대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.2, 447~473 September 2001

수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석

정 동 권 (인천교육대학교)

Ⅰ. 서언

수학적 개념은 '구체에서 추상으로'라는 역사적 발달 단계를 거치면서 오늘에 이른 것이 사실이다. 그러므로, 한 인간의 수학 학습 과정도 구체로부터 출발하여 추상과 형식으로 도약해야 하며, 직관으로부터 논리로 진행해야 한다는 것이 여러 학자들의 주장이다. 수학의 학습 지도에서 이와 같은 핵심적 특징에 대한 고려가 간과되어, 점진적으로 추상화·형식화하는데 필요한 학습자의 활동을 생략하거나 소홀히 하는 것은, 학습자가 보다 높은 수준으로 이행하는 것을 저지하는 셈이 되고 만다.

우리 나라 초등학교 고학년 수학 교실에서는 비교적 빠른 형식화를 따라잡기 위해 학습자는 자신에게 별 의미 없는 학습을 강요당하는 사례도 많이 있는 것으로 여겨진다. 이에 따라, 기초·기본이 결여된 채 학습 결손은 누적되어 중학교 이후의 수학 학습에서는 수학 기피증 추세가 더욱 심화되고 있는 실정이다. 더욱이, 이런 유형의 수학 학습 과정을 통해 수학에 대한 왜곡된 관점이 형성·고착되고 있는 것은 무엇보다 심각한 문제가 아닐 수 없다.

수학 학습 과정상의 비약에서 야기되는 문제를 해소하고 학습자의 자연스러운 발달을 도모하기 위해서는, 무엇보다 추상화·형식화를 서두르지 않아야 하며, 특히 초등학교에서는 적절한 단계에서 효율적인 조작 도구를 사용하여 구체와 추상 사이의 가교 역할을 하는 활동이 이루어지도록 해야 한다.

수학 학습 과정에서 다양한 도구의 활용에 의한 구체적 조작 활동은 그 자체가 학습 내용이 되는 경우도 있지만, 주로 수학적 개념 형성이나 원리·법칙·용어 등의 바른 이해, 지식이나 기능의 숙지, 판단이나 설명의 근거 마련, 연산 또는 도형의 성질 발견·확인 및 발전, 도형의 관찰 관점이나 방법의 숙지 등을 도울 뿐 아니라, 문제해결 과정에서 문제의 파악이나 해결방안의 구상 및 여러 가지 규칙의 탐구 활동을 돕는 유익한 역할을 하는 것

으로 알려져 있다.

따라서, 구체로부터 추상으로의 이행에서 적절한 도구를 도입하여 가교를 구축하고 이 가교를 학생들이 건널 수 있도록 돕는 것은 수학 교수의 핵심적인 과정이라 할 수 있으며, 이에 관련된 여러 이론은 활동주의적 수학교육관에서 비롯되었다고 할 수 있다.

수학은 수학자라는 인간이 스스로 창조해 나가는 사고활동이므로, 그것을 학생의 내부에서 재창조하는 형태로 학습시킨다고 하는 입장을 취한다면 외재적 수학관에 의한 수학교육과는 다른 교육을 할 수 있을 것이다. 이러한 입장에서 수학적 활동의 본성을 규명하고 그에 입각한 수학교육을 전개하려는 것이 소위 '활동주의'인 것이다.

활동주의는 듀이(John Dewey) 시대에 접어들기 이전부터 교육학설에서 거듭 주장되어 온 입장이며, 오늘날 피아제(Jean Piaget)의 발생적 인식론을 비롯하여 제 학자들의 현대적인 수학관에서 강력히 옹호되고 있다. 이와 같은 활동주의적 관점은 단지 이론적 구상에 그치고 있는 것이 아니라, 이미 세계적으로 행해지고 있는 교육실천상의 관점이 되어 있다.

> 활동주의 수학교육의 입장에서는, 수학을 활동으로부터 생긴 '활동' 그 자체로 본다. 수학적 활동이 발달의 초기에는 감각·운동적인 것으로 관찰 가능하지만, 이는 점차 내면화된 활동으로 변화된다는 견해이다. 그러므로 활동주의 교육관에 의하면, 적어도 교육의 초기에는 구체적 활동을 위한 다양한 교구가 필요하며, 그것을 어떤 관점에서 어떻게 고안하여 사용할 것인가 하는 중요한 문제가 제기되는 것이다. 다시 말해, 수학을 발생적으로 학생에게 학습시키려고 하면 그에 이어지는 일련의 활동을 하도록 해야 하며, 그렇게 하기 위해서는 그러한 활동을 유발시킬 수 있는 구체적 상황에 학생이 직면하도록 할 필요가 있다. 수학의 학습 활동을 유발시키기 위한 현실의 한 단편이 다름 아닌 교구이다(김응태 외, p. 241).

이와 같이 수학교육의 활동주의적 입장에서는, 구체적 조작기의 초등학생이 교구를 다루는 직접적인 경험을 얻기 위한 구체적·물리적 활동에 참여해야 함을 강조하고 있다.

한편, 수학의 교수·학습에 유효하게 활용될 수 있는 교구란 무엇인가? 이에 대한 관련 용어가 다양하고 학자들 간에도 관점의 차이가 있어서 수학 학습 교구의 의미를 한 마디로 규정하기는 어렵지만, 수학교육의 목표를 효율적으로 달성하기 위해 수학의 교수·학습 활동에 직접 활용함으로써, 신체적·정신적으로 관련된 기회를 제공하여 학습자의 학습 경험에 도움을 주는 구체물을 총칭하는 것으로 볼 수 있다.

이와 같은 교구를 상황에 맞게 적절히 선택·활용하는 것은 무엇보다 중요하다. 이에 대

하여 Reys는 조작 교구 선택의 교육적 고려를 위해 다음과 같은 기준이 중요하다고 주장한다(Robert E. Reys, p. 7).

- 교구는 탐구된 아이디어나 수학적 개념의 진실한 구체화를 제공해야 한다.
- 교구는 수학적 개념을 명백하게 표현해야 한다.
- 교구는 동기 유발에 적절해야 한다.
- 교구는 되도록 다목적용이어야 한다.
- 교구는 추상화의 기초를 제공해야 한다.
- 교구는 개개인의 조작 기회를 제공해야 한다.

이와 같은 주장에서 조작 교구가 구비해야 할 몇 가지 기본 요건을 추출할 수 있으며, 어떤 교구가 어떤 내용의 지도에서 효과적으로 활용될 수 있는가 하는 것을 판단하기 위해서는 그 선택·활용 이전에 그 구조와 기능을 파악하는 것이 전제되어야 한다.

본 연구는, 초등학교 수학교실에서 그 활용 가능성과 가치가 충분함에도 불구하고, 아직까지 우리 나라에서 잘 활용하지 않고 있는 다목적 조작 도구의 하나인 기하판의 활용에 관한 것이다.[1] 이 연구에서는 기하판에 대하여 그 활용 의의를 주장하고, 기하판을 활용한 실제 수업 사례를 제시하며, 활용 가치의 관점에서 수업 사례를 분석함으로써, 현장에서 새로운 수학과교육과정의 충실한 운영과 함께 학생의 의미 있는 수학 학습 활동의 지도에 기여하고자 한다.

Ⅱ. 수학교실에서 기하판의 활용 의의

수학교육 선진국에서는 이미 오래 전부터 학습자의 수학적 활동을 중시한다는 기본 입장에 따라 다양한 구체물 조작을 활용하여, 단순한 계산기술의 습득보다 수 체계의 구조나 수 감각, 공간 감각 등의 증진을 통해 수학 학습 지도의 성과를 거두고 있는 것으로 보인다.

그러나, 우리 나라에서는 조작 도구의 활용을 통한 활동의 지도가 지금까지 미흡했으며, 특히 기하판의 경우, 제 3차 교육과정(현대화교육과정)에서 당시 미국의 새수학(New Math) 영향을 받아 이의 활용이 잠깐 다루어지기는 했으나, 제대로 정착되기도 전에 그 자취를 감

1) 이 연구에서 '기하판'이란 영어의 'geoboard'를 번역한 용어이다. 우리 나라 7차 교육과정에서는 '점판'이라는 용어로 사용하고 있다. 이 밖에도 도형판, 못판 등의 용어도 생각할 수 있다. 그리고 이와 유사한 것으로는 점을 격자점의 위치 또는 등간격으로 종이에 찍어 놓은 '점 종이(dot paper)', 기하판을 종이에 옮겨 그린 '종이 기하판(paper geoboard)' 등도 있다.

추고 말았으며, 이런 연유로 20여 년 동안 기하판의 활용을 찾아보기 어려웠다.[2)]

기하판(geoboard)은 학생들의 도형 학습을 돕기 위해 영국의 갓테그노(C. Gattegno)가 고안한 조작도구이다.[3)] 기하판 중에서 가장 간단한 것은 하나의 정사각형 나무판에 9(3×3)개의 못을 모눈의 위치에 박은 것이다. 이 밖에도 4×4, 5×5, …개의 격자점(정사각형의 꼭지점)에 못을 박은 기하판을 얼마든지 만들 수 있고, 연속되는 정삼각형의 꼭지점에 못을 박은 정삼각 격자 기하판, 원주 위에 같은 간격으로 못을 박은 원형 기하판도 수학 학습에서 유용한 교수·학습 도구가 된다.

