육과정을 따르는 교과서에서 평균 개념은 5학년 나 단계와 8학년 나 단계에 제시된다. 5학년 나 단계에서는 학생들이 주어진 자료의 합을 구하여 자료의 개수로 나누어서 평균을 구하도록 하며 평균과 자료의 개수를 곱하여 총합을 구하도록 한다. 그리고 8학년 나 단계에서 평균에 관한 목표는 도수분포표에서 평균의 뜻을 알고, 이를 구하도록 하며 평균이 의미 있게 이용되는 여러 실생활의 문제상황을 관찰하도록 제시되어 있다.

제시된 목표에서 '실생활의 문제상황'이 다루는 범위에 따라 학생들이 배우는 평균의 개념이 다양해질 수 있다. 그렇지만 목표에서 직접적으로 알 수 있는 바는 교과서에 제시되는 평균의 개념이 $n \times \mu = \Sigma$ 식이 사용되는 추정 의미와 $\Sigma / n = \mu$라는 식이 사용되는 공평함과 재분배 의미만 담고 있는 것이다.

평균이 담고있는 $\Sigma / \mu = n$를 사용하는 추정, 상호조정, 균형점, 오차의 최소화, 가중평균의 다양한 의미를 교육과정에서 제대로 반영되지 못하고 있다. 그리고, 산술평균이 특이점에 민감한 점, 지수의 변동성을 대표하지 못하는 점도 나타나 있지 않다. 따라서 다양한 문제 상황 및 자료를 통해 교과서에서 산술평균의 여러 측면을 조명할 수 있어야 할 것이다.

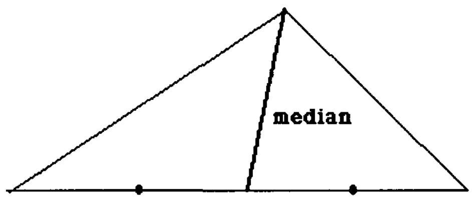
(2) 중앙값의 의미와 지도

F. Galton이 1883년에 median이라는 이름을 지었다. 그는 이 값을 평균보다 좋아했는데 그 이유는 그것이 평균보다 특이점에 둔감한 특성을 갖고 있으며 구하기도 더 쉬웠기 때문이다. 그는 중앙값에 대해 "시리즈의 가운데 위치를 차지하는 대상은 그 시리즈에서 그것보

3) 현재 우리나라 종합주가지수는 기준 시점의 시가총액(발행주식수*주가)과 비교시점의 시가총액을 비교하여 산출하는, 비교시점의 시가총액/기준시점의 시가총액 * 100을 사용한다.

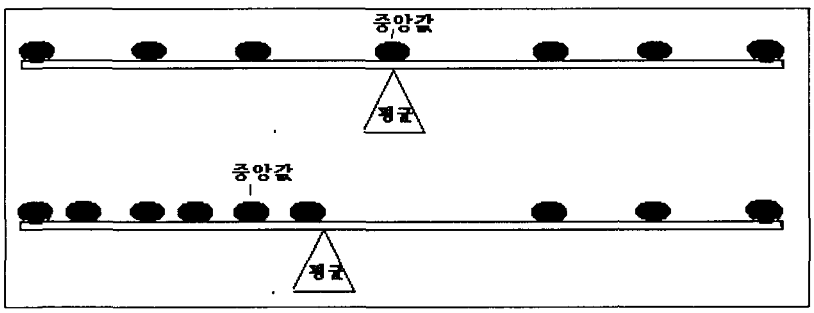
다 큰 대상들의 수가 그것보다 작은 대상들의 수와 같다는 특성을 갖고 있어야 한다"고 하였다.

median은 기하학에서 중점 혹은 중선을 의미한다. 삼각형에서 median은 한 꼭지점과 마주보는 변의 중점을 이은 선이며 따라서 그 median의 왼쪽과 오른쪽 부분은 같은 면적을 갖는다. 이런 이유로 중앙값을 영어로 median이라고 하였다(Bakker, 2000).



