大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 67-87. July 2001

# 제 7차 수학과 교육과정 〔7-가〕 단계의 변수 개념 지도에 관한 교수학적 논의

김 남 희*

## Ⅰ. 머리말

대수적 이해의 핵심요소로 작용하는 변수는 학생들이 대수 중심의 학교 수학을 이해하는데 중요한 역할을 하는 기본 개념이다. 변수 개념을 올바로 이해하는 것은 산술에서 대수로의 이행을 위한 기초가 될 뿐 만 아니라 수많은 수학적 아이디어를 이해하기 위한 토대가 된다.

변수 기호의 사용으로 인해 생기는 위력이 대단히 큼에도 불구하고, 그리고 학생들이 수학에서 변수를 상당히 많이 다루고 있음에도 불구하고 학생들은 그 의미에 대한 고려 없이 그 조작적인 측면에 치중하고 있음을 학교현장에서 많이 관찰할 수 있다.

많은 학생들이 변수 기호에 적절한 수학적 아이디어를 연결시키지 못하고 의미 없는 기호 조작을 기계적으로 행할 뿐 그 수학적 의미를 진정으로 파악하고 있지 못한 것이다. 선행연구들은 변수 개념 지도에 관한 제 연구를 통해 학생들이 변수를 개념적으로 이해하고 있지 못한 사실에서 오는 학습의 어려움이 적지 않음을 강조하고 있다(Davis, 1975; Rosnick, 1981; Küchemann, 1981; Kieran, 1989, 1992; Wagner, 1983).

수학 언어 체계에서 핵심적인 요소로 작용하고 있는 변수에 대한 이해의 결여는 그 동안 변수 지도가 학습자로 하여금 형식적인 기호를 단순히 수용하도록 만드는 과정으로 행해진 것은 아닌가 하는 생각을 품게 한다. 수학에서 변수 개념은 형식적인 기호의 지도에 그쳐서는 안될 것이며 기호화된 변수가 무엇을 의미하는 것이며 그것이 수학에서 어떤 일을 하는 것인가에 대한 이해가 가능하도록 지도되어야 한다. 이는 변수 지도에서 목표로 해야 하는 것은 변수라는 기호에 대한 알고리즘적 조작만이 아닌 변수의 개념적 이해를 위한 교육이어야 한다는 것이다.

본 연구에서는 학생들에게 변수 사용의 실질적인 의미를 주기 어렵게 하는 요인으로 교과서에서 다루어지는 변수의 형식적인 처리를 지적하고자 한다. 또한 변수의 사용방식을 바르게 이해하기 어렵게 만드는 인지적인 문제들도 다루고자 한다. 더불어 제 7차 교육과정의 함수 개념 도입의 변화에 따른 변수 개념 도입의 변화도 함께 다룬다.

변수 개념 지도와 관련한 교수학적인 문제는 문제 초등, 중등전반에 걸쳐 다양하게 논의될 수 있지만 본 고에서는 '문자와 식' 단원에서 문자의 사용이 본격적으로 등장하고 '함수' 단원에서 변수에 대한 정의가 명시적으로 제시되는 제 7차 교육과정에 의한 중학교 [7-가] 단계 수학교과서를 논의의 대상으로 하였다.

---

* 전주대학교

## II. [7-가] 단계의 변수 개념

### 1. '집합'과 변수지도

#### 1) 문자로 이루어진 집합의 원소

집합 단원의 교과서 내용을 보면 $\{a, b, c\}$, $\{x, y, z\}$와 같은 문자의 집합을 흔히 발견할 수 있는데 문자를 원소로 하는 집합의 사용은 변수 개념의 인지적 장애로서 Wagner(1983)가 지적한 바 있는 서로 다른 문자는 항상 다른 대상을 의미한다는 생각을 초래할 수 있다. 즉, 변수를 표시하는 기호의 변화는 변수가 나타내고 있는 대상의 변화를 함의한다는 오개념을 불러 일으켜 학생들이 대수적 표현을 이해하는 데 있어서 인지적 갈등을 유발할 수 있다는 것이다(Wagner, 1983, p.477; Leinhardt et al., 1990, p.42; 김남희, 1992, pp.74-75). 이에 대한 지도상의 문제점은 이미 제 6차 교육과정에 따른 수학교과서의 내용을 예로 하여 다루어진 바 있다(김남희, 1999b). 그러나 현재 제 7차 교육과정에 의한 중학교 [7-가] 단계 교과서 13종을 검토해보면 여전히 문자로 이루어진 집합이 사용되고 있음을 확인할 수 있다. 대부분의 교과서가 일반화된 표현으로서의 문자사용과 동시에 같은 문자를 특수한 대상으로 다루는 혼합된 양상을 보이고 있다. 다음의 예를 보자.

> 일반적으로 집합은 알파벳 대문자 $A, B, C, \ldots$로 나타내고, 원소는 알파벳 소문자 $a, b, c, \ldots$로 나타낸다.
>
> ([7-가]단계 수학, '집합' 지도내용에서 인용)

교과서에서 위와 같은 설명이 제시되는 것은 아래와 같이 주로 원소와 집합 사이의 포함관계를 설명하기 위해서 선행되는 작업이다.

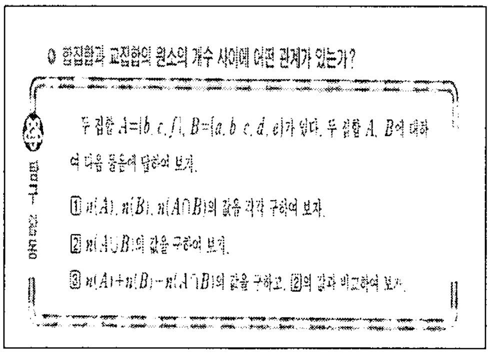
> $a$가 집합 $A$의 원소일 때, $a$는 집합 $A$에 속한다고 하고, 기호로 $a \in A$와 같이 나타낸다. 또 $a$가 집합 $A$의 원소가 아닐 때, $a$는 $A$는 집합 $A$는 집합 $a$ 에 속하지 않는다고 하고 기호로 $a \not\in A$ 와 같이 나타낸다.
>
> ([7-가]단계 수학, '집합' 지도내용에서 인용)

대부분의 교과서는 위의 표현에서 $A$ 집합 안에 있는 임의의 원소를 보통 소문자 $a$를 써서 나타냄을 암시하고 있다. 위에서 문자 A는 임의의 집합, 문자 $a$는 어떤 집합 $A$안에 있는 임의의 원소를 나타내기 위해 사용되었다. 이러한 문자사용에서 우리는 다가이름이라는 변수의 본질을 경험하게 되고 중요한 수학적 사고 중의 하나인 일반화를 표현하는 수단으로서의 변수 사용을 익히게 된다.

위의 내용과 관련하여 제 7차 교육과정에 의한 교과서를 보면 대부분의 교과서가 문자 $A$와 $a$등을 이용하여 임의의 집합과 원소에 대한 일반화된 설명(예를들면, $a \in A$와 같은 포함관계)을 제시한 이후에도 일반화된 문자로 사용된 동일한 문자를 원소로 하는 $\{a, b, c\}$와 같은 집합을 다루고 있음을 확인할 수 있다. 이러한 지도내용은 이는 변수 개념 이해와 관련하여 문제를 제기할 수 있는 부분이다. 교과서에 제시된 아래의 탐구활동의 예를 들어보자.

<그림 1>의 탐구활동에 대해 교과서는 <그림 2>와 같은 벤다이어그램을 이용한 풀이과정을 제시하고 있다. 이 그림은 과연 적절한 것인가? <그림 3>의 경우는 어떠한가? 교과서의 '집합과 자연수' 단원에서 $a, b, c\ldots$를 집합의 원소를 대표하는 일반화된 문자로 사용하는 것과 <그림 2, 3>의 경우를 어떻게 타협할 것인가? <그림 1>에 사용된 집합의 원소인 문자 $a, b, c$를 <그림 4>에서와 같이 사용된 문자

$a, b, c$와 어떻게 차별화 할 것인가? 수학에서 변수로 사용되는 문자 $a, b...$등은 상황에 따라 같은 값을 가질 수도 있는데 위의 탐구활동에서 이러한 사실을 어떻게 처리할 것인가? 우정호(1998)는 수학에서 괄호{ }는 일종의 언어적인 표현이므로 그 안에도 언어적인 표현이 들어가야 하며 그 지시하는 대상이 명확하지 않으면 안된다고 말하였다(우정호, 1998, p.132). 학교수학은 $a, b, c$는 알파벳 $a, b, c$ 가 아닌 다른 것을 나타낼 수 있는 변수로 사용되고 있다는 사실 즉, 그것들이 일종의 수학 형식언어로 사용되고 있음을 간과해서는 안된다. 교과서의 정답은 위의 <그림 2>에 따라 하나의 답을 제시하고 있지만 사실상 문자 $a, b, c, d, e, f$ 가 수학에서 변수로 사용되는 형식언어라는 점을 생각할 때 그것들이 경우에 따라 같은 값을 가질 수도 있음을 의식하지 않을 수 없다.


○ 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이에 어떤 관계가 있는가?

탐구활동

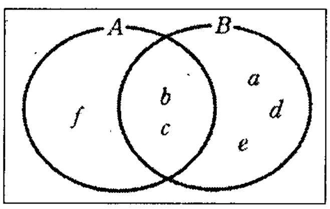
두 집합 $A=\{b, c, f\}$, $B=\{a, b, c, d, e\}$가 있다. 두 집합 $A$, $B$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1 $n(A)$, $n(B)$, $n(A\cap B)$의 값을 각각 구하여 보자.

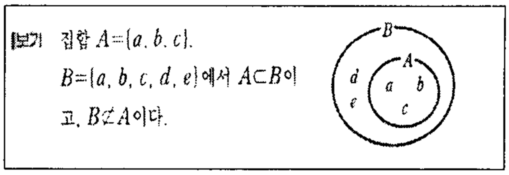
2 $n(A\cup B)$의 값을 구하여 보자.

3 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$의 값을 구하고, 2의 값과 비교하여 보자.

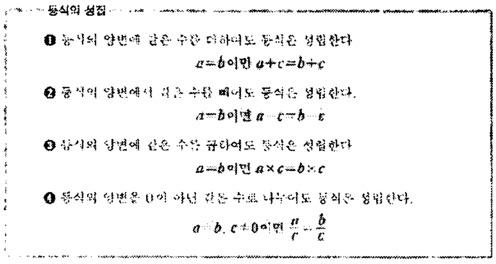
<그림 1> 문자로 이루어진 집합을 다루는 예 ([7-가]단계 '집합과 자연수' 단원에서)




<그림 2> 탐구활동에 대한 벤다이어그램




<그림 3> 문자로 이루어진 집합 사이의 포함관계 ([7-가] 단계 '집합과 자연수' 단원에서)


등식의 성질

❶ 등식의 양변에 같은 수를 더하여도 등식은 성립한다

$a=b$이면 $a+c=b+c$

❷ 등식의 양변에서 같은 수를 빼어도 등식은 성립한다.