기하판 위에 구성 가능한 모든 도형은 직선만에 의해 결정되는 개(開)도형과 폐(閉)도형으로 분류할 수 있고, 폐도형은 다시 교차하는 부분의 유무에 따라 단순도형과 비단순도형으로 나누어지며, 단순도형은 볼록 도형과 오목 도형으로 분류할 수 있다.

1. 수학 학습에서 기하판의 활용 의의

수학교실에서 기하판을 활용하면 어떤 좋은 점이 있는가? 즉, 이를 활용할 가치는 무엇인가? 이와 같은 질문에 대한 답을 본 연구자는 '기하판의 활용 의의'라 칭하고 이에 대하여 논의하고자 한다. 실제로 본 연구자는 그 의의에 대하여 10여 가지 정도로 분류하여 이미 개괄적으로 제시한 바 있으나(정동권, 2000, pp. 17-18), 이 연구에서는 다음과 같이 그 의의를 보다 구체화하고, 초등학교와 중학교에서 적절한 활용 예를 함께 제시하기로 한다.

1) 다양한 도형의 구성과 수정이 용이하다.

여러 가지 형태와 크기의 도형을 구성하는 활동을 통해 도형에 대한 흥미와 관심이 고조되고 공간 감각이 증진되며, 도형에 대한 친숙감을 가지게 되고 도형의 개념 형성이나 성질에 대한 후속 학습의 바탕이 되는 경험을 얻을 수 있다.

---

2) 미국의 SMSG가 수학교육현대화를 위해 개발한 실험용 교과서와 교사 재교육용 교재를 인천교육대학 수학교육과정연구회(이용률, 성현경, 우정호)가 1970년 초에 번역하였다. 이를 동화문화사에서 교사용 지침서 『새 초등수학』이란 이름으로 발행(1970. 6. 5)했는데, 그 2학년용 p. 74에 "다각형을 예시하는 다른 방법으로서 판자에 박아놓은 못 둘레에 고무줄을 그림과 같이 쳐서 팽팽하게 하는 방법이 있다."로 기술되어 있으며, 그 아래에는 기하판에 구성된 오목 다각형의 그림이 제시되어 있다.

3) 갓테그노는 기하판을 학교에 흔히 비치되어 있는 각종 '설명 도구'와 같이 어떤 수학적 사실을 가르치기 위한 교구로 본 것이 아니라, 이와는 본질적으로 다른 목적을 가지는 도구로 생각하였다. 하나의 기하판에는 대단히 많은 수학적 사실이 내포되어 있고, 그것을 학생들이 하나씩 차례로 발견해 나가도록 하는 것이 이의 목적이라 하였으며, 이러한 활동이야말로 진실한 수학적 활동으로 연결되는 수학 학습의 형태라고 주장하였다.

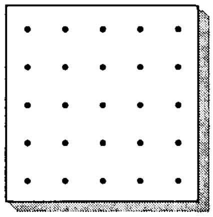
실제로 [예 1-1, 1-2]와 같은 활동은 구체적인 변의 길이에 따라 기하판에 도형을 구성해 보게 함으로써, 도형의 정의의 이해를 심화할 수 있으며, 선분의 길이를 점 사이의 관계로 이해할 수 있기 때문에, 장차 학습하게 될 좌표 기하에 대한 기초 개념의 학습 경험을 제공한다. 기하판(점 종이, 모눈종이 등) 위에서의 이와 같은 활동을 통해, 여러 가지 삼각형의 개념 이해를 심화할 수 있다.

그리고, 기하판 위에서 구성 가능한 것과 그렇지 않은 것들에 대한 논의를 거치게 함으로써, 수학적 표현과 의사소통 능력을 기를 수 있다.

[예 1-1] 여러 가지 다각형 구성

오른쪽 [그림 1]의 5×5 기하판 위에,

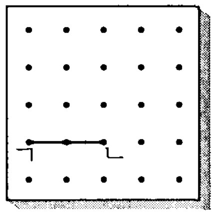
- 변이 4 개이고 그 중 두 변의 길이가 같은 도형을 구성하라.
- 변이 12 개이고 모두 길이가 같은 도형을 구성할 수 있는가?
- 변이 5 개이고 그 중 4변의 길이가 같은 도형을 구성할 수 있는가? 구성할 수 없다면 왜 그런가?
- 변이 8 개이고 그 중 네 변의 길이가 서로 같고, 다른 네 변의 길이도 서로 같은 도형을 구성해 보아라.



〔그림 1〕

[예 1-2] 다양한 삼각형 구성

오른쪽 [그림 2]와 같은 기하판에서, 선분 ㄱㄴ을 한 변으로 하는 삼각형을 되도록 많이 구성해보아라. 이등변삼각형, 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 각각 몇 개씩이나 만들 수 있는가?



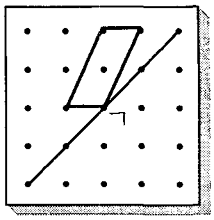
〔그림 2〕

2) 동적 기하 학습이 가능하다.

종이 위에 연필로 그리는 靜的(static)인 도형 학습에서 탈피하여 動的(dynamic)인 도형 학습으로의 전환이 가능하므로 학습자가 생동감을 느낄 수 있다. [예 3]과 같은 활동을 종이 위에서 한다면 이와 같은 관계에 내재해 있는 본질의 이해보다 사고 노력의 낭비가 많게 될 것이다. 그러나 기하판 위에서는 고무줄의 간단한 돌려 끼우기나 넘겨 끼우기 조작만으로 쉽게 원하는 도형을 구성할 수 있다.

도형을 대칭이동이나 회전이동 시켜봄으로써, 이와 같은 이동에 의해 처음 도형이 그 모양과 크기가 변하지 않음을 알아차릴 수 있다.

[예 2] 도형의 이동
[그림 3]에 주어진 도형을 지정된 선분이 대칭축이 되도록 이동한 새 도형을 구성하여라. 그리고 점 ㄱ이 중심이 되도록 각각 90도, 180도 회전한 도형을 구성하여라. 그리고 그 과정을 설명하여라.



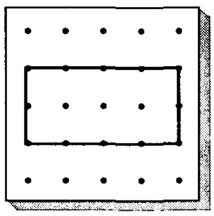
〔그림 3〕

3) 공간 감각의 형성 · 발달에 적합하다.

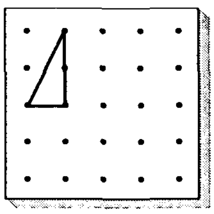
기하판 위에서 고무줄의 다양한 조작에 의해 도형을 구성 · 묘사하고, 이동(옮기기, 뒤집기, 돌리기)하고 측량하며, 상상 · 비교하고, 분류함으로써 기하학적 관계를 발견하는 경험을 통한 공간감각의 형성 · 발달을 기대할 수 있다.

다음 [예 3-1]은 주어진 도형을 유지한 채 다른 색의 고무줄을 이용하여 지정된 도형으로 적절히 변형함으로써, 원래의 도형인 직사각형과 평행사변형이나 마름모, 사다리꼴 사이의 관계를 이해할 수 있다. 또, [예 3-2]는 대칭 및 대칭축의 개념 학습과 대칭의 성질 이해에 도움을 준다. 이와 같은 활동은 직관적으로 도형을 보는 안목의 발달을 돕는다.

[예 3-1] 도형 상호관계 인식
오른쪽 [그림 4]에 주어진 직사각형을 이용하여 평행사변형, 마름모, 사다리꼴을 각각 구성하여라.


〔그림 4〕

[예 3-2] 대칭인 도형의 구성
[그림 5]에 주어진 도형에 대하여, 가능한 대칭축을 만들고 처음 도형과 선대칭인 도형을 구성하여라. 그리고 적당한 대칭의 중심을 택하여 점대칭인 도형도 구성하여라.


〔그림 5〕

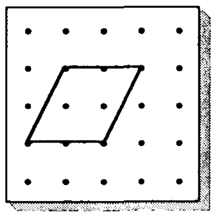
4) 평면도형의 넓이와 둘레 및 그들 사이의 관계 탐구를 돕는다.

정사각 격자 기하판 위에 구성한 닫힌 꺾은선도형(rectilinear figure)은 모두 그 넓이를 구할 수 있기 때문에, 이는 평면 도형의 넓이 지도에서 유효하게 활용할 수 있다. 특히, 기하판 활동은 그 위에서의 선분의 길이와 단위정사각형의 넓이에 대한 약속 및 등적변형 방법을 바탕으로 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴 및 마름모 등의 넓이 사이의 관계 탐구에 적합하여 관계적 이해를 도울 수 있다.[4] 이 경우 간단한 도형(기본도형)에서부터 점차 복잡한 도형(비정형도형)의 넓이에 대한 탐구로 이행해야 한다. 그리고, 이를 확장하여 Pick의 정리나 피타고라스 정리를 발견·설명하도록 하는 데에도 적합하다.

기하판 위에 제시된 여러 가지 평행사변형의 밑변과 높이를 그 정의에 따라 알아보고, 이미 학습한 직사각형의 넓이를 이용하여 평행사변형의 넓이를 구해 그 관계를 표로 나타낼 수 있다. 표의 관찰로부터 평행사변형의 넓이는 「밑변×높이」 임을 발견할 수 있다. 또, 구성한 직사각형과 평행사변형의 비교 관찰로부터 넓이가 변하지 않는 등적변형 관계임을 알아낼 수 있다.