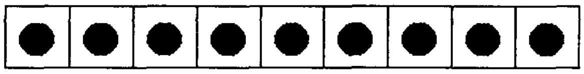
<그림 4> median의 기하학적 의미

확률분포곡선을 보고 그 위치를 찾을 때에 이런 중앙값과 기하학과의 관련이 이용된다. 확률분포곡선을 보고 학생들이 중앙값을 찾을 때 중앙값의 왼쪽과 오른쪽 부분의 면적이 같게 되는 지점을 찾도록 한다. <그림 5>와 같은 이산형 자료에 대한 모델에서는 자료의 개수가 연속형 자료에 대한 분포곡선의 면적에 해당하기 때문에 왼쪽과 오른쪽에 같은 개수가 되도록 하는 위치를 중앙값으로 정의할 수 있다. 이를 이용하면 산술평균과 중앙값을 확률분포곡선에서 찾을 때, 대칭분포에서는 산술평균과 중앙값이 같은 값을 갖지만 비대칭분포에서는 중앙값이 산술평균보다 봉우리 쪽에 더 가까움을 학생들이 시각적으로 알 수 있도록 할 수 있다.



<그림 5> 중앙값과 산술평균과의 위치 비교

다른 지도 모델로는 <그림 6>과 같이 정사각형의 격자가 그려져 있는 종이띠가 있고, 그 격자 하나마다 자료가 하나씩 들어 있다고 하자. 이때, 이 종이띠를 접어서 왼쪽 끝과 오른쪽 끝을 일치시키고 가운데 접히는 선에 해당하는 자료가 중앙값이 된다(Friel & Bright, 1998). 자료 개수가 홀수 개일 때는 가장 가운데 자료가 중앙값이 되고, 자료 개수가 짝수 개일 때는 가장 가운데 두 자료의 중간이 중앙값이 된다. 따라서 자료 개수의 홀수, 짝수에 따라 중앙값의 정의가 달라짐을 학생들이 이해하도록 할 수 있다.



<그림 6> 정사각형 격자로 이루어진 종이띠

(3) 최빈값의 의미와 지도

최빈값은 통계학자인 Karl Pearson이 1894년에 그 이름을 지었다(Bakker, 2000). 최빈값은 막대그래프에서 가장 큰 막대를 갖는 계급의 대표값이 되고, 확률밀도함수의 곡선에서는 가장 함수 값이 큰 지점의 확률변수값이 된다.

최빈값 지도에 유의할 점은 자료의 특성과 맥락에 따라 최빈값이 대표값으로서 의미가 있을 때를 학생들이 알도록 해야 하는 것이다.

그리스의 역사가인 Thucydides의 작품에는 다음과 같은 얘기가 있다.

> 아테네 사람들이 사다리를 만들기 위해 공격해 들어갈 성벽의 높이를 알려고 하였다. 그런데 벽돌 수를 정확히 셀 수 없었으므로 많은 사람들이 그 성벽의 벽돌 수를 헤아렸다. 어떤 사람들은 틀리게 헤아린 것 같았지만 다수는 옳게 세었을 것으로 보았다. 그래서 다수가 헤아린 개수로 그 성벽의 벽돌 수를 추정하였고 벽돌 하나의 개수가 얼마인지 추측하여서 필요한 사다리의 길이를 계산하였다(Bakker, 2000).

여기서 '다수'는 '절반 이상'이 아니고 '가장 빈번한 값'을 의미한다. 아테네 사람들은 가장 빈번한 값이 정확한 것으로 가정하였다.

현대 사회에서 의사 결정의 중요한 방법중의 하나가 투표이다. 투표에서는 가장 많이 나온 쪽이 전체 모집단을 대표하는 것으로 가정한다. 즉, 다수결의 원칙이 민주주의의 기본이다. 현대에도 그리스 시대와 마찬가지로 수량화 할 수 없는 자료에 대한 대표값으로 최빈값을 이용한다.