$a=b$이면 $a-c=b-c$

❸ 등식의 양변에 같은 수를 곱하여도 등식은 성립한다

$a=b$이면 $a\times c=b\times c$

❹ 등식의 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다.

$a=b$, $c\neq 0$이면 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

<그림 4> 일반화된 표현에서의 문자 $a, b, c$ ([7-가] 단계 '문자와 식' 단원에서)

위와 같이 경우에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있는 수학의 형식언어인 문자 $a, b, c...$를 집합의 원소로 무의식적으로 자주 사용하게 되면 학생들은 수학에서 사용되는 문자 $a$, $b$, $c...$는 결코 서로 같은 값을 가질 수 없다는 인식을 갖게 될 수 있다. 이러한 생각을 갖게 되면 변수를 다루는 문제 상황에서 $a=b$, $x\in\{a, b, c\}$, $\{a, b, c\}\cap\{1, 2, 3\}\neq\varnothing$와 같은 수학적 표현을 이해하는데 곤란을 겪게 될 수 있는 것이다(우정호, 1998, p.133, pp.243-244). 따라서 문자를 집합의 원소로 사용하는 꾸민 수학의 내용을 교과서에서 자주 다루는 것은 자칫 수학에서의 문자 사용의 유연성에 대한 이해의 결여로 변수 개념의 형성에 곤란을 초래할 수 있다는 사실을 항상 염두에 두고 그 사용에 있어서 신중한 주의를 기울여야 할 것이다(김남희, 1999b, p.26).

위의 탐구활동에 제시된 문제는

$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

에 관한 문제로 바꾸어도 합집합과 교집합의 원소의 개수에 관한 개념을 똑같이 다룰 수 있다. 이러한 교수학적인 조치는 학생들이 변수 개념학습에서 겪는 인지적 어려움을 자연스럽게 방지해 줄 수 있는 세심한 배려인 것이다.

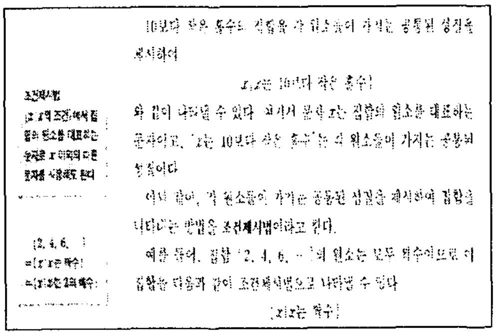
### 2) 조건제시법에서의 문자 $x$

'집합'단원에서 변수 개념 지도와 관련하여 교수학적인 주의가 요구되는 내용은 집합의 표현에서 다루는 조건제시법의 지도이다. <그림 5>의 지도내용에서 조건제시법에 사용되는 문자 $x$의 의미를 생각해 보자.

교과서에 제시된 대로 '문자 $x$는 집합의 원소를 대표하는 문자'라는 설명은 곧 그것이 변수임을 의미하는 것이다. 좀 더 자세히 말하면 조건제시법의 표현은 '다가이름'이라는 변수의 본질이 드러나는 상황인 것이다. 이렇게 변수의 본질이 드러나면서 그것이 형식적인 문자로 다루어지기 시작하는 자연스런 문제상황은 학생들이 변수에 대한 개념 이미지를 갖게되는 중요한 학습상황이다. 이 단계에서 집합의 원소를 대표하면서 여러 가지 값을 갖을 수 있는 문자를 수학에서 변수라고 부를 수 있다는 부연설명을 하는 것은 어떠한가?[1] 아니면 굳이 '변수'라는 용어를 사용하지 않아도 이 단계에서 문자 $x$가 사용되는 구체적인 상황을 드러내주는 것은 어떠한가? 예를 들면,

$$\{x \mid x\text{는 10보다 작은 홀수}\}$$

라는 표현 다음에 '따라서 $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=7$, $x=9$이 될 수 있다'는 의미가 전달되는 표현이 보충되는 것은 어떠한가? 물론 조건제시법을 원소나열법으로 바꿀 때 $\{1,3,5,7,9\}$의 표현이 나타나지만 문자 $x$가 무엇을 의미하고 어떻게 사용되고 있는지에 대한 설명은 인색한 감이 없지 않다.


조건제시법 {x | x의 조건}에서 집합의 원소를 대표하는 문자로 x 이외의 다른 문자를 사용해도 된다

{2, 4, 6, …}
={x | x는 짝수}
={y | y는 2의 배수}

10보다 작은 홀수는 집합을 각 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여

{x | x는 10보다 작은 홀수}

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 문자 x는 집합의 원소를 대표하는 문자이고, 'x는 10보다 작은 홀수'는 각 원소들이 가지는 공통된 성질이다.

이와 같이, 각 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.

예를 들어, 집합 {2, 4, 6, …}의 원소는 모두 짝수이므로 이 집합은 다음과 같이 조건제시법으로 나타낼 수 있다.

{x | x는 짝수}

<그림 5> 집합의 표현에서 조건제시법의 지도내용
([7-가]단계 '집합과 자연수' 단원에서)

교과서에는 변수 $x$를 사용하여 조건제시법을 표현하는 것에 그치고 있기 때문에 학생들에게는 사용된 문자 $x$의 변화성이 명확히 전달되기 어렵다. 학교 현장에서 중학생들이 조건제시법을 "$x$바 $x$는 ... 이라고 쓰는 것[2]"이라고 외우는 것을 자주 볼 때 수학적인 표현과 그 표현이 의미하는 바의 전달이라는 측면에서 수학적인 의사소통이 잘 이루어지고 있는 것인지 재고해보게 된다.

함수 단원에서 등장하는 변수의 개념 정의가 동일한 교과서 내에서 "$x, y$와 같이 여러 가지 값을 갖는 문자"라고 제시되는 것과 관련지어 보았을 때, 조건제시법에서 사용된 문자 $x$는 '변수' 개념이 적용될 수 있는 예임에 분명하다. 그렇다면 집합의 원소를 대표한다는 형식적인 설명 다음에 $x$의 값이 변할 수 있다는

1) 우리 나라 학교수학 교과서에서 흔히 볼 수 있는 특징은 변수에 대한 정의가 함수 단원에서 등장하기 때문에 함수 단원 이전에 변수를 암묵적으로 사용하면서도 변수로 사용된 문자사용법에 대한 설명이 교과서 전반에서 제외되어 있다는 것이다.

2) $\{x \mid x$ 는 (조건)$\}$을 그대로 부르는 말

즉, 문자 $x$의 '변화성'이 보충되어 다루어질 필요가 있는 것이다.[3)]

## 2. 일반화된 표현과 변수지도

변수의 정적측면으로 설명되는 다가이름(Polyvalent names)이라는 변수의 본질은 그것이 일반적인 명제를 형성하는 수단으로 작용할 때 가장 뚜렷하게 나타난다.[4)]

다가이름으로서의 변수는 수학적 사고에서 중요한 의미를 가지는 '일반화'된 법칙을 표현하는 도구로서 수학에서 핵심적인 역할을 담당하고 있음을 생각할 때, 학교수학의 학습을 통해 학생들이 패턴에 대한 감각을 갖는 능력, 그리고 인지된 패턴을 기호로 표현할 수 있는 능력을 갖추는 것은 대단히 중요한 학습중의 하나임을 부인할 수 없다. 이러한 능력을 통해 학생들은 대수적인 표현을 의미 있게 경험하며 어떠한 상황을 수학적인 안목에서 바라볼 수 있는 태도를 갖게 되는 것이다.

그러나 변수를 단순한 자리지기로 규정하고 있는 학교수학에서는 사실상 다가이름으로서의 변수 사용이 대수의 목적인 일반화된 법칙을 구성해 가는 맥락에서 의미 있게 지도되고 있지 못한 실정이다. 학교수학에서 지도되는 대수는 산술의 일반화로서 일반화된 법칙의 구체적인 예는 대수에서 가장 두드러지게 나타난다. 교과서 전반에서 걸쳐 산술규칙을 일반화한 식이 암묵적으로 혹은 명시적으로 가장 빈번히 사용되고 있다. 따라서 일반화된 식에 사용되고 있는 문자가 '임의의 수'를 나타낸다는 것을 학생들이 이해하지 못한다면 산술규칙을 일반화한 식을 학습자가 의미 있게 받아들이지 못해 결국 수학학습에서 대수의 강력한 힘을 경험하지 못하고 계속되는 학습을 통한 수학적 지식의 개발이 효과적으로 이루어지기 어렵게 된다. [7-가]단계 수학 교과서의 지도내용을 예로 들어 설명해 보자.

<그림 6, 7>에서 비교한 된 바와 같이, [7-가]단계 수학교과서 13종을 검토해보면 같은 지도내용에서도 <그림 6>과 같이 일반화된 변수문자를 사용하지 않은 교과서도 있고 <그림 7>과 같이 문자를 사용하여 일반화된 표현을 제시하고 있는 교과서도 있다. <그림 7>과 같이 문제상황을 일반화하고 거듭제곱의 표현을 문자변수로 나타내고 있는 교과서로 수업을 하게 될 때 교사가 중요시하여야 할 것은 학생들이 여러 가지 구체적인 예를 통해 수가 놓여있는 자리에 문자를 대입하여 일반적인 표현을 구성하게 하는 과정을 실제로 경험할 수 있도록 하는 것이다. 여러 개의 특수한 경우를 통해 일반화를 구성한 후에 다시 일반화된 식을 해석해 보는 즉, 문자 $a$는 임의의 자연수를 타내는 것으로서

$a^2$에서 $a$가 3일 때는 $3^2$,

$a$가 4일 때는 $4^2$ ...

이라는 설명이 부가되어야 한다. 사용된 문자 $a$가 모든 자연수를 대표할 수 있고 있다는 생각을 학생들이 가질 수 있게 하는 것이 핵심이다.

수학의 역사적 발생과정을 보면, 현재의 수학이 미숙하고 직관적인 탐구기간을 거쳐 연역적이고 체계적인 구성에 이르기까지 얼마나 오랜 시간이 걸려 완성되어 온 것인지를 알 수 있다. 그 과정에서 무리수, 음수, 복소수, 문자

3) 문자(변수)에 따른 문제점은 집합의 내용 중 조건제시법의 표현 등에서 많이 문제가 제기되므로 집합을 어느 곳에서 다루도록 할 것인지에 대한 많은 연구가 있어야 할 것이다(김흥기, 2001, p.148).

4) 예를 들면, ' $\overline{AB}+\overline{BC}\geq\overline{AC}$ '에서의 문자 A, B, C는 평면 위에 있는 서로 다른 모든 세 점에 적용이 된다. 교환법칙 'a + b = b + a'에서의 문자 a, b 는 수로 된 임의의 순서쌍 (a, b)에 대해 적용된다.