평행사변형에 대한 이와 같은 일련의 활동 경험은 이후의 삼각형이나 사다리꼴의 구적 공식의 발견 학습에까지 강하게 유추할 수 있는 계기가 된다.

[예 4] 평행사변형의 구적 공식 발견 및 설명
[그림 6]에 제시된 평행사변형의 넓이와 밑변의 길이, 높이를 각각 알아보아라. 다른 평행사변형을 더 구성하여 넓이와 밑변의 길이, 높이를 알아보고, 이들 사이에 어떤 규칙이 있는지 찾아보아라. 평행사변형의 밑변과 높이 각각을 가로와 세로로 하는 직사각형을 구성하여 그 넓이 사이에 어떤 관계가 있는지 알아보아라. 그리고 왜 그렇게 되는지 설명해보아라.


[그림 6]

4) 심리학자 스켐프(Richard R. Skemp)는 이해란, 새로운 상황을 이미 형성되어 있는 기존의 적절한 스키마에 동화시키는 것이라고 하였다. 그는 이해함으로써 획득하게 되는 지식의 유형에 따라, 이해를 관계적 이해와 도구적 이해로 분류하였다. 그는 관계적으로 이해함에 따라 새로운 과제에 보다 잘 적응하고, 기억이 용이하며 지속적이어서 결과적으로 학습 소요 시간이 오히려 경감된다고 하였다. 또, 그 자체가 학습의 목표로서 효과적이며, 관계적 스키마는 질적으로 유기적이라는 장점을 내세우고 있다. 그러나, 단기적 목표 달성 면에서 보면 시간이 많이 걸리며, 관련성 학습의 필요에 의해 학습 내용이 과중해지고, 대규모 학급에서는 이를 평가하거나 교사가 지닌 기존 스키마를 재구성하기가 어렵다는 단점도 있음을 지적한다(황우형, 1997. pp. 257-292).

5) 다답형 문제의 설정에 유효하다.

도형이나 넓이에 관련된 다답형 문제(open-ended problem)의 설정에 유효하다.[5] [예 5-1]은 기하판의 가장자리와 나란한 정사각형뿐 아니라, 비스듬한 정사각형이 존재하고 이를 구성할 수도 있음을 이해한다. 그리고 각 정사각형의 넓이는 충분히 구할 수 있으나 한 변의 길이는 그 근사값밖에 구할 수 없으므로 이에 대한 의문의 안목과 관심을 가지게 된다. 이와 같이 무리수에 해당하는 길이는 기하판의 활용을 떠나서는 초등학생으로서 경험하기 어렵다.

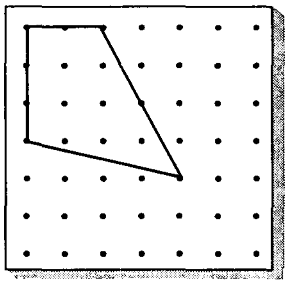
단위 정사각형을 요소로 하는 넓이가 5인 다양한 도형을 구성해 봄으로써 12개의 펜토미노(pentomino)를 찾을 수 있고 정육면체의 전개도와 관련을 맺을 수도 있다. 또 이를 확장하여, 기하판의 특성을 살려 사선(대각선)을 활용하게 하면 보다 발전적이며 굉장히 많은 도형의 구성을 실감할 수 있다. 그리고 [그림 7]에 제시된 도형과 넓이가 같은 사각형을 구성하는 문제의 해결을 통해서는 삼각형의 넓이를 결정하는 요소가 밑변과 높이임을 더욱 깊이 있게 이해할 수 있으며, 도형의 등적변형 능력은 물론, 공간이나 좌표에 대한 감각을 깊게 할 수 있다.

[예 5-1] 다양한 크기의 정사각형 구성

7×7 기하판에 넓이가 서로 다른 정사각형을 되도록 많이 구성하여라.

[예 5-2] 펜토미노의 구성, 등적 사각형 구성

7×7 기하판에 그 넓이가 5이고 모든 각(내각 또는 외각)이 직각인 도형으로, 서로 합동이 아닌 도형을 되도록 많이 구성하여라. 그리고 [그림 7]에 주어진 사각형과 넓이가 같은 사각형을 구성하여라.



[그림 7]

6) 좌표기하의 기초 학습에 유효하다.

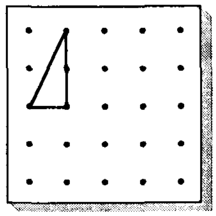
직선의 기울기에 대한 직관적 표현으로 가로, 세로로 변화된 칸수를 생각할 수 있다. 이

5) 이와 같은 open-ended(多答型) 문제는 그 자체가 다양한 정답(수준이 동등한 또는 다른)을 지니고 있다. 그러므로 수준 차가 있을 수밖에 없는 모든 학급에서 이를 적절히 활용함에 따라, 학생 개개인이 각자의 수준에 알맞은 정답을 제시할 수 있다. 이는 학급의 수업 분위기를 보다 활성화할 수 있으며, 학생의 발전적 · 창조적 사고를 육성할 수 있고, 수학 문제에는 정답이 하나밖에 없다고 생각해 왔던 종래의 수학에 대한 그들의 그릇된 인식을 바람직한 방향으로 바꿀 수 있을 뿐 아니라, 나아가서는 학습 의욕을 더욱 고취시킬 수 있다.

는 좌표기하를 학습하기 위한 기초적 경험으로 아주 많은 도움이 된다.

다음 [예 6]은 도형을 평행이동 시켜봄으로써, 이와 같은 이동에 의해 처음 도형이 그 모양과 크기가 변하지 않음을 이해하는 계기가 된다(합동변환 개념의 초보적 인식).

[예 6] 도형의 옮기기와 돌리기
[그림 8]에 주어진 도형을 오른쪽으로 3칸, 아래로 2칸 이동한 다음, 가장 작은 각이 있는 꼭지점을 중심으로 90도 회전하여라. 처음 도형과 그 위치를 비교해 보아라.



〔그림 8〕

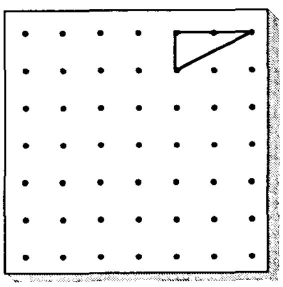
7) 도형의 합동과 닮음의 개념 및 관련 기본 성질 탐구에 적합하다.

기하판 위에 대응하는 변의 길이가 2배, 3배 되는 도형을 구성하여 그들 사이의 여러 가지 관계를 탐구해봄으로써, 도형의 닮음과 닮음비에 대한 개념 이해뿐 아니라, 각의 크기의 불변성도 인식할 수 있고 이들 사이의 관계를 쉽게 설명할 수 있다.

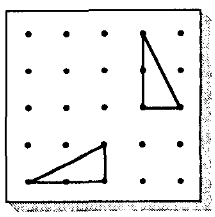
[예 7-2]는 한 도형을 모양과 크기가 변하지 않게 적절한 방법으로 이동함에 따라 정확히 포갤 수 있음을 인식한다. 합동의 개념 이해의 심화로 합동인 도형이란 도형의 위치 관계에 무관함을 알 수 있으며 좌표에 대한 이해도 돕는다.

[예 7-1] 삼각형의 닮음
[그림 9]와 같은 7×7 기하판에 주어진 삼각형과 닮은 삼각형을 두 개만 더 구성하여 각 변의 길이 및 넓이를 비교하여라.

[예 7-2] 삼각형의 합동
[그림 10]의 두 삼각형이 합동임을 설명하여라.



〔그림 9〕



〔그림 10〕

8) 등적변형이 대단히 용이하다.

기하판 위에서는 어떤 도형의 넓이는 바뀌지 않게 하면서 모양과 위치를 변화시키는 것

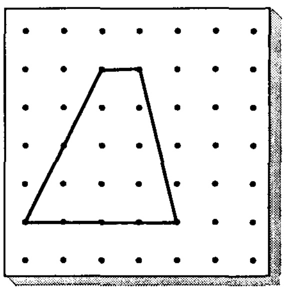
이 고무줄 조작에 의해 용이하다. 이와 같은 기하판의 조작적 특성은 평면도형의 넓이 지도에 매우 유효하게 활용될 수 있음을 보장한다. 새로운 어떤 도형의 넓이에 대해 학습할 때마다 아직까지 그 도형의 구적 공식을 몰라서 넓이를 구할 수는 없으므로, 그 도형을 이미 학습하여 넓이를 구할 수 있는 다른 도형으로 등적(또는 배적)변형해야 한다.

[예 8]과 같은 활동은 유추적, 연역적 사고를 경험시킬 뿐 아니라, 사다리꼴의 넓이를 구하는 간단한 공식의 발견에 이르게 한다.

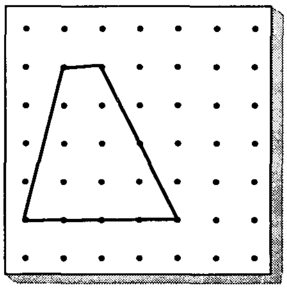
[예 8] 사다리꼴의 등적변형

[그림 11]의 사다리꼴과 같은 넓이를 갖는 삼각형과 직사각형을, 그리고 넓이가 2배인 평행사변형을 각각 구성하여라.