그 외에, 최빈값이 대표값으로 이용될 수 있음을 학생들이 알 수 있도록 기성복의 표준 치수, 여론조사 결과 같은 신문기사를 활용할 수 있다.

(4) 조화평균의 의미와 지도

조화평균은 원래 피타고라스에 의하여 정의되었는데 그는 두 수 a, b (a<b)의 조화평균 h를 (h-a)/(b-h)=a/b로 정의하였다. 피타고라스의 학교에서 조화평균은 음악이론과 관련하여 발전되었다. 이때 조화평균은 음악에서 현의 길이와 음정 사이의 관계를 수로 표현할 때 가장 조화로운 음의 탄생을 가져오는 평균이기 때문에 조화평균이라고 한다.

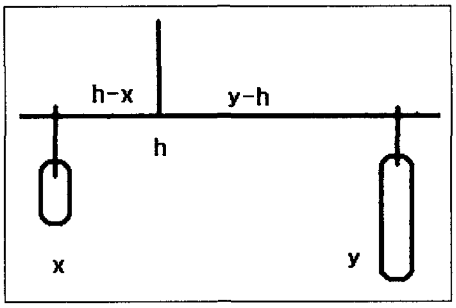
조화평균은 일의 능률, 평균속도, 평균연비 등의 평균을 구할 때 사용된다. 그래서, 만약 어떤 사람이 거리 d를 속도 x로 움직인 다음에, 거리 d를 속도 y로 움직이면 평균속도는 조화평균인 $\frac{거리}{시간} = \frac{2d}{d/x+d/y} = \frac{2xy}{x+y}$이다. 이 문제에서 두 개의 달린 거리 d가 일정하므로 h를 조화평균이라고 할 때 $\frac{2d}{h} = \frac{d}{x}+\frac{d}{y}$ 즉, 조화평균인 평균속도로 전체거리 2d를 달린 시간과 각각의 시간의 합은 같음을 이용하여 조화평균의 식을 유도할 수 있다. 만일 두 개의 달린 거리가 d_1, d_2로 같지 않다면 $\frac{d_1+d_2}{h} = \frac{d_1}{x}+\frac{d_2}{y}$로서 평균속도 h를 구해야 하며 이때의 h는 조화평균과 같지 않다. 따라서 교사는 학생들이 조화평균의 공식을 배우기에 앞서서 조화평균이 적용될 수 있는 조건 및 이와 같은 일반적인 유도식을 알도록 지도해야 할 것이다.

조화평균은 일정한 거리를 달린 것에 대한 평균속도 문제의 식에서 양변의 시간이 같거나, 그리고 일정한 거리를 달린 것에 대한 평균연비 문제의 식에서 양변의 소비된 연료량이 같거나, 일정한 가격의 상품의 평균가격 문제의 식에서 양변의 식의 상품량이 같음[4]을 의미하는 일반적인 식을 먼저 도입하고 그에 따라 조화평균을 유도하도록 해야 할 것이다.

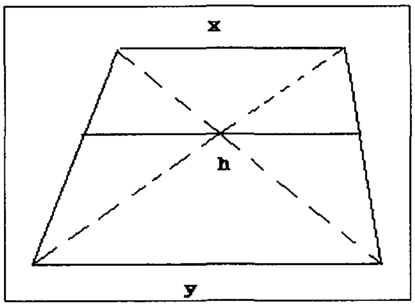
x, y(x < y)의 조화평균 h는 $\frac{h-x}{x} = \frac{y-h}{y}$를 만족한다. 이를 이용하여 <그림 7>처럼 조화평균을 무게 x와 y 사이에서 각각 거리가 h-x와 y-h인 무게중심으로 나타낼 수 있다. 그리고 <그림 8>에서 작도로 조화평균을 구하는 방법을 나타내었는데, x와 y를 평행한 윗변과 아랫변의 길이로 갖는 사다리꼴 내부의 두 대각선의 교점에서 밑변에 평행하게 선을 그을 때 생기는 내부의 선분 길이가 x, y의 조화평균인 h가 된다[5].