$2\times2=2^2$ → 2의 제곱이라고 읽는다.
$2\times2\times2=2^3$ → 2의 세제곱이라고 읽는다.
$2\times2\times2\times2=2^4$ → 2의 네제곱이라고 읽는다.
……………………………………

$2^4$ ← 지수, 밑

와 같이 나타낸다. 이 때, $2^2$, $2^3$, $2^4$, …을 통틀어 2의 **거듭제곱**이라 하고, 2를 거듭제곱의 **밑**, 곱한 개수를 나타낸 2, 3, 4, …를 거듭제곱의 **지수**라 한다.
거듭제곱을 사용하면 다음과 같이 수의 곱을 보다 간단히 나타낼 수 있다.
$$2\times2\times2\times2\times3\times3\times3=2^4\times3^3$$

<그림 6> 일반화된 변수문자를 사용하지 않은 예
([7-가]단계 '소인수분해' 지도내용에서)

수를 여러 번 곱할 때 이것을 곱하는 수와 곱한 횟수를 이용하여 간단히 나타낼 수 있다.
예를 들어,
$$2\times2\times2=2^3,\ 5\times5\times5\times5=5^4$$
과 같이 나타내고, 이것을 각각 2의 세제곱, 5의 네제곱이라고 읽는다.
일반적으로, 자연수 $a$에 대하여
$a\times a$를 $a^2$으로 나타내고, $a$의 제곱
$a\times a\times a$를 $a^3$으로 나타내고, $a$의 세제곱
……
이라고 읽는다.
이 때, $a^2$, $a^3$, …을 $a$의 **거듭제곱**이라고 하며, $a$를 거듭제곱의 **밑**, 2 또는 3과 같은 곱한 횟수를 거듭제곱의 **지수**라고 한다.

지수
$5^4$
밑

<그림 7> 일반화된 변수 문자 사용의 예
(<그림 6>과 다른 교과서에서 인용)

변수, 미적분의 기본개념 등의 덜 직관적인 개념은 창안되거나 수용되는데 몇 세기가 걸렸다. 수학에서 미지수를 나타내는 문자의 사용은 그리스 시대까지 거슬러 올라갈 수 있으나, $ax+b$와 같이 임의의 수를 나타내는 $a, b$와 같은 변수문자를 도입한 것은 16세기 후반 *Vieta*에 의해서였다. 이로써 방정식의 일반해를 구할 수 있게 되고, 대수학 나아가 현대 수학 발전의 결정적인 계기가 되었다. 변수문자 사용이 이렇게 더게 나타난 것은 이로써 직관을 크게 초월한 고도의 추상화가 이루어지기 때문이었을 것이다(우정호, 2000, p.133).

수학자들이 문자변수를 창안하고 수용하기까지 오랜 기간이 걸렸다는 것은 학생들이 문자변수를 직관적으로 받아들이고 사용하는데 어려움을 겪을 것임이 분명하다는 것을 말해주는 것이다. 학교수학에서 문자변수의 지도는 수학자들이 하였던 것과 마찬가지로 문자변수에 점진적으로 친숙해 지도록 유도하는 과정이어야 할 것이다.

자연수 6은
$$6=2\times3$$
과 같이 소수의 곱으로 나타낼 수 있다.
일반적으로, 자연수 $a$, $b$, $c$에 대하여
$$a=b\times c$$
로 나타내어질 때, $a$의 약수 $b$와 $c$를 $a$의 인수라고도 한다. 특히, 소수인 인수를 **소인수**라고 하며, 자연수를 그 소인수들의 곱으로 나타내는 것을 **소인수분해**한다고 한다.

<그림 8>

두 유리수 $a$, $b(b\neq0)$에 대하여
$$a\div b=\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$$
이므로 $a$를 $b$로 나누는 것은 $a$에 $b$의 역수 $\frac{1}{b}$을 곱하는 것과 같다.

<그림 9>

[7-가]단계 교과서들을 살펴보면 교과서 전반에서 걸쳐 <그림 8, 9>와 같은 일반화된 식, 산술규칙을 일반화한 식이 암묵적으로 혹은 명시적으로 빈번히 사용되고 있음을 쉽게 알 수 있다. 그러나 대부분이 $a+b=b+a$와 같은 일반적인 표현을 제시하는데 그치거나 아니면 일반화된 식을 제시한 후 그 식에 수를 대입해보는 몇 번의 경험을 갖게 하는데 그치고 있다. 즉, 일반화의 구성보다는 특수화의 지도과정에 편중되어 있는 것이다. 이는 교수학적으로 바람직하지 않다. 이는 학생들로 하여금 수학을 연역적으로 바라보게 만들며 수학의 중요한 측면인 귀납의 과정을 가리우는 것이다. 여러 가지 구체적인 예를 통해 수가 놓여있는 자리에 문자를 대입하여 일반적인 표현을 구성하게 하

는 과정을 학생들이 직접 경험하게 하는 것이 필요하다. 이런 과정을 통해 비로소 학생들은 일반화된 명제를 구성하는 수단인 다가이름으로서의 변수의 본질을 이해하고 수학적 문맥에서 그것을 올바로 사용할 수 게 되는 것이다.

### 3. 기호 $+a$, $-a$와 변수지도

[7-가]단계 수학교과서의 '정수와 유리수'단원에서 기호 $+a$, $-a$는 각각

'플러스 $a$', '마이너스 $a$'

라고 읽도록 지도하고 있다. <그림 11>의 교과서 제시문을 보자.

> 여기서, +를 양의 부호, −를 음의 부호라고 하며, $+a$와 $-a$는 '플러스 $a$', '마이너스 $a$'라 읽는다.
> 또, 양의 부호 +가 붙은 수를 **양수**, 음의 부호 −가 붙은 수를 **음수**라고 한다.
>
> • +3은 플러스 3으로 읽고 −3은 마이너스 3으로 읽는다.

<그림 10 > 기호 $+a$, $-a$ 의 지도
([7-가]단계 수학교과서의 '정수와 유리수'단원에서)

$+a$, $-a$를 각각 '플러스 $a$', '마이너스 $a$'라고 읽는 문제는 변수 개념에 대한 인지적 장애를 유발할 가능성이 있다. 더욱이 '+가 붙은 수는 양수'라는 표현에 따라 '$+a$'의 의미를 이해하는 문제는 더욱 어려워진다. 이는 $x$는 양수이고 $-x$는 음수라고 생각하게 되는 변수에 대한 오개념의 근원이 될 수 있다.

제 6차 교육과정에 이어 제 7차 수학과 교육과정에서도 [7-가]단계 '수와 연산' 영역의 '정수와 유리수' 지도내용에서 <용어와 기호>에 $+a$, $-a$를 명시적으로 포함하고 있음을 고려할 때, $+a$, $-a$의 의미에 대한 충실한 지도가 요망된다.

$+a$, $-a$를 각각 '플러스 $a$', '마이너스 $a$'라고 읽는 문제는 어떻게 수정되어야 하는가? 교사는 $-a$가 '$a$와 절대값이 같고 부호가 반대인 수'라는 개념으로 알고 있다. 그것을 '마이너스 $a$' 로 읽는 것은 학생들에게 어떤 의미로 전달되는 것인가?

이에 대한 답을 얻기 위해 미국의 교과서 Addison-Wesley Mathematics Grade 6(Eichoiz, et al., 1991)의 예시문을 들어보자.

> +3은 '양수 3(positive three)', −8은 '음수 8(negative eight)' 로 읽는다. +3과 상반인 수(the opposite of +3)는 −3이다.
> (김홍기, 2001, p.145에서 재인용)

Mathematics(1994)에는 다음과 같이 기술되어 있다.

> $-a$ 를 '음수 $a$' 또는 '마이너스 $a$'라고 읽으면 안되고 'a와 반대(상반)인 수'라고 읽는다(같은 책, p.145에서 재인용).

그리고 이에 대한 이유로 수학에서 부호 '−'가 다음과 같은 세 가지 의미를 갖고 때문이라고 말하고 있다.

> 기호 − 는 세가지로 사용된다. '마이너스(minus)'는 뺄셈을 나타내는 조작기호를 나타내기 위해 사용된다. '음수(negative)'는 수직선 위에서 원점을 기준으로 왼쪽에 있는 수들을 나타내는데 사용된다. '상반(opposite)[5]'은 원점으로부터 같은 거리에 있으나 반대 방향에 위치해 있음을 의미하기 위해 사용된다. 따라서 이는 양수일 수도 있고 음수일 수도 있는 것이다.
> (같은 책, p.146에서 재인용)

그리고 위의 설명에 다른 보기로 다음을 들고 있다.

5) 마주보고 있는, 반대편의, 맞은 편의, 정반대의, 상반되는 ...등의 의미이다.

<－기호 사용의 예>

① $(-2)+(+9)$ : 음수(negative)

② $-(+6)+(+4)$ : 상반(opposite)

③ $(+4)-(+7)$ : 마이너스(minus)

④ $-x$ : 상반(opposite)→ －가 변수 앞에 홀로 제시되어 있을 때에 그것은 항상 상반(opposite)을 나타낸다.

⑤ $x-y$ : 마이너스(minus)→ －가 두 개의 변수 사이에 제시되어 있을 때에 그것은 항상 뺄셈(minus)을 나타낸다.

위의 설명은 $-x$ 기호의 올바른 사용을 강조하고 있다. 기호 $-x$는 '$x$와 반대(상반)인 수'로 읽어야 하며 '음수 $x$' 나 '마이너스 $x$'로 읽어서는 안된다는 것이다. 이렇게 하여야만이 수학에서 접하는 여러 가지 많은 혼란을 덜 수가 있는 것이다. 이러한 설명에 비추어보면, 현재 우리 나라 [7-가]단계 수학교과서에서 $+a, -a$를 여전히 '플러스 $a$', '마이너스 $a$' 라고 읽는 문제는 재고의 여지가 있는 것이다.

### 4. 방정식에서의 변수 지도

제2차 교육과정기(1963년～1973년)에 사용된 교과서에서 변수라는 용어는 2학년 등식과 부등식 단원에서 처음 등장하는데 다음과 같이 변수는 그 용어에 대한 정의 없이 방정식의 해에 대한 자리지기의 개념으로 곧바로 도입되고 있다.

> 방정식에 들어있는 문자를 미지수 또는 변수라 한다. (이성헌, 1967, p.50)

3학년 방정식 단원에서는 다음과 같은 표현으로 미지수는 곧 변수라는 것을 명시적으로 강조하고 있다.

> 이차방정식을 성립시키는 미지수(변수)의 값을 근이라 한다. (이성헌, 1973, p.96)

또한, 다음과 같이 변수를 함수 단원에까지 확장하여 사용하면서 변수를 함수 관계에서의 변하는 양을 나타내는 개념으로 다루고 있다.