[그림 12]의 사다리꼴과 넓이가 같은 평행사변형을 구성하여라. 넓이가 같다는 것을 설명하여라.



〔그림 11〕



〔그림 12〕

9) 기하학적 추론 능력 개발에 적합하다.

기하판에서는 도형의 정의나 기본 성질을 바탕으로 근거를 제시하면서 정당성을 밝혀나가는 것이 가능하다. 이때 이상화된 수학적 개념의 구체적 모델로 기하판을 활용하지만 이 또한 이상성을 지니고 있는 것으로 간주해야 한다.

[예 9]는 정삼각형의 정의 및 한 변과 높이 사이의 관계, 그리고 수로서 무리수의 기본 성질 등을 바탕으로 기하학적 추론을 하는 것이라 할 수 있다. 여기서 기하판은 이와 같은 추론의 장을 마련하는데 기여한다.

[예 9] 정삼각형의 구성

7×7 기하판에 정삼각형을 구성해보아라. 만약 구성이 불가능하다면 그 이유를 설명하여라. 못의 수가 7×7보다 훨씬 많다면 정삼각형의 구성은 가능한가? 일반적으로 정사각 격자 기하판에서는 정삼각형을 구성할 수 없음을 설명하여라.

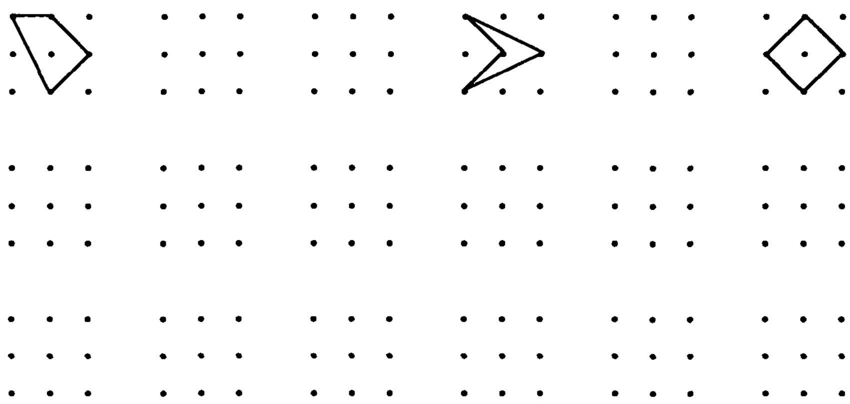
10) 수학적 의사소통을 돕는다.

기하판은 부담 없이 쉽게 조작할 수 있고 조작의 결과들이 변화무쌍하며, 형식적인 용어

나 기호를 그다지 사용하지 않고서도 직접 남에게 자신의 견해를 설명하기에 적합하다. 짝끼리의 협동학습에서도 다양한 의견 교환이 자연스럽게 이루어지는 것이 대부분의 경우이다. 짝 활동이나 소그룹 활동을 한 후 해결이나 조작 과정 또는 결과를 발표할 수 있는 기회가 제공된다면 어린이들 사이의 사회적 상호작용이 일어나고, 그런 과정에서 새로운 지식을 구성해 갈 수 있을 것이다. 이런 의미에서 기하판은 학생들의 활동에 바탕을 둔 의사소통의 활성화가 자연스럽게 이루어질 수 있는 좋은 교구라 할 수 있다.

다음 [예 9]는 일종의 open-ended 문제로서, 그 답이 대단히 많이 있다(실제로 16가지). 사각형의 범주에 들어가지 않는 도형을 구성한 어린이, 적절한 이유를 대면서 문제의 답에 해당하지 않음을 지적하는 어린이, 이미 발표된 도형과 합동인 도형을 중복되게 발표한다거나, 오목 사각형은 이 범주에 들어가지 않는다거나 하는 어린이 등도 있을 수 있다. 이와 같은 다양성은 어린이들의 발표나 평가를 부추길 수 있을 것이다.

[예 9] 3×3 점 종이에 사각형 구성
아래 [그림 13]과 같은 3×3 점 종이에 사각형을 되도록 많이 구성해 보아라. 몇 개까지 만들 수 있는가? 어떤 생각을 바탕으로 그렇게 했는가? 그와 같은 도형을 왜 사각형이라 생각했는가?



[그림 13]

11) 문제 만들기 활동을 위한 조작 도구로 활용할 수 있다.

기하판 위에서는 실수로 또는 고의로 다른 도형이 만들어지기 쉽다. 예컨대, 사각형에 대해 어떤 것을 탐구해야 할 것을 잘 못하여 삼각형이나 오각형으로 활동할 수도 있다. 이때 가치 있는 결과를 이끌 수도 있으며, 이는 주어진 문제를 발전적 사고에 의해 조건이나 관

점을 변경해보도록 고무시킬 수 있다. 소위, "What-if-not" 전략에 따라 유사한 또는 새로운 문제 만들기 활동이 가능해진다.

[예 10]은 [예 9]로부터 사각형이라는 조건을 삼각형으로 변경하여 만든 문제이다. 이와 같은 발상은 기하판으로 활동하는 장에서 보다 흔히 있을 수 있다.

> [예 10] 유사 문제 만들기
> 위 [예 9]의 해결을 일단락 한 후 거기서 멈추지 않고,
> "[그림 13]의 3×3 점 종이에 삼각형을 되도록 많이 구성하여라. 더 이상은 없다고 확신할 수 있는가. 어떤 방법으로 그것을 알아냈는가?"와 같은 문제를 만들 수 있다.

12) 패턴 탐구 활동 자료로 적합하다.

기하판은 그 자체가 패턴에 의해 만들어졌으므로 패턴의 탐구나 패턴의 구성에 대단히 유효하게 활용될 수 있다.

[예 11-1]은 2×2 기하판부터 못의 수를 늘려가면서 선분과 정사각형의 수에 대하여 몇 가지 경우를 조사해봄으로써, 대단히 흥미 있는 규칙을 발견할 수 있으며, 이와 같은 규칙이 왜 성립하는지 그 이유를 밝혀보는 기회를 가질 수 있다.

[예 11-2]는 기하판(또는 점종이)을 이용하여 그 내부에 포함되는 점의 수, 경계에 놓이는 점의 수를 다양하게 변화시킬 수 있는 폐도형을 여러 가지 구성하게 하고 넓이에 주목하도록 하여, 유명한 피크의 정리[6]를 발견하게 할 수도 있다. 이는 세 가지 변수 사이의 관계이기 때문에 그 중 어느 한 가지를 고정하고 나머지 두 변수의 변화 양상에 대한 규칙을 찾아 종합하는 방법이 유효하다. 그리고 도형의 내부에 구멍이 있는 경우를 상정하여 보다 발전적인 문제로 다룰 수도 있다.

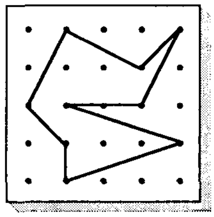
---

6) 이는 위의 [그림 14]와 같이 복잡한 도형의 넓이를, 알고 있는 도형으로 분할하여 알아보는 방법을 사용하지 않고서도 편리하게 구할 수 있는 방법으로, 독일의 수학자 피크가 창안해 낸 정리이며, 흔히 피크의 定理(Pick's Teorem)라 한다. 그 내용은 다음과 같다.
Pick's Teorem: 정사각 격자 기하판위에서 만들어지는 도형의 넓이를 A, 고무줄과 닿은 경계에 위치한 격자(경계점)의 수를 B, 그리고 도형의 내부에 위치한 격자(내점)의 수를 I라 하면, 이들 사이에는 아래 관계식 ①이 성립한다. 또 어떤 도형의 내부에 다른 폐도형이 들어있을 경우, 그 폐도형을 구멍으로 볼 수 있으며, 이때 구멍의 수를 H라 하면 그 폐도형 부분을 제외한 도형의 넓이 A'은 아래 관계식 ②와 같다.

$A=\frac{1}{2}B+I-1$ ·············· ①　　$A'=\frac{1}{2}B'+I'+H-1$ ·············· ②

[예 11-1] 선분과 정사각형의 수에 대한 규칙
5×5 기하판에 길이가 서로 다른 선분을 몇 개나 만들 수 있는가? 또, 넓이가 서로 다른 정사각형은 몇 개 만들 수 있는가? 이와 같은 사실을 일반화할 수 있는가?

[예 11-2] 피크의 정리(Pick's Theorem)
기하판(또는 보다 격자가 많은 점종이)에 여러 가지 다각형을 구성하고, 내부에 포함된 점의 수, 경계에 놓인 점의 수, 그리고 넓이 사이에 어떤 관계가 있는지 알아보아라. 그것을 이용하여 [그림 14]에 주어진 도형의 넓이를 구하여라.


〔그림 14〕

13) 학생의 능동적인 참여와 수학에 대한 안목의 변화를 기대할 수 있다.