4) 한 되에 3000원 하는 쌀 30000원 어치와 한 되에 2000원 하는 보리 30000원 어치를 섞으면 이 보리쌀은 한 되에 약 얼마인가?

5) HTTP://jwilson.coe.uga.edu/emt725/HM/HM.html



<그림 7> 무게중심으로서의 조화평균



<그림 8> 작도로 조화평균 구하기

그리고, 조화평균은 능률에 관련된 일 문제와 관련이 있다. 다음의 전형적인 일 문제를 생각하자(Parker, 1997).

> 두 사람이 각기 혼자서 일을 다 하기 위해 x일과 y일이 필요하다. 만약 두 사람이 일을 완성하기 위해 같은 시간에 동시에 시작하여 같이 일을 한다면 며칠이 걸릴까?

주어진 일의 양을 d로 보면, 각 사람의 능률이 d/x, d/y이므로 합한 능률은 $d/x + d/y$이다. 따라서, 일을 마치는 데 걸리는 날 수는 $\frac{d}{d/x+d/y} = \frac{xy}{x+y}$이다. 이것은 두 사람의 일 능률을 같다고 보고 걸리는 날 수인 조화평균 $\frac{2xy}{x+y}$의 절반 동안에 일을 마칠 수 있음을 의미한다.

(5) 기하평균의 의미와 지도

그리스 시대에 사람들은 산술평균, 기하평균, 조화평균에 대해 알고 있었다. 그런데 그 당시의 수론은 0과 자연수, 유리수에 한정되어 있었다. 두 유리수의 산술평균은 항상 유리수가 되지만 기하평균은 대부분 무리수가 된다. 따라서 그 당시에 그리스인들이 기하평균을 기하학의 영역에만 국한시켰고 이것이 기하평균이란 이름이 붙은 이유가 된다(Kullman, 2001).

현대의 산술평균 A, 기하평균 G, 조화평균 H에 대해 $H = G^2/A$이 성립함을 피타고라스는 두 수 a, b에 대하여 $\frac{a}{(a+b)/2} = \frac{2ab/(a+b)}{b}$이라는 '황금비율'이 성립한다는 방식으로 알았다.

이러한 비율을 이용하여 비율의 평균을 구할 때 이용하는 기하평균에 대한, 다음과 같은

예를 생각해 보자.

어떤 물건값을 25% 할인하고 다시 25% 할인한다고 할 때, 처음값: 10000원, 중간값: 7500원, 마지막값: 5625원이 된다. 처음값×0.75=중간값, 중간값×0.75=마지막값이 되므로, 여기서 각 값 사이의 관계는 $0.75 = \frac{\text{중간값}}{\text{처음값}} = \frac{\text{마지막값}}{\text{중간값}}$ 이 된다(Parker, 1997).

이렇게 기하평균을 $\sqrt{\text{처음값} \times \text{마지막값}} = \text{중간값}$이라는 식으로 바로 도입하기 전에 각각의 비율을 이용하여 지도하면 학생들이 추론을 통해 그 의미를 이해할 수 있을 것이다.

또한, 기하평균을 다음과 같은 문제를 제시하여 기하적으로 지도할 수도 있다.

두 변의 길이가 a, b인 직사각형과 같은 면적을 갖는 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

그리고, 기하평균 $c = \sqrt{a \times b}$에 log함수를 적용하면 $\log c = \frac{\log a + \log b}{2}$가 되어 산술평균과 연결된다. 따라서, 두 수 a^n, a^m의 기하평균은 지수의 산술평균을 지수로 갖는 $a^{\frac{n+m}{2}}$이 되므로 등비수열의 어떤 두 수간의 기하평균은 산술평균으로 구할 수 있다(Flores, 1998).

3. 결론

대표값들은 옛날부터 암묵적으로 사용되어 왔다. 따라서 문화 속에서 다양한 의미를 내포하게 되었다. 그에 따라 대표값으로서 산술평균, 중앙값, 최빈값, 조화평균, 기하평균이 갖고 있는 여러 의미와 역사적 기원 및 지도 방법을 앞에서 제시하였다.