> 변화하는 두 수량 $x, y$중 $x$의 값이 정해지면 그에 대응하여 $y$의 값이 단 하나로 정해지는 관계가 있을 때, $y$는 $x$의 함수라고 하고.....(중략) 위에서 $x, y$를 변수라고 한다. 특히, $x$를 독립변수, $y$를 종속변수라고 한다.
> (이성헌, 1967, p.119)

그러나 방정식의 미지수로 변수로 설명하는 것은 제 2차 교육과정기의 교과서에서만 발견할 수 있는 특징이다.

제 2차 교육과정 이후에는 모든 교과서에서는 변수를 함수의 관계식에서 나타나는 문자로 도입하고 있다. 제 7차 교육과정에 따른 [7-가]단계의 교과서에서도 마찬가지이다. 오른쪽 <그림 15>에 제시된 바와 같이 방정식에서 사용된 문자변수도 미지수라는 용어로만 설명하고 있을 뿐이다.

등식 $x-12=332$와 같이 $x$의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식을 $x$에 대한 **방정식**이라고 한다. 이 때, $x$를 **미지수**라 하고, 방정식을 참이 되게 하는 미지수 $x$의 값을 그 방정식의 **해** 또는 **근**이라고 한다.

또, 방정식의 해를 구하는 것을 방정식을 푼다라고 한다.

예를 들어, 등식 $x-12=332$는 방정식이고, 이 방정식의 해는 $x=344$이다.

**1** $x$가 집합 $\{-1, 0, 1, 2\}$의 원소일 때, 다음 방정식의 해를 구하여라.

(1) $3x+1=-2$ (2) $-x-1=x-5$

<그림 15 > [7- 가]단계의 방정식 지도 내용

방정식에서의 $x$는 방정식의 해가 되는 것을 찾기 위해서 여러 가지 수를 대입해 볼 수 있다는 사실에 의해 변수 개념으로 파악된다. 그러나 방정식의 해에 대한 자리지기로서 사용된 문자를 변수로 파악하고 있는가를 조사하여 본 결과는 방정식에서의 문자 $x$는 변수가 아니다라고 답한 교사의 수가 상당히 많은 것으로 나타났다(김남희, 1997, p.109).

교사들은 일차방정식에서 $x$는 단 하나의 값을 갖기 때문에 $x$가 변하지 않고 고정된다는 생각을 하여 그것을 상수로 보고 이러한 생각을 확장하여 $n$개의 해를 갖는 $n$차 방정식의 경우에서도 $x$를 상수로 취급하고 있는 것이다. 방정식에서의 문자 $x$를 '변수'로 부르느냐, 그렇지 않느냐의 문제보다는 방정식의 문자 $x$를 '변화'의 측면에서 바라보고 있느냐가 중요한 문제이다.

교사들의 생각은 방정식에서 미지수로 사용되는 $x$는 이미 정해져 있는 것이기 때문에 변수가 될 수 없다는 것이다. 이러한 생각에는 모순이 있다. 첫째, 방정식에서 $n$개의 값을 갖는 문자를 변수로 여기지 않으면서 실제 그들은 변수를 여러 가지 값을 갖는 문자라고 생각하고 있다. 둘째, 근을 하나 갖는 일차방정식에서는 $x$의 값이 하나이기 때문에 그것을 상수로 보는 것이 언뜻 생각하기에는 옳은 것 같지만 일차방정식을 확장하여 생각해보면 경우가 달라진다.

일차방정식 $ax+b=0$ 에서 $a=0$ 이고 $b=0$ 인 부정방정식의 경우를 예로 들어보자. 이 일차 방정식은 무수히 많은 해를 가지기 때문에 이 경우 $x$가 갖는 값도 하나가 아니라 모든 실수가 되는 것이다.

위의 결과를 보면 학교수학에서 방정식에서 미지수로 사용되는 문자의 의미에 대한 일관된 해석을 해야할 필요성이 느껴진다. 교사와 학생들 모두 방정식에서 미지수로 사용되는 문자는 이미 정해져 있는 몇 개만의 값을 대신하는 것으로 보는 경향이 있는데 이러한 생각은 문제 상황의 결과적 측면 즉, 방정식의 풀이 결과에 국한된 생각이라고 할 수 있다.

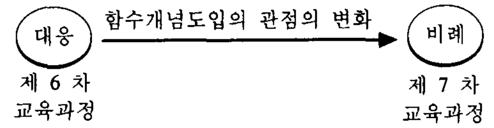
'미지수(변수)' 또는 '변수인 미지수'라는 표현은 미지수가 변수의 한 측면이고 미지수로 사용된 문자를 '변화'의 측면에서 볼 수 있음을 강조하는 것으로써 문자변수의 변화성을 드러내면서 변수에 대한 개념이미지를 명확히 해주는데 교수학적으로 도움이 되는 것이다.

## III. 제 7차 교육과정의 '규칙성과 함수' 영역에서의 변수

### 1. '함수' 지도 관점과 변수 개념

변수 개념지도와 관련하여 제 7차 교육과정에서 주목해야 할 부분은 함수 개념 도입의 변화이다. 우리 나라 제 6차 교육과정까지 중학교 1학년에서의 함수는 '두 집합 사이의 원소 사이의 대응관계'로 정의되었다. 그러나 제 7차 교육과정의 7 단계에서 함수는 '변화하는 두 양 사이의 관계'로 정의되면서 동시에 정비례나 반비례 등의 비례관계를 이용하여 도입된다.

우리 나라 제 3차 교육과정이후부터 제 6차 교육과정까지 유지되었던 대응관점의 함수 정의는 현대 수학적인 경향을 지나치게 추상적인 방식으로 지적되어 온 바, 학생들에게 보다 친숙하게 수용될 수 있고 실생활과 관련을 짓기도 용이한 비례와 변화의 관점으로 함수의 정의가 달라진 것이다.[6]




<그림 16> 함수 개념 도입에 있어서의 관점의 변화

제 7차 교육과정에서 대응관계로 도입하던 함수 개념을 비례관계를 이용하여 도입하는 것은 함수의 개념이 종속에서 대응으로 발달해 왔다면 종속에서 대응의 순서로 함수를 지도하는 것이 학생들이 함수를 받아들이고 이해하는데 더욱 효과적이라는 생각을 반영하고 있는 것이다[7].

함수의 정의가 '두 집합 사이의 원소 사이의 대응관계'에서 '변화하는 두 양 사이의 관계'로 변화된 것은 변수 지도에 어떠한 영향을 주는 것인가? '학생들에게 보다 친숙하게 수용될 수 있고 실생활과 관련을 짓기도 용이한 비례와 변화의 관점'이라는 위의 설명에 비추어 보면 변수의 본질을 '실제적으로 변화하는 것' 즉 '변하는 대상'으로 변수를 다루겠다는 의도가 깔려있다고 볼 수 있다.

함수, 변수가 다루어지는 '규칙성과 함수' 영역에 대한 다음의 교육청 자료내용을 보면 자연현상에서 일어나는 사건을 통해 함수를 도입하는 것을 기본전제로 하고 있으며 이 역시 '실제적으로 변화하는 것' 즉 '변하는 대상'인 변수의 본질을 강조하고자 함이 내포되어 있는 것이다.

> 자연현상에서 일어나는 사건을 통해 규칙성을 얻는 활동은 이 영역의 가장 기초적인 학습활동이며 아울러 변수와 변역의 개념에 대한 학습활동도 동시에 이 활동에 포함된다.
>
> (서울특별시교육청, 2000, p.224)

제 7차 교육과정에서의 변수 지도는 '변하는 대상'으로서의 변수의 본질을 부각시키려는 의도가 강하며 이는 제 1, 2차 교육과정의 지도 특징과 비슷하지만 다루는 문제상황은 그 때보다 훨씬 다양하고 현실적인 측면을 고려하여 제시하고자하는 것으로 파악된다. 이는 <학습 지도상의 유의점>에서 명시적으로 밝히고 있는 항목 즉, '① 생활 장면에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례 관계를 이해하게 한다'에서 더욱 분명하게 드러난다.

<7-가 단계>

(다) 규칙성과 함수

1 함수와 그래프
① 정비례 관계와 반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 식으로 나타낼 수 있다.
② 함수의 개념을 이해한다.
③ 순서쌍과 좌표를 이해한다.
④ 함수의 그래프를 그릴 수 있다.
2 함수의 활용
① 함수를 실생활 문제에 활용할 수 있다.
<용어와 기호> 정비례, 반비례, 함수, 정의역, 공역, 함수값, 치역, 변수, 좌표, 순서쌍, x좌표, y좌표, 원점, 좌표축, x축, y축, 좌표평면, 제 1, 2, 3, 4 사분면, 함수의 그래프, $y=f(x)$

<학습 지도상의 유의점>
① 생활 장면에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례 관계를 이해하게 한다.
② 함수 개념의 도입은 비례 관계를 이용한다.
[심화과정]
① 실생활의 다양한 소재에서 함수관계가 있는 것을 찾아보고, 이를 식으로 나타낼 수 있다.

<그림17> 제7차 수학과 교육과정에 제시된 [7-가]단계의 함수부분(교육부, 1997, P.68)

---

6) 개념을 도입하는 관점의 변화는 교육의 내용의 양이라는 측면에서의 변화를 주지는 못하지만 학생들이 좀 더 자연스럽게 받아들일 수 있는 방식으로 도입되기 때문에 내용의 난이도는 다소 낮아졌다고 할 수 있다(박경미, 2000, p.39).

7) '함수 개념의 도입은 비례 관계를 이용한다'는 것의 의미는 결국 함수의 속성을 종속으로 파악하게 한다는 것을 의미하는 것이라 할 수 있을 것이다(박교식, 1999, p.412).

또한 함수 도입에 이용하는 정비례와 반비례의 개념은 제 6차 교육과정에서는 초등학교 6학년에 제시되었던 내용으로써 그것을 중학교 1학년 단계(7 단계)에서 다루기로 한 것은 좀 더 초등화된 내용을 통해 함수를 다루게 함으로써 학생들에게 실제적으로 변화하는 양상을 보이고자 하는 뚜렷한 시도가 엿보이는 것이다.

## 2. 변수 개념의 '집합론적인 접근'

함수의 본질을 종속으로 파악하게 되면 한 변수가 변화하는 것에 따라 다른 한 변수가 변화한다는 속성을 강조하게 된다. [7-가] 단계의 함수지도에서 의도하는 것이 '종속'이라고 보았을 때, 그것은 변수 개념 발생의 근원을 드러내어 실세계의 '변하는 대상'으로 취급하겠다는 의도를 함의하는 것이다. 이는 사실상 집합의 원소로 변수를 다루는 '집합론적인 접근'을 배제함을 의미하는 것으로 보아야 할 것이다.

그러나 제 7차 교육과정에 따른 [7-가] 단계 교과서 중에는 다음과 같이 변수를 집합론적인 용어로 취급하고 있는 교과서가 관찰된다.