특히 초등학생의 경우에는 대부분 손조작 활동에 대하여 대단한 관심과 흥미를 가지고 있다. 평소에 지나치게 교과서 위주의 수학학습에 젖어 있는 어린이들로서는 이와 같은 적절한 다목적 교구에 의한 활동에 적극적으로 참여하기를 원한다. 수학은 수학 책에 있고 거기에 있는 문제를 풀어 정답을 구하는 것이 마치 수학이라는, 그릇된 편견을 가지고 있는 어린이들로서는 기하판 위에서 이루어지는 무궁무진한 활동이 그들을 수학의 세계로 이끌기에 충분하다. 이와 같은 생각의 바탕 위에서 어린이들은 탐구하고 반성하고 수정하고 이야기하고 반박하고 정리하는 일련의 과정을 거쳐, 점진적으로 수학적 개념의 형식화와 추상화에 이를 수 있다.

14) 문제해결과 수학적 사고 능력을 발달시킨다.

기하판을 이용하여 여러 가지 문제를 해결하는 과정에서, 학습자는 구체적 사고로부터 점진적 이행에 따라 추상적 사고에 접근할 수 있다. 기하판 위에서는 한꺼번에 여러 가지 관련 도형의 구성이 가능하기 때문에, 이들 사이의 관계를 우선 직관적으로 파악한 후 정의나 기본 성질에 바탕을 둔 연역적 추론으로 도약할 수 있으며, 남과 논의하기 위해서는 근거가 타당한 주장을 하게 된다. 활동의 결과를 필요에 따라서는 점 종이에 옮겨 기록하고 이로부터 규칙을 찾아보는 귀납적 사고, 유추적 사고나 일반화의 사고를 할 수 있다. 그리고 기하판 자체가 하나의 도형이므로 그 위에 어떤 도형을 구성해보려는 생각은 도형화의 사고를 부추기는 셈이다. 또 고무줄의 용이한 조작을 활용하여 다른 경우에도 알아보려는 발전적 사고를 하게 되며, 일반적으로 성립하는 어떤 명제에 대하여 그 진위 여부를 특수한 경우로 알아보기가 용이하다.

기하판 활동을 통한 이와 같은 다양한 사고 경험은 학습자의 사고 능력과 문제해결 능력을 신장시키는데 많은 도움이 될 수 있다.

이상에서 알아본 바와 같이, 기하판을 활용하는 다양한 활동은 도형의 구성뿐 아니라 넓이, 둘레, 길이, 각, 좌표기하, 대칭성, 도형의 이동은 물론, 수 감각이나 문제해결, 패턴의 탐구활동에 이르기까지 폭넓은 영역의 수학 학습에 도움을 줄 수 있다. 이 밖에도 정삼각격자 기하판이나 원형 기하판을 활용한 활동들도 폭넓게 산재해 있다.

따라서, 학습자 중심, 활동 중심의 수학 교육을 표방하는 제 7차 수학과교육과정의 효과적인 운영의 장에서 기하판에 포함된 여러 가지 수학적 관계를 학생들이 탐구하게 하여 의식시키는 형태의 수학 수업은 대단히 유익한 수업이 될 수 있다.

2. 제 7차 교육과정과 기하판의 활용

2000년도부터 본격적으로 시행되고 있는 우리 나라 제 7차 수학과교육과정에서는, 구체적 조작활동과 사고 과정을 중시하며, 원리나 법칙을 학생 스스로 발견하고 해결할 수 있는 기회를 제공하여, 학생으로 하여금 발견의 즐거움을 맛볼 수 있도록 해야 한다는 특징이 나타나고 있다. 다시 말해, 제 7차 수학과교육과정에서는 활동주의 수학교육관에 입각하여, 과거 어느 때보다도 학습자의 구체적 조작 활동과 더불어 학습자 자신의 사고 활동을 대단히 강조하고 있다. 이는, 초등학교 교육과정 해설서(교육부, pp. 8-15)의 군데군데에서 드러나고 있는 사항이다.

따라서, 제 7차 교육과정의 실제적 운영의 장인 수학교실에서는, 미래의 새로운 시대를 슬기롭게 대처해 나갈 인재의 양성이라는 궁극적인 목적 구현을 위해서도, 여러 가지 장점을 지닌 다목적 교구의 적극적인 활용을 통해, 학생들의 수학적 개념의 형성·발달과 문제해결 능력 신장을 도와야 한다.

제 7차 초등학교 수학과교육과정의 단계별, 영역별 내용을 살펴보면 '1-나' 단계 '도형' 영역에서만 기하판의 활용을 직접적으로 제시하고 있다. 그러나, 이는 도형 영역뿐만 아니라 초등학교 수학의 전 영역에서 그 활용 방법이나 시기에 따라 학습 효과를 거둘 수 있을 것으로 본다.

다음 <표 1>은 도형 영역과 측정 영역에서 가장 유효하게 활용할 수 있는 내용을 발췌하여 정리한 것이다. 그리고, 비고란의 내용은 앞에서 다룬 기하판의 활용 의의에서 제시한 예들을 관련지은 것이다. 그러나, 그 내용 수준이 표의 학년 수준에 반드시 적당한 것은 아니므로, 이의 활용에 있어서는 수준 조절이 필요하다.

<표 1> 제 7 차 초등학교 수학과교육과정에서 기하판의 활용이 유효한 내용

영역	단계	학 습 내 용	비 고
도형	1-나	• 공간 감각 형성(여러 가지 평면도형의 구성과 분류)	기하판 활용 직접 제시
	2-가	• 평면도형의 구성요소 파악 • 도형의 이동에 대한 기초적 경험	[예 1-1], [예 1-2], [예 11-1],
	3-가	• 각의 이해 • 직각삼각형, 직사각형, 정사각형의 구성 및 관찰 • 도형의 이동(옮기기, 뒤집기, 돌리기)	[예 1-2], [예 3], [예 5]
	3-나	• 도형의 대칭에 대한 기초적 경험	[예 3-2]
	4-가	• 변의 길이에 따른 도형의 구성 및 분류 • 예각삼각형, 둔각삼각형, • 사각형과 삼각형의 관계	[예 1-2], [예 11-1]
	4-나	• 수직과 평행 • 삼각형, 사각형의 구성 및 구성요소 파악	[예 1-2]
	5-가	• 직육면체, 정육면체의 구성 및 구성요소 상호관계 • 직육면체, 정육면체의 전개도	정삼(사)각격자 기하판
	5-나	• 평면도형의 합동과 대칭	[예 7-2], [예 3-2]
측정	5-가	• 평면도형의 둘레 • 평면도형의 넓이의 개념 • 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이를 구하는 공식 발견	[예 4], [예 5-1], [예 5-2], [예 11-1]
	5-나	• 사다리꼴, 마름모, 일반 다각형의 넓이를 구하는 방법 탐구	[예 8], [예 11-2]

Ⅲ. 기하판을 활용한 구적 공식의 지도 사례

1. 학습 주제: 기하판을 이용하여 사다리꼴의 넓이를 알아보자.[7]

2. 대상 학급: 인천 승학초등학교 5학년 3반

3. 수업일시 및 진행자: 2000년 5월 29일 6교시, 정동권(인천교육대학교 교수)

4. 준비물: 7×7 기하판(직접 제작하여 2명당 1개씩 배포), 고무밴드(색깔과 크기가 다양한 것으로 2명당 10여 개씩), 점종이(2명당 1장씩)

7) 이 수업 내용에 대해서는 연구자가 이미 수학적 사고에 초점을 맞추어 분석·발표한 바 있다(정동권, 2001, pp. 27-33).

5. 이 수업의 특이점

이 수업은 담임 교사가 아닌 본 연구자가 대상 학급의 여러 가지 특성을 제대로 파악하지 못한 상태에서, 교육과정 운영상의 진도에 1개 차시만의 끼어 들기 식 수업을 진행하는 일종의 임시 특설 수업이다. 더욱이, 대상 어린이들이 학습 과정에서 아직 기하판을 활용한 경험이 없기 때문에 그들의 학습 리듬에 대한 혼란을 야기할 수 있으며, 교육과정 운영상의 단절을 초래할 수도 있다. 따라서, 먼저 어린이들과 친해져야 하고 지금까지의 학습 내용에 대한 숙지 정도를 파악해야 하며 기하판에 대한 생소함을 없애는 시간이 필요하다.

6. 수업 전개의 개요

도형 영역에서 학습한 기하 도형의 기본 성질과 본 단원에서 이미 학습한 직사각형, 평행사면형, 삼각형 등의 넓이를 구하는 방법을 바탕으로, 이 시간에는 생소한 조작 자료인 기하판을 활용하여 사다리꼴의 구적 공식 발견 및 그 정당화 학습을 하게 된다.

먼저 기하판을 다루어본 경험이 전혀 없는 어린이들이므로 본시 학습에 바로 임할 수 없다. 따라서, 기하판 위에 고무줄을 걸치면서 각자 만들고 싶은 도형을 만드는 활동을 통해 기하판과 친숙해지는 시간을 20분 정도 갖도록 한다. 교육과정에서 다루는 도형을 구성하는 방향으로 자연스럽게 유도하고, 기하판에서 못과 못 사이의 길이나 못으로 둘러싸인 영역의 넓이를 약속한다. 그런 다음 이를 바탕으로 각자 구성한 도형의 넓이를 알아보고 발표하게 한다.