산술평균의 경우에는 대표값으로서 가장 널리 사용되어 왔기에 추정, 상호조정, 균형점, 공평함과 재분배, 오차의 최소화, 가중평균이라는 다양한 의미를 담고 있으며 각 의미마다 산술평균이 적용되는 상황이 다르다.

그래서, 가장 일반적으로 사용되는 산술평균은 상황에 따라 그 적용에 무리가 있을 수도 있음을 학생들이 알아야 한다. 자료의 특성에 따라서, 중앙값과 최빈값은 산술평균이 대표값으로 적용되기 어려울 때 사용됨을 알고, 그 역사적 기원 및 시각적 의미가 함께 학습되

어야 학생들이 적절한 상황에서 올바른 대표값을 선택할 수 있을 것이다.

또한, 교육과정에서 산술평균의 다양한 개념을 적절한 상황 속에서 나타나는 자료를 분석하며 시각적이고 조작적인 교구를 활용하면서 학생들이 익힐 수 있도록 제시되어야 한다. 또한, 중앙값 등의 다른 대표값도 산술평균의 단점을 보완하며 맹목적인 사용을 지양하도록 포함할 필요가 있다고 생각한다.

조화평균과 기하평균의 지도에서는 계산식을 지도하기 앞서서 학생들이 그 역사적 기원 및 적용될 수 있는 상황의 특수한 조건을 먼저 알도록 하고 다른 수학적 개념과 관련하여 지도하여야 학생들이 그 의미를 제대로 알 수 있을 것이다.

따라서, 대표값들이 갖는 역사적 맥락을 통해 학생들의 흥미를 일으키고, 대표값들이 갖는 여러 의미와 제한점을 적절한 상황 속에서 시각적 및 조작적 도구를 활용하면서 알 수 있도록 지도하여야 할 것이다. 그리고, 자료의 특성과 맥락에 적절한 대표값을 선택할 수 있도록 하여야 학생들이 자료의 특징을 올바로 나타낼 수 있을 것이다.

참고문헌

김성만 외 7인(1997). 열린 수학 수업을 위한 퀴즈네어 막대의 활용 방안 탐색. 한국수학교육학회 수학교육 프로시딩, 6, 117-130.

박경미(2000). 중학교 수학 교육과정과 교과서 내용의 양과 난이도에 대한 일 고찰. 대한수학교육학회 수학교육학연구발표대회논문집, 347-376.

우정호(2000). 통계교육의 개선방향 탐색. 대한수학교육학회지 학교수학, 2(1), 1-28.

Bakker, A.(2000). Historical and didactical phenomenology of the average values. *Proceedings of the Conference 'History and Epistemology in mathematical Education'*.

Flores, A.(1998). Mean machines. *The Mathematics Teacher*, 91(3), 266-268.

Friel, S. N. & Bright, G. W.(1998). Teach-stat: a model for professional development in data analysis and statistics for teachers K-6. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics learning teaching, and assessment in grades K-12*(pp. 89-117). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kullman, D. S.(2001). What's harmonic about the harmonic series? *The College*

Mathematics Journal, 32(3), 201-203.

Moore, D. S.(1992). What is statistics? In D. C. Hoaglin & D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics*(pp. 1-17). The Mathematical Association of America.

Moore, D. S. & McCabe, G. P. (1993). *Introduction to the Practice of Statistics.* Freeman.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Parker, M. (1997). The ups and downs of percent and some interesting connections. *School Science and Mathematics*, 97(8), 406-412.

A Study on the Meaning of Average Values and Its Teaching Statistics Area

Park, Young Hee (Chongju National University of Education)

As a measure of the center of data, arithmetical mean, median, mode, harmonic mean and geometric mean are generally used. Students must learn qualitative aspect of average values as well as its calculation for its adequate use. As the result of the learning, they should be able to select the appropriate average value according to the characteristic of data and problem context.

For this object, the historical origin and visual interpretation of average values were introduced in this paper. And to help teaching several meanings of average values, several examples including context were suggested.