> $x, y$와 같이 어떤 집합에 속하면서 여러 값을 가지며 변하는 문자를 변수라고 한다.
>
> ([7-가] 단계 교과서에서)

이는 제 6차 교육과정에 따른 중학교 1학년 교과서에서 변수 정의가 "어떤 집합에 속하는 여러 가지 값을 나타내는 문자"로 서술되어 있는 것과 다름이 없다. 또한 어떤 교과서들은 변수를 집합론적인 용어로 정의하고는 있지는 않지만 변수 개념을 집합론적인 접근으로 다루어가고 있음이 쉽게 관찰된다. 변화하는 두 양(변수) 사이의 비례, 반비례 관계를 이용하여 함수를 도입하고는 있지만 '함수의 뜻'을 다루고 함수를 익히게 하는 단계에서는 집합론적인 접근의 모습을 보이면서 변수를 집합의 원소를 번갈아 가면서 대입할 수 있는 형식적인 기호로 취급하고 있다.

| |
|---|
| (예제) 정의역이 $\{1, 2, 3, 4\}$이고, 공역이 수 전체인 집합인 함수 $f(x)=x+3$ 에 대하여 다음을 구하여라.<br>(1) 함수값 $f(1), f(2)$ (2) 치역<br>(예제) 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$이고, 공역이 $\{-2, -, 0, 1, 2\}$인 함수 $y=2x$ 의 치역을 구하여라 |

<그림 18> [7-가]단계 '함수의 뜻' 지도 내용에서

함수 개념을 "생활 장면에서 변화하는 두 양을 조사하여 비례관계를 통해" 도입한다고 밝히고 있는 제 7차 교육과정은 함수의 본질을 대응이 아닌 '종속'으로 파악하게 한다는 의도를 함의하고 있다[8]. 그러나 교과서의 내용을 분석해 보면 정비례 반비례 지도내용을 거쳐 본격적으로 '함수의 뜻'을 다루는 단계에서는 '생활장면에서 변화하는 두 양'에 대한 고려는 사라지고 집합론적인 인위적인 대응의 소재만이 제시되는 경향이 있다. 특히, 정의역과 공역, 치역에 관한 설명이 제시된 이후에는 대부분의 교과서가 실생활의 변화관계를 떠난 집합론적인 대응관계만을 취급하고 있다. 정의역, 공역, 치역 중의 일부를 제시해 주고 관계식에 의해 나머지 집합의 원소를 찾아가는 과정에서 변수의 개념은 '대입'이 강조되는 학습상황에서 경험될 뿐이다. 실제적인 변수가 취할 수 있는 값으로 보기 어려운 경우의 소재들 즉,

8) 비례관계를 이용하여 변화하는 두 양 의 관계로서 함수의 개념을 이해하게 한다.. 구체적인 실생활의 예를 통하여 함수를 이해하도록 하는 것이 바람직하다(교육부, 1999, p.59))

두 변수 사이에 실제적인 관련이 아닌 인위적이고 형식적인 관계 속에서 경험되는 변수 개념은 '변하는 대상'이라는 그 동적 변화성의 본질을 드러내기 어렵다. 다시 말하면 변수가 '실제적으로 변화하는 것으로 지각되고, 상상되고, 가정되는' 그 무엇으로 파악되기 어려운 것이다.

<그림 18>과 같은 학습이 불필요하다는 주장을 하는 것은 아니다. 적어도 함수개념을 도입하는 단계에서는 그 개념발생의 근원을 충분히 드러내야 바람직하다는 것이다. 실세계의 변하는 대상과 그들 사이의 관계에 대한 풍부한 경험이 제공되어야 할 필요가 있다는 것이다. 변수가 함의하는 '변화'의 의미는 실세계의 변하는 대상에서 가장 생명력 있게 그리고 가장 자연스럽게 나타난다. 실세계의 변하는 대상에 대한 풍부한 경험은 변수라는 형식적 개념이 형성되기 전의 발생상태를 경험하게 하여 변수에 대한 아이디어를 제공하는 원천이 된다. 따라서 학습자는 변수 개념의 '발생상태'로 돌아가서 그 개념의 발생의 맥락과 연결되어있는 관계를 이해하게 되고 그러한 이해를 바탕으로 변수를 좀 더 재치 있게 사용할 수 있는 기회를 얻게되는 것이다. 변수가 어떠한 필요성에서 소생한 것인 지에 대한 즉, '수학적인 처리 수단을 이용한 변화하는 세계의 설명'이라는 그 개념 발생의 근원에 대한 이해를 한층 더 심화시켜줄 수 있어야 한다는 것이다. 현재의 변수 개념 지도는 연속적으로 변하는 실재인 시간이나 길이 등에 대하여 그들의 불연속적인 측정치를 가지고 몇 개의 값을 대입, 계산하여 종속된 또 다른 값을 정확히 구해내는 계산과정을 강조하거나 $y=x+3$과 같은 인위적이고 형식적인 함수식을 제시하여 정의역, 공역, 치역을 계산 속에서 다루게 하는 과정을 강조하고 있다. 실제적이 아닌 다분히 '인위적인' 함수관계에서의 변수취급은 함수의 본질을 대응으로 파악하게 할 때에 학생들에게 주어지는 함수의 전형적인 모습이다. 함수 개념을 '대응'이 아닌 '종속' 즉, '변화하는 두 양 사이의 관계'로 지도하겠다는 제 7차 교육과정의 기본 방향에 비추어보면, 현재의 수학교과서에서 위와 같은 집합론적인 함수 지도의 모습이 자주 관찰되는 것은 아쉬운 감이 없지 않다.

[7-가] 단계의 '함수'단원에서는 적어도 도입 과정에서 살릴 수 있는 변수의 근원에 대해 학생들의 이해를 심화시키려는 보다 신중한 노력이 요구된다. <그림 19>와 같이, 대입을 통한 변수의 값을 계산하는 과정에 치중하는 지도의 예는 교과서에서 흔히 찾아볼 수 있다.

$y$가 $x$에 정비례하고, $x=4$일 때, $y=20$이다. $x$와 $y$ 사이의 관계식을 구하여라.

$y$가 $x$에 정비례하므로, 구하는 식은 $y=ax$가 된다.

위의 식에 $x=4$, $y=20$을 대입하면

$$20=a\times 4,\quad \therefore\ a=5$$

따라서, 구하는 식은 $y=5x$이다. 답 $y=5x$

<그림 19> [7-가] 단계 수학 교과서의 '함수' 단원 내용의 예

<그림 19>의 문제는 식의 계산과 관련된 문제일 뿐 비례, 함수, 변수 개념과 의미풍부하게 관련된 문제라고 보기 어렵다. 위와 같이 대입을 통한 간단한 계산결과를 통해 식의 값을 구하게 하는 문제해결활동 보다는 $y=5x$가 되는 실생활의 문제상황(예를 들면, 한 사람 앞에 5개씩 과자를 나누어 준 다든지, 어른 5명이 함께 버스를 타려고 할 때의 교통비를 계산한다는지 등)을 제시하고 그것이 정비례인지, 반비례 관계인지를 판단하게 하는 문제가 바람직하고 그것이 함수나 변수에 대한 학생들의 이해에 오히려 유용한 것이 아닌가.

함수 단원의 내용을 정리하고 그 단원에서

꼭 경험하고 가야할 문제해결활동이 제시되는 소위 연습문제, 종합문제 등에 제시되는 문제들을 분석해 보면 <그림 20>과 같이 대입을 통한 간단한 계산결과로 식의 값을 구하게 하는 문제해결활동이 함수 단원의 문제로 주를 이루고 있는 것을 쉽게 알 수 있다. 학생들에게 이러한 문제유형을 쉽게 해결할 수 있는 능력이 요구되는 것은 인정한다. 그러나 그것들이 함수단원에서 제시되는 비례, 반비례, 변수의 개념과 관련된 내용을 정리하고 마무리하는 단계에서 주를 이루는 문제들이 되어서는 곤란하지 않는가? 다음과 같은 문제에서 문자 $x, y$는 학생들에게 어떻게 경험되는가? 그것은 무의미한 기호로써 대입을 통해 특정한 값을 같은 형식적 조작의 대상일 뿐이다.

1) 다음 각 함수에서 $x=1, 2, 3$일 때, 함수값 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 구하여라.

(1) $f(x)=-4x$ (2) $f(x)=\frac{2}{x}$

2) $y$가 $x$에 정비례하고 $x=3$일 때, $y=12$라고 한다. $x$와 $y$ 사이의 관계를 식으로 나타내어라.

3) $y$가 $x$에 반비례할 때, 다음 표의 빈 칸에 알맞은 수를 써 넣어라.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | | 4 | | 5 | |
| $y$ | | $-12$ | 6 | 24 | | 8 |

<그림 20> 함수 단원 마무리 단계에서 주로 제시되는 대표적인 문제 유형들

다소 연역적이며 형식적인 지식으로 정리되어 있는 교과서의 내용을 살아있는 지식으로 손질하여 다듬어 제시하는 것은 수업을 담당하는 수학교사의 자질에 달려있는 문제이기도 하다. '수학적 힘'의 육성을 목표로 하고 구성주의 학습관에 의한 수학학습지도를 지향하는 제 7차 수학과 교육과정의 이념이 학교 현장에 잘 정착하기 위해서는 교과서의 내용을 수학수업에서 풍부히 살려낼 수 있는 수학교사들의 전문가적 능력이 보다 절실히 요구되는 시점이라 생각된다.

## 3. 교과서의 변수 개념 정의

제 7차 교육과정에 의한 중학교 [7-가] 교과서에서 제시된 변수개념의 정의를 비교하여 보았다. 제 7차 교육과정에 의한 중학교 [7-가] 교과서는 1999년 11월경 각 중학교에서 교과서 채택(선정)작업을 하기 위해 제공받은 교육부 심의를 통과한 교과서 13종 및 교사용지도서 13종이다. 본 고에서는 각 교과서의 구분을 편의상 A~M으로 칭하기로 한다.

13종 교과서와 교사용 지도서의 내용에서 변수 개념이 명시적으로 다루어진 변수의 정의 부분과 변수가 명시적으로 다루어지진 않았지만 변수 개념을 함의하고 있는 내용들(함수 개념 정의, 함수 단원 도입 내용)을 발췌하여 보았다.

모든 교과서에서 공통적으로 관찰되는 특징은 함수 단원을 도입할 때의 설명이나, 학습목표상의 진술 또는 지도상의 유의점에서 변수의 의미를 '변화하는 양'으로 다루고 있다는 것이다. 좀 더 자세히 설명하면 '우리 생활 주변에서 서로 관련을 가지고 변화하는 양', '관계를 가지면서 변화하는 것', '생활장면에서 변화하는 두 양' 이라는 표현으로 '변하는 대상'으로서의 변수의 본질을 부각시키고 있다. 그러나 변수 정의를 도입하는 시기와 변수 정의의 내용은 13개 교과서에서 서로 상이하게 관찰된다. <표 1>의 변수 정의 내용을 비교 분석한 것이 <표 2>이다.