본시 학습 내용인 사다리꼴을 구성하게 하여 그 넓이를 구하고, 어떻게 구했는지 발표하게 한다. 최소의 격자사각형(기하판에서의 넓이 단위)의 수를 세어서 넓이를 알아낸다는 것이 어려운 장면에서는 어떻게 하면 좋겠는지 탐구시킨다. 이미 학습한 도형(넓이를 구할 수 있는 도형)으로 등적변형하여 구적 공식을 발견하게 하고 이를 바르게 설명하도록 한다. 이와 같은 과정에서 점종이를 병행하여 사용하도록 한다.

다양한 반응이나 등적변형 방법에 대해 충분히 논의하도록 하고, 이를 통한 상호작용을 보장하여 사다리꼴의 구적 공식을 일반화하고 확립하게 하며, 그 정당성을 설명하도록 한다. 수업에 대한 소감을 발표시키고 종료한다.

7. 본시 수업 진행을 위한 준비 활동

- (기하판과 고무밴드를 나누어주고) 이것을 뭐라고 부르면 좋을까?
- 이 도구는 어떻게 되어 있는가? 잘 관찰해보자.

• 고무줄을 걸쳐서 마음대로 모양을 만들어보자.
• 각자 만든 모양을 발표하고, 그에 대해 이야기해보자.
• 종이에 도형을 그리는 것과 어떤 점이 다른가?

8. 본시의 학습 목표

• 이미 학습한 직사각형, 평행사변형, 삼각형을 이용하려는 태도로부터 유추적·연역적·발전적 사고를 하여 등적변형하는 아이디어를 학습하며, 대상을 통합적·관계적으로 이해하고 귀납적·일반화의 사고에 의해 어떤 사다리꼴이라도 동일한 방법이 적용된다는 사실을 알 수 있다.
• 손조작 도구의 효용성을 인식하고, 발견한 내용에 대해 활발하게 논의하는 경험을 통해 수학적으로 의사소통을 하는 능력의 발달을 꾀한다.

9. 본시의 교수·학습 활동 전개 계획

수업 진행에서 교사가 기하판의 활용 의의를 살리고 어린이의 수학적 사고 활동을 부추긴다는 관점에서, 다음과 같이 주된 발문 위주로 그 전개 계획을 제시한다.
☞ 기하판 위에서의 단위길이와 단위넓이에 대하여 약속한다.
• 직사각형, 평행사변형, 삼각형 등을 구성하고 각각의 넓이를 알아보자.
• 평행사변형, 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 이 도구를 써서 설명해보자.
• 기하판 위에서 사다리꼴을 만들어보자.
☞ 나름대로 구성한다.
• 사다리꼴은 어떤 도형인가?
☞ 구성요소 및 그 용어를 확인한다
• 넓이를 구해보자.
☞ 기하판에서의 넓이에 대한 약속과 다른 도형의 넓이를 바탕으로 구한다.
• 어떻게 넓이를 알아내었는가?
☞ 이미 외우고 있는 공식으로 구한 어린이에게는 공식이 어째서 바른가 설명하게 한다.
☞ 모눈의 수를 세어서 구한 어린이에게는 다른 방법은 없는지 탐구하게 한다.
• 사다리꼴이 아닌 다른 도형 중 그 넓이를 구할 수 있는 것으로는 어떤 것이 있는가? 그런 도형으로 바꿀 수는 없는가?
• 변형한 도형과 처음의 사다리꼴은 어떤 점에서 같은가, 또 다른가?
• 이와 같은 관계를 이용하여 사다리꼴의 넓이를 알 수는 없는가?

• 알아본 방법을 발표해보자. 그리고, 다른 사람의 방법에 대해서도 이야기해보자.
• 모양이 다른 사다리꼴이라도 이와 똑 같은 방법으로 그 넓이를 구할 수 있는가?
• 이 시간의 학습에서 느낀 점을 말해보자.

10. 수업의 실천 기록

수업 장면의 녹화 내용을 바탕으로 기술하기로 한다. T는 교사의 발문, C는 어린이의 반응을 나타기로 한다.

본시 학습을 위해 25분 정도의 준비 활동을 하는 동안 어린이들은 다양한 모양과 도형을 만들어보면서 기하판의 구조에 어느 정도 익숙해졌다.

T1: 기하판 위에서 이웃하는 두 못 사이의 길이를 얼마로 하면 좋을까?

C1: 1cm (이밖에도 여러 가지 반응이 있음)

T2: 오늘 이 시간에는 센티미터를 쓰지 않고 그냥 1이라 하자.

T3: 가장 작은 정사각형 하나의 넓이는 얼마라고 해야 할까?

C2: 1제곱

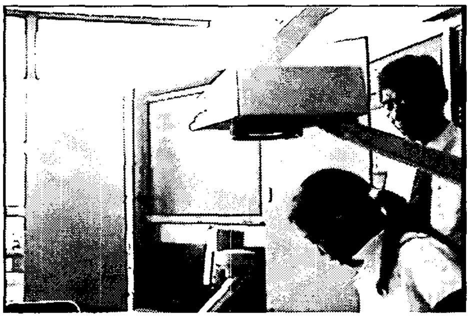
C3: 1제곱센티미터, …

T4: 제곱센티미터는 붙일 수 없으므로 그냥 1이라 하자.

T5: 수학 시간에 다루었던 도형을 각자 자유롭게 구성하고 그 넓이를 발표해보자.

………………………… 중략 ……………

C4: 평행사변형을 만든 어린이가 공식을 적용하여 바르게 구한 넓이를 발표한다.



〔그림 15〕 둔각삼각형에 대한 발표

C5: 둔각삼각형을 만든 어린이가 공식을 적용하여 바르게 구한 넓이를 발표한다(그림 15, TV 화면에 잘 나타나지 않음)

T6: 또 다른 도형은 없는가?

C6: 사다리꼴(오른쪽 [그림 16]의 가는 선)을 만든 어린이가 "윗변과 아랫변을 더하면 8, 8과 높이 4를 곱하면 32, 32 나누기 2는 16"이라고 발표한다.

☞ 사다리꼴의 구적 공식 발견을 목표로 하는 본 수업에는 C6와 같은 반응이 장애가 될 수도 있다. 일부러 공식을 부각시키지 않는다.

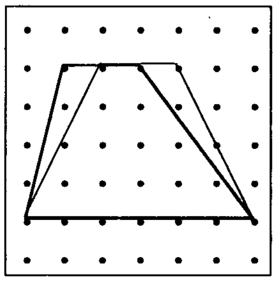
T7: 이와 같은 공식을 모른다면 넓이를 알 수는 없는가?

C7: 가장 작은 정사각형을 센다.

☞ 넓이의 개념에 바탕을 두고 생각한다. 어렵겠다는 반응도 생긴다.

T8: 좋은 생각이다. 그런데, 이런 경우([그림 16]의 굵은 선의 경우를 제시하면서)에는 어떻게 하지? 사다리꼴이 무척 큰 경우에도 그 안의 정사각형을 세어서 넓이를 구하겠는가?

☞ 어렵거나 거의 불가능임을 인식하게 하여 쉬운 방법의 탐구 의욕을 고조시킨다.



[그림 16]

C8: 사다리꼴을 삼각형과 직사각형으로 나누어서 넓이를 구한다.

T9: 왜 그렇게 생각했는가?

C9: 삼각형과 직사각형은 넓이를 구할 수 있으니까.

☞ 이미 알고 있는 사실을 이 경우에 바람직하게 접목시키고 있다.

T10: 좋은 방법이다. 그런데, (C6에게) 그와 같은 공식을 어떻게 알았는가?

C10: 학원에서 배웠다.

T11: 학원에서 배운 방법을 앞으로 나와서 설명해볼 수 있을까?

C11: (C6이) 칠판에 그림(6차 5-1, p. 108의 그림)을 그렸으나 설명은 제대로 하지 못했다.

T12: 지금 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 알고 있는 어린이 손들어 보자.

C: 거의 30명(거의 70%) 정도의 어린이가 손을 든다.

☞ 몇 명 정도는 외우고 있으리라 예상했지만 이는 너무 뜻밖의 현상이다. 수업 진행 계획을 급히 수정해야 하는 문제가 생겼다. 이럴 때 교사는 임기응변에 강해야 할 필요가 있다.

T13: 예습을 잘 해오고 있군. 그렇다면 그 공식이 왜 옳은지 설명해볼 어린이 있는가?

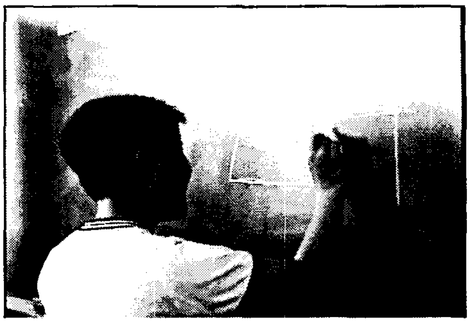
☞ 3명의 어린이가 자신 있게 손을 들기에 차례로 한 명씩 시켜본다. 모두 바르게 설명하지 못하기 때문에 3명이 서로 도우면서 설명해보게 한다. 다음 [그림 17, 18]과 같은 그림을 칠판에 그렸으나 역시 다른 어린이들이 알아들을 수 있도록 바르게 설명하지는 못한다.

T14: 지금부터 공식을 외우고 있는 어린이는 그 공식이 바르다는 것을 어떻게 설명할 것인지 궁리해보자. 그리고, 공식을 배우지 않은 어린이는 공식을 알아내어 발표해보자.

☞ 궤간 순시를 통해 무엇을 해야 할지 잘 모르는 어린이들도 있음을 알았다. "각자 만든 사다리꼴과 넓이가 같은 다른 도형을 함께 만들어서 비교해 보아라"라고 보충 지시하였다.

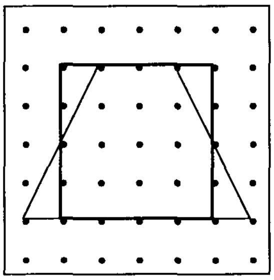
……………………………… 중략 ……………………………………………

〔그림 17〕

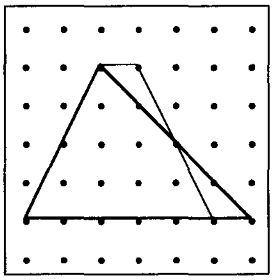


〔그림 18〕

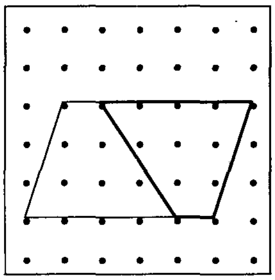
☞ 한 동안의 충분한 활동을 보장해주고, 다시 발표하게 하였다.



〔그림 19〕



〔그림 20〕



〔그림 21〕

C12: (C6이) [그림 19]와 같이 직사각형으로 등적변형한 내용을 설명함으로써, 공식이 바르다는 것을 제대로 입증하였다.

C13: (공식을 처음부터 외고 있었던 어린이가) [그림 20]과 같이 삼각형으로 등적변형함으로써, 공식이 옳다는 것을 바르게 설명하였다.

C14: (공식을 모르고 있었던 어린이가) [그림 21]과 같이 배적변형을 하여 공식을 발견·설명하였다.

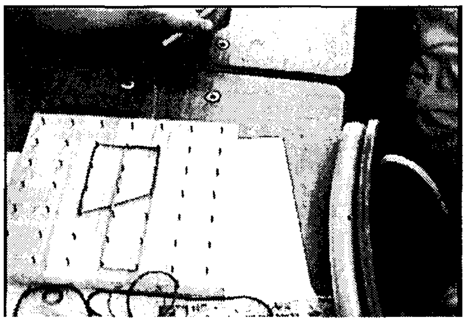
T15: 또 다른 방법으로 설명할 수는 없는가?

C15: (공식을 처음부터 외고 있었던 어린이가) [그림 22]와 같이 등적변형한 결과로 공식을 정당화하였다.

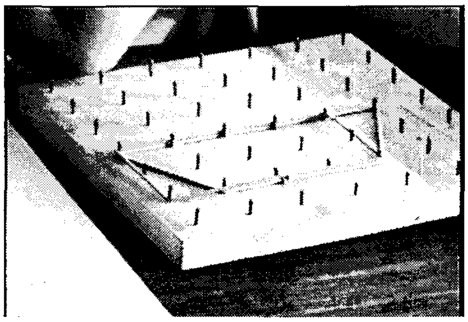
☞ 발표 기회를 갖지는 못했지만 [그림 23]과 같은 모양을 만들어서 준비한 어린이도 있었다. 이는 등변사다리꼴에만 성립하는 경우라 할 수 있다.

T16: 왜 직사각형, 삼각형, 평행사변형 등과 같은 도형으로 모양을 바꿀 생각들을 했는

가?



〔그림 22〕



〔그림 23〕

C16: 공식을 모를 때 사다리꼴의 넓이를 바로 구할 수는 없으므로, 이미 배워서 넓이를 구할 수 있는 도형으로 바꾸어야 한다.

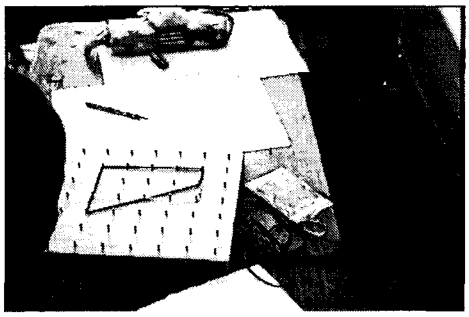
T17: 모양을 바꾸어도 넓이가 변하지 않았다는 것을 설명할 수 있는가?

☞ 몇 명의 어린이가 각 경우에 대한 바른 설명을 한다. 칠판에 판서된 그림에 기호를 붙이지 않았기 때문에 표현이 다소 매끄럽지 못하다. 기호화의 필요성을 부각시켜 기호화의 사고를 지도할 수 있다. 어린이들과 함께 사다리꼴의 구적 공식을 정리하고 칠판에 판서한다.

T18: 지금까지 발표된 사다리꼴 외에 다른 사다리꼴에도 이 공식을 사용할 수 있겠는가?

C: (대부분의 어린이가) "예"로 반응한다.

C17: 저는 다른 것(사다리꼴)을 만들었는데 틀림이 없다[그림 24].



〔그림 24〕

T19: 오늘 수업시간에 느낀 점을 말해보자.

C18: 참 재미있었다.

T20: 어떤 점이 재미있었나?

C19: 모양 만들기

C20: 배우는 것 모두

C21: 사다리꼴의 넓이를 여러 가지 방법으로 구할 수 있다는 것을 알아서 좋았다.

C22: 다른 아이들의 생각을 들을 수 있어서 정말 좋았다.

C23: 기하판으로 도형 만들기가 너무 쉽고 재미있다.

☞ 특히 C21, C22와 같은 진솔한 반응은 평소 어린이들이 바라고 있는 점이라 볼 수 있다. 손가락 곱셈 방법을 가르쳐줌으로써, 수학의 신기함을 느끼게 하고 수업을 종료하였다.

11. 수업에 대한 분석

평소에 알지 못 하는 어린이들을 대상으로 약 65분 정도 수업을 실시하였다. 처음 대하는 어린이들이지만 기하판이 매개체가 되어 이내 친해질 수 있었으며, 평소보다 훨씬 긴 수업이었지만 어린이들은 잘 견뎌내었다. 이는 교구에 의한 조작 활동이 지닌 장점 때문이라고 생각된다.

이 수업에 대한 분석 관점으로는 우선 학습 목표에 대한 도달 정도를 분석하고, 수학적 사고 경험 기회를 어느 정도 부여했는가, 또 기하판의 활용 의의를 얼마나 구현했느냐에 중점을 두기로 한다.

(1) 목표의 달성

많은 어린이들이 학교 수업 진도를 앞질러 학원에서 공식을 학습(?)하는 것으로 나타났다. 이는 C6과 마찬가지 반응을 보일 어린이가 이 밖에도 많음을 볼 때 입증된다고 할 수 있다. 어린이들이 처음에는 외어서 알고 있는 공식으로 사다리꼴의 넓이를 구하고자 하였다. 그러나, 그와 같은 공식이 바르다는 것을 아무도 설명하지는 못했다.

수학의 학습 특히 평면도형의 넓이를 구하는 공식의 학습에서는, 이미 학습한 내용을 바탕으로 당면한 문제를 어떻게 해결하면 좋은가를 탐구하는 경험을 가져야 한다. 처음부터 공식을 외고 있는 어린이들과 공식을 몰랐던 어린이들 모두가 그 방향은 달랐지만 각각 공식의 정당화와 발견에 참여하였고, 등적변형이라는 중심 아이디어를 활용하여 목표를 달성한 것으로 본다. 이는 C12 ~ C15, C16, C17 및 C20 ~ C23의 반응으로도 미루어 짐작할 수 있다. 시간 관계로 다소 아쉬운 점은 평면도형 전체에 대한 넓이를 통합적·관계적으로 다룰 기회가 없었다.

두 번째 목표에 대해서는, 어린이들이 골고루 발표하고 남의 발표 내용을 경청하도록 적극 유도하였다. 그리고, 남의 의견에 대해 보완하거나 비판할 수 있는 기회를 많이 부여하여 의사소통이 원활하게 이루어지도록 하였으며, 어떤 내용이든 서둘러 알려주는 것을 지양하고 스스로 사고하여 발표하도록 이끌었기 때문에 수업의 활성화가 이루어졌으며, 어린이들의 의사소통 능력에도 진전이 있었다고 본다.

(2) 수학적 사고 경험의 부여

수학적으로 사고하는 경험을 되도록 많이 부여하기 위해, 이의 지도 원리로 볼 수 있는

사고 유발 발문을 주로 사용하였다. 어린이들은 이 수업의 진행 과정에서 상당히 많은 횟수의 수학적 사고 관련 반응을 보였다. 반응과 발문을 함께 정리해 보면, 연역적 사고(C2, C4, C5, C8, C9, C12, C13, C15, C16, T11, T13, T14), 귀납적 사고(C14, T14), 유추적 사고(C12, C13, C14, C15, C16, T14), 일반화의 사고(C17, T4, T17, T18}, 통합적 사고(C16, T18), 특수화의 사고(C16, 그림 23), 그리고 발전적 사고(C16, C17, T18) 등을 들 수 있다.

이와 같이 사고해보는 경험은 사고의 좋은 점을 다소나마 느끼게 되고, 이에 따라 후속 학습에서도 사고하려는 어린이가 증가할 것으로 본다.