<표 2>의 내용을 보면 우리 나라 교과서에서 변수에 대한 개념 정의가 일관된 표현으로 다루어지고 있지 못함을 관찰할 수 있다. 또한 변수 값의 변화의 강조점을 주목해 보면 변수 개념을 도입하는 문제상황이 실세계의 변하는 대상인 경우도 있고, 그렇지 않은 경우도 있음을 쉽게 파악할 수 있다.

<표 1> 제 7 차 교육과정에 의한 중학교 [7-가]단계 교과서 분석
-변수 개념 지도 내용을 중심으로 -

| 교과서 구분 | 함수단원도입내용 | 변수 정의 도입 시기 | 변수 개념 정의 | 함수 개념 정의 |
|---|---|---|---|---|
| **A** | 우리 생활 주변에는 서로 관련을 가지고 변화하는 양들이 많이 있다. 이를테면, 편지의 우편요금은 무게에 따라 달라지고, 기차 요금은 거리에 따라 달라지며, .... 또, 달린 거리는 시간에 따라 달라지고... 어떤 변화하는 두 양 사이의 관계 중 특별한 규칙을 가지는 관계를 함수라고 한다. (p.136) | 정비례, 반비례 →변수정의 →함수도입 | [용기에 물을 넣을 때 $x$ 분 후의 수면의 높이 $y$의 관계식 유도; $y=2x$] $x=1,2,3.....$, $y=2,4,6...$과 같이 여러 가지 값을 가질 수 있는 문자를 변수라고 한다(p.144). | 또한 두 변수 $x,y$ 에 대하여 $x$의 값이 정해지면 이에 따라 $y$의 값이 단 하나 정해지는 관계가 있을 때, $y$를 $x$ 의 함수라고 한다 (p.144) |
| **B** | 달린 시간과 달린 거리의 관계처럼 우리의 생활주변에는 함께 변하는 두 개의 양이 서로 관련되어 있는 것이 많다. .... 이들 양 사이의 관계를 식으로 나타내어 그 성질을 공부하고 이를 바탕으로 함수개념을 공부한다(p.134). | 변수 정의 → 정비례, 반비례 →함수 도입 | [지하철 승차권 $x$ 장과 요금 $y$ 원 과의 관계식 유도; $y=600\,x$] $x=1$, 2, 3,...이면 $y=600$, 1200, 1800,...위의 $x$, $y$ 와 같이 여러 가지 값을 취하는 문자를 변수라고 한다 (p.135). | 함께 변하는 두 변수 $x,y$ 에 대하여 $x$의 값이 정해지고 그에 대응하는 $y$의 값이 하나로 결정될 때, $y$는 $x$ 의 함수라고 한다 (p.140) |
| **C** | | 정비례 → 변수 정의→ 반비례 → 함수 도입 | 정비례 관계를 나타내는 식 $y=a\,x$에서 $x$, $y$ 와 같이 여러 가지 값을 취할 수 있는 문자를 변수라고 한다 (p.135). | 어떤 변수 $x$의 값이 하나 정해지면 변수 $y$의 값이 하나로 정해질 때, $y$는 $x$ 의 함수라고 하고,...(p.140) |
| **D** | | 정비례, 반비례 → 함수 도입 →변수정의 | [자기 번호의 2배의 수가 적힌 카드 선택상황; 학생의 번호를 $x$, 카드의 숫자를 $y$] $x$, $y$ 와 같이 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자를 변수라고 한다(p.123). | 학생의 번호를 $x$, 카드의 숫자를 $y$ 라고 하면, $y=2x$ 인 관계식을 얻을 수 있다. 이와 같이 변하는 두 양 $x,y$ 에서 $x$의 값이 정해지면 $y$의 값이 오직 하나씩 결정되는 것을 함수라 하며... (p.123) |
| **E** | 우리 주변의 사건이나 자연현상을 살펴보면, 관계를 가지면서 변화하는 것을 찾아볼 수 있다. 이와 같은 사건이나 현상의 상호관련성을 설명하려는 노력에서 함수라는 개념이 생겨났다. (p.139) | 변수 정의 → 정비례, 반비례 → 함수 도입 | [한 변의 길이가 $x$ cm인 정사각형의 둘레의 길이 $y$ cm: $y=4\,x$] 여기서 변하는 양을 나타내는 문자 $x$, $y$를 변수라고 한다(p.140). | 일반적으로 변하는 두 양 $x,y$ 에 대하여 변수 $x$의 값이 정해짐에 따라 변수 $y$의 값이 오직 하나로 정해질 때 , $y$는 $x$ 의 함수라 한다 (p.145) |
| **F** | 우리가 일상생활에서 대하는 것 들 중에는 두 가지 양이 서로 관련되어 변하는 즉, 어떤 한 가지 값이 변하면 다른 값도 그에 따라 변하는 것이 많이 있다. 17세기 경 이렇게 변화하는 두 가지 양의 관계를 나타내는데 쓰이는 효율적인 방법으로 함수가 도입되었다(p.134). | 정비례, 반비례 → 변수 정의 → 함수 도입 | [창문의 열린부분의 가로길이를 $x$ cm, 열린부분의 넓이 $y$ cm] 문자 $x,y$는 여러 가지로 변하고 있는 수량을 나타내게 된다. 이러한 $x,y$와 같이 변하고 있는 여러 가지 값을 나타내는 문자를 변수라고 한다(p.141). | 앞의 정비례 관계에서와 같이 두 변수 $x,y$ 에 대하여 $x$의 값이 결정되면 이에 다라 $y$의 값이 하나로 결정될 때, $y$를 $x$의 함수라 하고... (p.142) |
| **G** | 달리는 속력에 따라 공기저항의 변화를 수학적으로 표현할 수 있을까? 달리는 속력과 공기저항처럼 함께 변하는 두 양 사이의 관계를 알아보는데 쓰이는 도구가 바로 함수이다(p.139). | 정비례, 반비례 → 변수 정의 → 함수 도입 | [$x$ 분 동안에 잰 총 맥박수 $y$의 관계식 유도] 이 때 $x,y$와 같이 여러 가지 값을 가질 수 있는 문자를 변수라고 한다(p.144). | 두 변수 $x,y$ 에 대하여 $x$의 값이 결정됨에 따라 $y$의 값이 하나로 결정될 때, $y$를 $x$ 의 함수라고 한다 (p.144) |
| **H** | 우리 생활 주변에는 어떤 하나가 변하면 그와 관련있는 다른 것도 변하는 규칙적인 현상을 흔히 볼 수 있다......이와 같이 규칙적으로 변화하는 두 수량 사이의 관계를 관계식, 표, 그래프 등으로 나타내면 이들의 변화관계를 쉽게 알아볼 수 있다(p.144). | 정비례, 반비례 → 변수 정의 → 함수 도입 | [$x$ 분 동안 수족관에 넣은 물의 양 $y$ L의 관계식 유도] $x$는 0, 1, 2, 3,...,10 과 같이 여러 가지 값을 가질 수 있고, 또 $y$ 도.... 이 때, $x,y$ 와 같이 변화하는 여러 가지 값을 가지는 문자를 변수라고 한다(p.152). | 변화하는 두 양 $x,y$ 에 대하여 변수 $x$의 값이 하나 정해지면, 그에 따라 변수 $y$의 값이 하나씩 정해지는 관계가 있을 때, 이 관계를 $y$는 $x$ 의 함수라고 하며...(p.154) |
| **I** | | 정비례, 반비례 → 함수 도입 → 변수 정의 | $y$가 $x$ 의 함수일 때, $x,y$와 같이 여러 가지 값을 대신하고 있는 문자를 변수라고 한다(p.129) | 변화하는 두 개의 양 $x,y$ 에서 한 쪽의 양 $x$가 정해지면 이에 따라서 다른 쪽의 양 $y$가 한 개만 정해질 때, $y$를 $x$ 의 함수라고 한다...(p.128) |
| **J** | 어느 한 쪽의 양이 변하면 다른 한 쪽의 양도 일정하게 변하는 관계를 알아보는 것은 매우 중요한 일이다. 이와 같이 두 변량 중의 하나의 값이 변함에 따라 다른 하나의 값도 따라서 변하는 것을 함수라고 한다(p.127). | 정비례, 반비례 → 변수 정의 → 함수 도입 | [$x$ 분 후의 물의 높이 $y$ cm의 관계식 유도: $y=2\,x$] $x,y$와 같이 여러 가지의 값을 나타내는 문자를 변수라고 한다. (p.135). | 두 변수 $x,y$ 에서 $x$의 값이 정해짐에 따라 $y$의 값이 단 하나로 정해지는 관계를 $y$는 $x$의 함수라고 하고... (p.135) |
| **k** | 우리 주위에서 일어나는 자연 현상 중에는 시간과 여러 가지 주위 환경에 따라 변화하는 양이 많이 있다. 변화하는 양 사이에는 어떤 관계가 있는지, 또 이러한 관계를 어떻게 식으로 나타낼 수 있는지 알아본다 (p.128) | 정비례 → 변수 정의 → 반비례 → 함수 도입 | 관계식 $y=2\,x$에서의 $x,y$와 같이 여러 가지로 변하는 값을 갖는 문자를 변수라 하고, 2와 같이 변하지 않는 수를 상수라 한다(p.130). | 두 변수 $x$와 $y$에 대하여 $x$의 값이 하나 주어지면 이에 따라 $y$의 값이 하나씩만 정해질 때, $y$는 $x$의 함수라고 한다(p.134). |
| **l** | 서로 관련하여 변하는 두 양 사이의 관계를 함수로 나타내면 그 관계를 더 쉽게 이해할 수 있다(p.138) | 정비례, 반비례 → 함수 도입 → 변수 정의 | $x,y$와 같이 어떤 집합에 속하면서 여러 값을 가지며 변하는 문자를 변수라고 한다. (p.139). | 두 양 $x$, $y$에 대하여 $x$의 값에 따라 $y$의 값이 하나씩만 정해질 때, $y$를 $x$의 함수라고 한다(p.139). |
| **M** | 우리 주변에는 밀접한 관계를 가지고 변하는 양들이 많이 있다. 이러한 두 양 사이의 관계를 파악하는 것은 변화하는 상황을 분석하고 예측할 수 있는 근거가 되기도 한다.(p.146). | 정비례, 반비례 → 함수 도입 → 변수 정의 | 변화하는 두 양 $x,y$사이에 $x$의 값이 정해짐에 따라 $y$의 값이 하나로 정해지는 관계가 있을 때, 변하는 양을 나타내는 문자 $x,y$를 변수라 하고...(p.144) | 변화하는 두 양 $x,y$사이에 $x$의 값이 정해짐에 따라 $y$의 값이 하나로 정해지는 관계가 있을 때, 이를 함수라 한다.(p.144) |

변수가 함의하고 있는 '변화'의 의미는 실세계의 변하는 대상에서 가장 생명력 있게 그리고 가장 자연스럽게 나타난다. 변수의 변화성은 그 변화가 동적일 때 가장 생생하게 경험될 수 있는 것이다. 실세계의 변하는 대상에 대한 풍부한 경험은 변수라는 형식적 개념이 형성되기 전의 발생상태를 경험하게 하여 변수에 대한 아이디어를 제공하는 원천이 된다.