(3) 기하판의 활용 의의

실제로 취급하는 내용에 따라 앞에서 제시한 활용 의의에 대한 목록 중 해당하지 않는 것도 있을 수 있다. 본 수업에서 나타난 반응을 바탕으로 이에 대해 다음과 같이 정리하기로 한다.

• 다양한 도형의 구성과 수정: 준비 학습에서 다양한 도형을 충분히 많이 구성하는 경험을 통해 기하판의 구조와 기능을 인식하였다. 그리고, 반응 C12 - C15 및 [그림 23]에 따라 기하판은 다양한 도형의 구성에 적합함을 알 수 있다.

• 공간 감각의 형성 · 발달: C12 - C14의 설명에는 넓이가 같은 도형을 구성하는 과정에서 고무줄로 도형을 뒤집거나 옮기기를 했음을 포함한다.

• 평면도형의 넓이와 둘레 및 관계 학습: 이 시간의 수업에서는 기하판이 지닌 중요한 기하학적 성질과 구조를 도형의 넓이 학습에 충분히 활용한 셈이다. C12 - C15와 같은 반응은 기하판 활동이 아니라면 쉽게 나타날 수 없는 반응이다.

• 좌표기하의 기초적 경험: C12 - C15, [그림 23]의 반응은 좌표와 선분의 길이를 바탕으로 넓이의 보존성을 인식한 것이라고 볼 수 있다. 이와 같은 좌표 개념의 기초는 기하판의 구조에 잘 나타나고 있다.

• 도형의 합동과 닮음 및 관련 성질 학습: 등적변형에서는 도형의 합동이 우선적으로 기초가 된다. 또 사다리꼴을 삼각형이나 직사각형으로 분해할 생각을 하는 것도 '분해합동'의 개념을 이용하고 있다.

• 등적변형: 평면도형의 넓이 학습에서는 등적변형이 가장 중요한 중심 아이디어이다. 특히 C16과 같은 생각은 C12 - C15와 같은 반응의 바탕에 깔려 있는 생각이다. 등적변형을 할 때, 점 종이나 모눈종이를 사용할 수도 있으나 기하판에서의 고무줄 조작이 훨씬 편리한 것으로 생각된다.

• 기하학적 추론: C4, C5, C8, C9, C12 - C15의 반응은 기하학적 기본 성질을 바탕으로 추론하는 것이라고 볼 수 있다.

• 수학적 의사소통: 이에 대해서는 이미 목표 달성 부분에서 언급했지만, 기하판은 어린이들의 다양한 사고를 부추길 뿐 아니라, 우선 직관을 바탕으로 남에게 이야기할 거리를 많이 만들 수 있도록 해주며, 이로부터 점점 논리적 표현과 연역적 사고로 이행하게 한다.

• 패턴의 탐구: C12 - C15의 반응이 겉으로 보기에는 서로 다른 것 같아도, 그들이 지니고 있는 중요한 공통 성질이 있다. 이와 같은 성질을 직관적으로 인식 가능하게 하는데는 기하판이 효과적이라 할 수 있다.

• 학생의 능동적인 학습 참여 유도: 본 수업 이후 단기간 안에 또 기하판을 활용하는 수업을 한다면 어린이들이 어떤 반응을 보일지는 모르지만, 65분간의 장시간 수업에도 불구하고 C18 - C23의 반응에 나타나듯이 대부분의 어린이들이 학습 활동에 적극성을 보였다. 이는 기하판의 활동에 호기심과 흥미를 가졌기 때문으로 생각한다.

• 문제해결과 수학적 사고 신장: 목표 및 수학적 사고 경험 부여 측면에서 이미 언급하였다.

이상과 같은 분석 내용을 바탕으로, 기하판은 수학 학습의 장에서 학습자의 조작과 사고를 자연스럽게 부추기고, 학습 참여와 의사소통을 활성화하며, 매우 구체적인 상황으로부터 추상적 일반화를 가능하게 하고, 추상적 아이디어를 설명하기 위해 구체화할 수 있도록 해주는 대단히 가치 있는 교구라 할 수 있다.

이 수업의 진행 과정에서 많은 어린이들이 공식을 이미 알고 있다는 점은 예상에 빗나갔지만, 지도 계획을 자연스럽게 수정하여 의미 있는 학습이 이루어지도록 했던 것은 바람직한 지도였다고 평가하고 싶다. 특히, 어린이들이 아직 배우지 않은 것까지 포함한 모든 등적변형 방법을 찾아내었던 것은 기하판의 활용에 의한 조작 덕분이 아닌가 생각한다. 그러나, 기하판에 대한 생소함의 극복에 상당한 시간이 소요됨으로써, 본시의 학습에서 노린 관계적 이해에는 다소 소홀했으며, 점종이의 효과적 사용과 판서에 대한 사전 계획 수립이 미흡하여 그 효과를 별로 거두지 못했던 점은 반성의 여지로 남는다.

Ⅳ. 결언

이 연구는 수학교실에서 기하판의 활용에 관한 활성화를 도모할 목적으로, 먼저 다목적 조작 도구인 기하판에 대하여 그 활용 의의를 다소 상세하게 분석하였다. 그리고, 이와 같은 활용 의의를 보다 강하게 주장하고자, 실제로 기하판을 활용한 수업을 실시하고 그 사례를 예시하였으며 그에 대해 분석하였다. 이를 통해 기하판은 도형 영역뿐 아니라 다양한 영

역에서 수학적 원리를 구체적으로 표현할 수 있고, 그로부터 추상화가 가능하며 수학적 관계의 탐구에 적절하고, 수학적 성질의 발견에 유용하다는 것을 밝혔다. 더욱이, 이는 학생의 학습 동기를 유발하기에도 적절하므로, 보다 적극적이고 능동적으로 수학 학습에 참여하도록 할 수 있음을 알았다.

현장에서는 적당한 크기와 분량의 기하판을 우선 손수 제작하여 점 종이와 함께 활용함으로써 그 효과를 거둘 수 있을 것이고, 이에 따라 그 활용을 확대해 나가야 할 것이며, 보다 효율적인 활용 방안에 대한 지속적인 연구도 이루어져야 할 것이다.

끝으로, 수학과 학습에서 효과적인 학습 교구의 활용은 학습자의 흥미와 학습 동기를 유발하고 폭넓은 경험을 제공하며, 탐구 능력의 신장과 관계적 이해를 촉구하고, 교실에서의 활발한 의사소통 기회를 제공하는 등, 그것이 차지하는 비중이 실로 크다고 할 수 있다. 이러한 점에서 볼 때 수학교실에서 다양한 학습 교구의 적극적인 활용은 무엇보다 절실히 요구된다.

참고문헌

강문봉 외(2001). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

교육부(1999). 초등학교 교육과정 해설(IV). 대한교과서주식회사.

김응태 외(1989). 增補 數學敎育學槪論. 서울: 서울대학교출판부.

우정호(2000). 수학학습-지도원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

정동권(2000). "초등학교 수학 수업에서 점판(geoboaed)의 활용". 대한수학교육학회 2000년도 춘계 수학교육학연구발표대회논문집. 11-40.

______(2001). "평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장". 인천교육대학교 과학교육논총, 13, 1-36.

황우형 역(1998). 수학학습심리학. 서울: 민음사.

Bennett, A., Maier, E., & Nelson, L. T.(1987). *Looking at geometry.* Math Learning Center.

Britton, Barbara J. & Stump, S. L.(2001). Unexpected riches from a geoboard quadrilateral activity. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(8). 490-493.

Gattegno, Caleb(1971). *Geoboard geometry*. Educational Solutions, Inc.

Kennedy, Joe & Mcdowell, Eric(1998). Geoboard quadrilaterals. *Mathematics Teacher,* 91(4), 288-290.

Musser, Gary L., & Burger, William F. (1997). *Mathematics for elementary teachers* (Fourth Edition). Prentice-Hall, Inc.

NCTM(1990). *Project to enrich school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM(1993). *Implementing the K-8 curriculum and evaluation standards: readings from Arithmetic Teacher*, National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM(1995). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades K-6, geometry and spatial sense*, National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Reys, Robert E.(1975). Considerations for teachers using manipulative materials. *Teacher-made aids for elementary school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Trafton, Patricia A. & Hartman, Christina(1997). Exploring area with geoboards. *Teaching Children Mathematics*, 4(2), 72-75.

平林一榮(1994). 小學校敎師の數學體驗. 東京: 黎明書房.

Significance and Analyzing Episode on Using Geoboards in Mathematics Classroom

Jeong, Dong Gweon (Inchon National University of Education)

Since the greater part of mathematical concepts have been developed in the direction of "from the concrete and realistic aspects to the abstract level", children should be secured to learn mathematics genetically with various manipulative materials.

The aim of this study is to instigate the active use of geoboards in mathematics classroom. To achieve this aim, we first embodied the several significances on the use of geoboards in mathematics instruction. And we then performed an instruction that children discover and justify the formula related to the area of trapezoid by exploring with geoboards, and analyzed the instructional episode to support our assertion about some secure merit accompanied by using geoboards.

From this study, we obtained the conclusion that geoboard activity contains many significances such as children can explore congruence, symmetry, similarity, fundamental properties of figures, and pattern. Futhermore, geoboard activity enable children to transform a figure into other equivalently, develop spatial sense, have basic experiences for coordinate geometry, build a concrete model to explain abstract ideas, and foster the ability of problem solving and mathematical thinking.