그러나 학교수학에서 실세계의 변하는 대상을 '다루는' 과정은 그리 간단치는 않다. 그 이유는 실세계의 변하는 대상이라는 것이 대부분 시간에 종속하여 연속적으로 변하는 속성을 가지고 있기 때문이다. 변하는 대상이 변수라는 조직 수단에 의해 수학적으로 처리될 때에는 그 변화의 양상을 파악하는 단계에서 항상 측정 행위가 개입되기 때문에 사실상 연속이라는 속성이 가려지기 쉬운 상황이 벌어지게 되어 변수의 본질이 갖는 고유의 속성이 보존되지 않게 되는 것이다. 변수의 본질과 그 표현 밑에 깔려있는 이러한 미묘한 점들이 어쩌면 학생들이 변하는 대상으로서의 변수의 본질을 이해하는데 영향을 주고 있는지도 모른다 (Leinhardt, et al., 1990, p.23). 그렇다고 변수를 변하는 대상으로부터 경험시키는 것이 불가능한 것은 아니다.

오히려 함수의 개념을 '종속'으로 다루고 변수를 '변하는 대상'으로 경험시키려는 의도가 깔린 제 7차 교육과정의 수학학습지도에서는 학생들에게 변수 개념을 형성시키는데 위와 같은 어려움을 학습에 도입하여 그 특징을 적극적으로 이용할 수 있다. 변수가 수학적으로 처리될 때 변하는 대상의 속성이 불가피하게 전환되는 위와 같은 과정을 학습자에게 뚜렷하게 의식화시킬 수 있다면 변수가 어떠한 필요성에서 소생한 것인지에 대한 즉, '수학적인 처리 수단을 이용한 변화하는 세계의 설명'이라는 그 개념 발생의 근원에 대한 이해를 한층 더 심화시켜줄 수 있을 것이다.

그러나 <표 2>에 제시되어 변하는 대상의 의미가 가리워진 불연속적인 소재를 선택하여 제시하거나 심지어는 8의 경우처럼 집합론적인 접근을 시도함으로써 변수의 근원에 대한 학생들의 이해를 심화시키기 위한 활동이 간과되고 있는 것이다.

## 4. 서로 다른 변수 개념의 도입 시기

<표 1~2>를 보면 변수 개념 도입의 시기가 교과서별로 차이가 있음을 쉽게 알 수 있다. 제 7 차 교육과정에 의한 [7-가]단계 교과서 13종을 변수 도입 시기와 관련하여 구분하여 보면 다음의 4 부류로 대분된다.

<표 2> 제 7 차 교육과정에 의한 중학교 [7-가] 단계 교과서 13종의 변수 개념 정의 비교 분석

| 구 분 | 변수값의 유형 / 변수정의내용 | 변수값 변화의 강조점 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 불연속적 | 소재는 연속적이나 불연속적인 값을 강조 | 연속적 |
| 1 | 여러 가지 값을 갖는(취하는) 문자 | B, G | A | C |
| 2 | 변하는 양을 나타내는 문자 | | | E, M |
| 3 | 변화하는 여러 가지 값을 가지는 문자 | | H | K |
| 4 | 여러 가지 값을 대신하는 문자 | | | I |
| 5 | 여러 가지 값을 나타내는 문자 | | | F, J |
| 6 | 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자 | D | | |
| 7 | 여러 가지로 변하고 있는 수량 | | | F |
| 8 | 어떤 집합에 속하면서 여러 값을 가지며 변하는 문자 | L | | |

① 변수 정의→정비례, 반비례→함수 도입 : 2개 교과서
② 정비례→변수 정의→반비례→함수 도입 : 2개 교과서
③ 정비례, 반비례→변수 정의→함수도입 : 6개 교과서
④ 정비례, 반비례→함수도입→변수 정의 : 3개 교과서

이렇게 개념 정의의 도입시기가 다른 것은 무엇을 의미하는가? 쉽게 생각할 수 있는 것은 변수의 개념 정의가 반드시 함수 개념 정의와 같이 등장할 필요는 없다는 것을 함의하는 것은 아닌가? 즉, 함수 개념이 다루어지기 이전에 변수가 먼저 정의되는 작업이 그리 어려운 것이 아님을 의미하는 것이 아닌가?

물론 변하는 대상으로서의 변수의 본질이 함수 개념과 더불어 명확하게 다루어지는 것은 필요하다. 그러나 다가이름으로서의 변수의 본질을 학교수학에서 간과할 수 없다는 것을 생각할 때 앞에서 논의한 문자변수의 사용과 관련하여 변수의 개념정의를 보다 이른 시기에 도입하는 것도 생각해 볼 수 있지 않은가? 일반화된 표현에서의 문자 변수의 의미와 그 사용법에 대한 지도가 소홀히 이루어지고 있는 현재의 상황에서 변수의 변화성을 보다 이른 시기에 명확히 드러내고 지도할 수 없는가의 문제가 좀 더 깊이 논의될 필요가 있다고 생각된다.

현재의 교과서에서는 문자변수가 함수 단원 이전에 교과서 곳곳에서 다루고 있기 때문에 변수에 대한 지도에 어려움이 발생한다. 분명한 것은 학생들은 수학의 언어인 문자변수를 그 개념이 정의되기 이전에 너무나 많은 학습 상황에서 무의미한 형식적 문자로 경험하고 있다는 것이다.

## 5. 변수명의 임의성 및 문자선택의 암묵적 규약

학교현장에서 학생들을 지도하여 보면 변수를 $x, y$와 같은 특정한 문자로만 생각하는 학생들이 이외로 많음을 확인할 수 있다. 또한 학생들은 집합 $\{x \mid p(x)\}$이나 함수 $y=6x$와 같은 표현은 상황에 따라서 다른 문자를 사용하여 $\{y \mid p(y)\}$ 또는 $v=6w$로 표현할 수도 있음을 명확히 이해하지 못하기도 한다(김남희, 1992, p.75, p.95). 대부분의 학생들이 함수 관계는 반드시 문자 $x, y$를 사용하여 표현하고 방정식은 문자 $x$를 사용하여야 한다는 생각을 가지고 있는 것은 학교수학에서 함수관계는 항상 문자 $x, y$로, 방정식에서의 미지수는 항상 문자 $x$로 경험해 온 것과 무관하지 않다(김남희, 1997, pp.100-102). 우정호(1998)가 논리적으로 가장 단순한 형태로 교재를 제시하려는 노력이 인지적 장애의 요인이 됨에 유의해야 할 것이라는 지적을 한 바와 같이 함수 $y=f(x)$나 방정식에서의 미지수 $x$와 같이 변수 기호를 특정한 문자로만 국한하여 지도하면 $x$가 아닌 다른 문자로 표현된 변수를 생소하게 생각하여 변수를 나타내는 문자의 변화가 내용의 변화를 가져오는 것으로 오해하기 쉽게 되는 것이다(우정호, 1998, p.253).

변수를 나타내고 있는 문자가 다른 문자에 의해 치환되어도 불변의 관계는 변하지 않는다는 변수명의 임의성에 대한 이해의 결여는 <그림 21>과 같이 함수를 문자 $x, y$로만 다룬 학습과 무관하지 않을 것이다.

<그림 21>의 <함수를 활용하여 문제를 푸는 요령>에 '1. 변화하는 두 양을 변수 $x, y$로 정한다'는 표현을 생각해 보자. 변화하는 두 양을 반드시 변수 $x, y$로만 표현해야 하는 것인가?

교과서에서 변수는 반드시 문자 $x, y$로 한다고 명시함으로써 변수명의 임의성은 쉽게 가리워 질 수밖에 없는 것이다.

**함수를 이용하여 문제를 푸는 순서**

1. 변화하는 두 양을 변수 $x, y$로 정한다.
2. 변화하는 두 양 사이의 관계를 함수 $y=f(x)$로 나타낸다.
3. 그래프를 그리거나 관계식 $y=f(x)$로부터 필요한 값을 구한다.
4. 구한 값이 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

<그림 21> [7-가] 단계의 함수 지도 내용

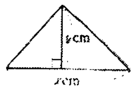
또한 교과서에서는 자연스럽게 도입할 수 있는 문자선택의 암묵적인 규약 역시 간과되어 처리된다. 시간과 속도에 관한 문제라면 우리는 그 관계를 $t, v$로, 길이와 넓이 사이의 문제라면 $l, S$로 관습적으로 사용하는 문자사용의 규약을 왜 의도적으로 드러내지 않는가[9]. <그림 23, 24>에 제시된 교과서의 문제들은 위의 논의와 관련이 있다.

[예 1] 시속 $x$ km로 달리는 기차가 100 km 달린 시간

[예 2] 넓이가 10 $cm^2$ 이고 높이가 $x$ $cm$인 삼각형의 밑변의 길이

[예 3]

넓이가 24 $cm^2$인 삼각형의 밑변의 길이를 $x$ cm, 높이를 $y$ cm라고 할 때, $x$와 $y$ 사이의 관계식을 구하고 그 그래프를 그려라.




<그림 23> [7-가]단계 교과서에 제시된 문제

다음 중에서 $y$가 $x$에 정비례하는 것을 찾아 관계식을 구하여라.

(1) 가로의 길이가 6 cm, 세로의 길이가 $x$ cm인 직사각형의 둘레 $y$ cm

(2) 1 개 빌리는 데 1500 원인 비디오 테이프 $x$ 개의 대여료 $y$ 원

(3) 시계의 분침이 회전하는 데 걸린 시간 $x$ 분과 회전한 각도 $y$ 도

(4) 시속 $x$ km로 100 km를 가는 데 걸리는 시간 $y$ 시간

<그림 24> [7-가] 단계 교과서에 제시된 문제

<그림 23, 24>에 제시된 교과서 문제의 예는 세 가지 측면에서 비판이 가능하다. 첫째, 이들 문제유형은 학생들이 주체가 되어 문제상황을 변수를 사용한 식으로 표현할 필요성을 느끼게 하지 못하고 있다. 변수로서의 문자는 식을 구성하는 단계에서 학생 스스로가 선택하여 사용되어야 하는 것이다. 둘째, 표현할 문자를 이미 문제에 지정함으로써(주로, $x, y$로) '변수명의 임의성'에 대한 학습을 간과하고 있다. 학생들은 스스로 선택한 문자에 의해 같은 문제라도 옳은 답이 다양하게 나올 수 있음을 경험할 수 있어야 한다. 셋째, 문자를 지정하려면 가능한 한 수학에서 사용되고 있는 암묵적인 규약 즉, 대상의 의미를 고려하여 알파벳 머리글자로 그것을 나타내는 문자사용의 규약을 드러내었어야 하는데 그렇지 못하였다. 여기서 교수학적으로 중요한 논의는 첫째와 둘째의 비판이다. 교과서는 학생들이 주어진 문제상황을 점진적으로 형식화 해나가는 과정에서 변수명을 임의로 정할 수 있는 개인적인 상황을 왜 고려하지 않는 것인가? 위와 같은 문제는 학생이 스스로 할 수 있는 그런 학습 환경을 조성하는 대신

9) 수학에서 문자를 선택하는데 있어서 관습적으로 사용되어 온 암묵적인 규약 즉, 함수 $y=f(x)$에서 $x$는 독립변수로 $y$는 종속변수로 사용되고, 일반화된 수에 대해서는 주로 문자 $a, b, c$등을 사용하며, 거리, 시간, 속도를 나타내기 위한 문자로는 일반적으로 영어의 머리글자를 따서, 각각 $S, t, v$를 사용하는 등의 관습이 있지만 이렇게 하는 것은 그것이 교육적으로 유용하기 때문일 뿐 문자 사용의 본질적인 부분에 해당되는 것은 아니기 때문에, 상황에 따라서 다른 문자를 사용할 수 있는 유연성이 항상 존재함을 인식시켜 주어야 한다(김남희, 1999b, p.27).

그러한 학습환경을 오히려 일소해 버리는 것이다. Brousseau는 이러한 현상을 일컬어 토파즈 효과라고 하였다(김연식 외 3인, 1994 p.258)[10]. 이는 지식의 탈배경화/탈개인화 현상을 지나치게 강조한 것으로서 교사는 학생들에게 수학적 지식을 가르쳐야 한다는 책임아래 학생들에게 명백한 힌트(즉, 문제를 풀이하는 명백한 단서)를 제공함으로써 학습을 유도하고 있는 것이다. 이 경우는 학생들이 교사가 원하는 답을 내기는 하지만 그 의미는 알고 있지 못하게 되는 것이다. 학생들은 문제해결의 과정 속에서 문제 상황의 표현을 위해 문자 사용의 필요성을 느끼고 변수명을 스스로 결정하는 활동없이 이미 지정되어 있는 문자를 간단한 공식에 대입하여 적용하는 연습만을 함으로써 수학에서 변수로 사용되는 문자의 의미와 역할을 무의미하게 경험하고 있을 뿐이다. <그림 23>의 [예 3] 과 같은 문제는 "넓이가 24㎠인 삼각형이 있다. 이 삼각형의 밑변과 높이 사이의 관계식을 구하라"는 문제로 바꾸는 것이 훨씬 자연스럽고 적절하다. 이러한 문제에서 학생들은 넓이와 관련된 삼각형의 요소에 주목하고, 넓이가 일정하므로 한 요소가 변하면 다른 요소가 이에 따라 변한다는 사실을 직관한 후, 그 요소들의 길이가 아직 결정되어 있지 않고 변할 수 있음을 파악하면서 변하는 길이를 변하지 않는 것처럼 문자로 고정하고[11], 그것들 사이의 관계를 식으로 표현할 수 있어야 한다. 이러한 일련의 과정 속에서 학생들은 비로소 변수문자를 이용하여 관계식을 의미 있게 구성해내는 학습을 경험하게 되는 것이다.

## Ⅳ. 맺음말

본 고에서는 학교수학에서 변수 개념의 의미가 생명력 있게 드러나야 하며, 변수로서의 문자사용방식이 학생들에게 올바르게 학습되어야 함을 주장하고 있다. 변수를 그 의미에 대한 고려 없이 형식적 조작의 대상으로 다루어지는 학습상황에서는 학생들이 변수의 본질적인 의미를 충분히 경험하지 못하게 된다. 변수의 형식적인 처리는 학생들에게 실질적인 의미를 주기 어려운 것이다. 학생들은 변수 기호에 적절한 수학적 아이디어를 연결시킬 수 있어야 하며 변수문자에 의한 기호표현과 조작을 의미있게 학습해야 한다. 변수 개념의 학습지도에서 변수의 다양한 의미에 대한 고려와 문자변수의 사용방식에 대한 지도가 주의 깊게 이루어지지 않는다면 변수는 자칫 종이 위에 쓰여지는 단순한 문자 이상의 별다른 의미를 갖지 않는 형식적인 기호로 전락해버리기 쉽다.

수학 교과서에 제시되는 변수, 칠판에 써 놓은 변수를 단지 그 표면적인 측면에서 파악한다면 변수는 무언가를 대신하고 있는 일종의 자리지기일 뿐이다.

학교수학에서는 변수를 의식적으로 다루면서 문맥과 관련지어 그 의미를 충분히 살리는 과정을 중요하게 다룰 필요가 있다. 본 고의 내용은 학교현장의 수학교사들에게 학교수학의 내용 중에는 변수가 명시적으로 다루어지는 부분은 아닐지라도 변수 개념 형성에 상당한 영향을 줄 수 있는 교수-학습상황이 많이 있음을 지적하고 있다. 본 고의 내용이 학교현장의 교사들로 하여금 변수 개념 지도에서 재고해 보아야 할 문제점이 무엇이고 그에 대한 개선책이 무엇인지에 대한 논의를 활발하게 할 수 있게 하는 촉진제가 되길 기대한다. 현장 교사들의 고민 속에서 변수 개념 지도와 관련하여 대

10) Brousseau가 말하는 극단적인 교수학적 현상 중의 한 예로 '토파즈식 외면치례'라고도 한다.
11) 물론 문자의 선택은 임의적일 수 있다.

수적 언어의 교수-학습 상에서 쉽게 관찰되는 결함과 그 동안 무의식중에 간과되어왔던 지도 상의 문제점들이 무엇인지가 명확히 파악되면 올바른 변수 개념의 지도를 위한 교수방법의 개선에 관한 연구가 활발히 이루어질 수 있을 것이다.

## 참고문헌


강옥기 외 2인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 두산.

강옥기 외 2인 (2000). 중학교 수학 7-가. 두산동아.

강행고 외 9인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 중앙교육진흥연구소.

강행고 외 9인 (2000). 중학교 수학 7-가. 중앙교육진흥연구소.

고성은 외 5인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 블랙박스.

고성은 외 5인 (2000). 중학교 수학 7-가. 블랙박스

교육부 (1997). 제 7차 수학과 교육과정. 교육부.

교육부 (1999). 제 7차 중학교 수학과 교육과정 해설. 교육부.

금종해 외 3인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 고려출판.

금종해 외 3인 (2000). 중학교 수학 7-가. 고려출판.

김남희 (1992). 변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사 학위 논문.

김남희 (1997). 변수개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문.

김남희 (1999a). 대수적 언어학습으로서의 문자식의 지도 -중학교 1학년 문자와 식 단원의 지도계획안 구성 및 수업사례-. 대한수학교육학회 논문집, 제 8권 제 2호, 439-452.

김남희 (1999b). 학교수학의 변수 개념학습과 관련된 몇 가지 지도 문제에 대하여. 대한수학교육학회 논문집 학교수학, 제 1권 제 1호, 19-37.

김연식, 김흥기 (1994). 중학교 수학 1. 두산동아.

김연식, 우정호, 박영배, 박교식 (1994). 수학교육학 용어 해설(1). 대한수학교육학회 논문집, 제 4 권 제 2호, 245-260.

김흥기 (2001). 제 7차 교육과정과 교과서의 문제점. 한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육, 제 40 권 제 1호, 139-159.

박경미 (2000). 중학교 수학교육과정 및 교과서 내용의 양과 난이도 수준 분석. 대한수학교육학회 논문집 수학교육학연구, 제 10 권 제 1 호, 35-55.

박교식 (1999). 우리 나라 제 7 차 수학과 교육과정의 7-가 단계 내용 중 함수 부분에 관한 비판적 고찰. 대한수학교육학회 논문집 학교수학, 제 1권 제 2호, 401-415.

박규홍 외 7인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 두레교육.

박규홍 외 7인 (2000). 중학교 수학 7-가. 두레교육.

박윤범 외 3인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 대한교과서.

박윤범 외 3인 (2000). 중학교 수학 7-가. 대한교과서.

배종수 외 7인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 한성교육연구소.

배종수 외 7인 (2000). 중학교 수학 7-가. 한성교육연구소.

서울특별시교육청 (2000). 중학교 교사 연수를

위한 제7차 교육과정 편성과 운영. 서울특별시교육청.

신항균 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 형설출판사.

신항균 (2000). 중학교 수학 7-가. 형설출판사.

양승갑 외 6인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 금성출판사.

양승갑 외 6인 (2000). 중학교 수학 7-가. 금성출판사

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

이성헌 (1967). 현대 중학 수학 2. 동아출판사.

이성헌 (1973). 현대 중학 수학 3. 동아출판사.

이영하 외 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 교문사.

이영하 외 (2000). 중학교 수학 7-가. 교문사.

이준열 외 3인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 도서출판 디딤돌.

이준열 외 3인 (2000). 중학교 수학 7-가. 도서출판 디딤돌.

조태근 외 4인 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 금성출판사.

조태근 외 4인 (2000). 중학교 수학 7-가. 금성출판사.

황석근, 이재돈 (2000). 중학교 수학 7-가 교사용지도서. 한서출판사.

황석근, 이재돈 (2000). 중학교 수학 7-가. 한서출판사.

Davis, R. B. (1975). Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. *Journal of Children's mathematical Behavior*, 1(3), 7-35.

Smith, K. J. (1994). *Mathematics*, Brooks/Cole.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner and C. Kieran(Eds.), *Research Issues in The Learning and Teaching of Algebra* (pp.33-56), National Council of Mathematics Education.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In *Handbook of Research on mathematics Teaching and learning: A project of NCTM*, 390-419.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann (Eds.), *Children's understanding of mathematics :11-16* (pp.102-119), John Murray.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Eicholz, R. E. et al.(1991). *Mathematics (Grade 3~8)*. Addison-Wesley.

Rosnick, P. C.(1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, 74, 418-420.

Wagner, S.(1983). What are these things variables?. *Mathematics Teacher*, 76(7), 474-479.

# A Didactical Discussion on the teaching of variable concept in the [7-first] stage of the 7th Mathematics Curriculum.

Namhee Kim(Jeonju University)

Variable concept plays a crucial role in understanding not only algebra itself but also school mathematics which is algebra-oriented. It serves as an essential means in applying mathematics to the real world because it enables us to describe varying phenomena in the real world.

In this study, we examined some matters related to the learning of variable concept in school mathematics. In Particular, we discussed on the teaching of variable concept in the [7-first] stage of the 7th Mathematics Curriculum. We analysed the textbooks in the [7-first] stage and attempted to explain concretely the contents and teaching methods of variable concept which be taught in school mathematics.

After reconsidering the practices on variable concept teaching, we pointed out the problems of formalistic teaching method and then proposed the direction in which variable concept teaching should go.