大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 103-111. July 2001

집합교육의 개선에 대한 몇 가지 제언

이 만 근*

I. 서론

20세기에 들어 집합론은 수학의 전 분야에 영향을 미치기 시작하였다. 수학자들은 집합론 이전의 수학을 고전수학, 집합론의 관점에서 기술된 수학을 현대수학으로 구분하기도 한다. 이는 집합론이 현대수학에서 차지하는 비중을 잘 나타내는 것이다.

집합이 학교수학에 도입된 배경은 20세기 중반에 활발하게 전개되었던 수학교육 현대화 운동의 영향이라고 할 수 있을 것이다. 우리 나라에서는 1973년부터 시행된 3차 교육 과정 중 초등학교 2학년 1학기 과정에 '집합과 분할'이 최초로 도입되었다. 4차 교육과정에서부터는 초등학교 저학년에서 다루었던 집합 내용의 깊이를 약화하여 고학년으로 옮겼으며, 7차 교육과정에서는 초등학교 5학년에 일부 남아 있던 집합 내용을 완전히 중학교로 옮김으로서 2000년부터는 중학교에서 최초로 집합을 배우게 되었다.

그동안 집합 교육은 수학교육의 현대화운동의 상징처럼 여겨져 왔으며 집합적 사고(수량이나 도형 등의 고찰이나 처리에 있어서 생각하는 대상이나 모임의 조건, 범위를 명확히 알아내어, 그 모임을 하나로 보아서 그것을 적당한 말이나 기호로 나타내어 적절하게 고찰하려는 생각)는 수학적 개념의 형성이나 수학적 사실의 이해에 매우 유용한 것으로 받아 들여져 왔다. 구체적으로 중학교 교사용 지도서(최용준, 1996)에서 언급하고 있는 집합교육의 유용성에 대한 주장을 살펴보면 다음과 같다.

① 집합은 현재 문제삼고 있는 것에 대하여 본질적이 아닌 것을 무시하고, 본질적인 것만을 주목할 수 있게 하는 개념이라는 것이다. 예를 들면, '우리 나라 학생의 집합'이라고 할 때에는 그의 모든 원소, 즉, 초등학생, 중학생, 고등학생, ... 등에 공통인 사실만 주목하여 초등학생은 어리다든지, 고등학생은 중학생보다 크다든지, ... 하는 등등은 무시되고 '학생'이라는 공통인 것만을 문제 삼게 됨으로서 그 관심의 대상을 명확하게 하고, 간결하게 하여, 복잡한 이론에 견디어 낼 수 있는 바탕을 제공한다.

② 수학의 여러 개념을 집합의 용어를 사용하여 나타낼 수 있다는 것이다. 예를 들면, $A = \{ x \mid x = 2n-1,\ n$은 자연수$\}$ 라고 정의하면, $x \in A$는 'x는 홀수이다'를 의미한다.

③ 집합을 이용하면 동치류의 개념과 동치관계에 의한 유별(類別)의 개념을 적절하게 표현할 수 있다는 것이다. 수학에서 다루고 있는 대상(이를테면, 수, 함수, 집합)이 '같다'라는 개념은 가장 기본적인 것의 하나이다. 현대수학의 특징은, 대상의 어느 성질에 주목하여 그 성질이 같으면, 현재 주목하고 있지 않는 것이

* 동양대학교

있더라도 이는 본질적인 아니라고 무시하고 이를 동일시하여 다루는 데 있다. 이것이 현대 수학을 추상적으로 하고 있는 원인 중의 하나이며, 이 까닭으로 본질적이 아닌 성질이 무시되어 개념이 명확하고 간결하게 되는 것이다. 주목하고 있는 성질이 같은 것을 동일시한다는 개념이 '동치 관계'이고, 또 '동치 관계에 의한 유별' 이다. 이는 집합을 이용하여 적절하게 나타낼 수 있다.

이제 이 글에서는 앞서 살펴본 집합교육의 필요성을 근거로 하여 학교수학에 도입되어있는 집합 내용의 적절성과 수준에 대하여 몇 가지 의문을 제기하고 그 대안을 생각해 보고자 한다.

II. 집합의 주요 논점에 대한 역사적 배경

집합론은 Cantor(1845-1918)에 의하여 1895년 처음으로 발표되었다. 이 집합론은 고대 그리스 시대부터 줄곧 제기되어 왔던 무한의 개념을 확립하려는 과정에서 발견된 성과물로 여겨진다. 칸토어 이전에도 이미 Galilei(1564-1642)는 일대일 대응의 개념을 사용한 적이 있고, DeMorgan(1806-1871), Venn(1834-1923)등의 수학자도 집합을 수학의 대상으로 생각하고 연구하였던 것으로 전하여 온다. 그러함에도 칸토어를 집합론의 시초로 여기는 것은 무한에도 여러가지 단계가 있다는 것과 자연수의 산술을 무한의 세계에도 도입한 성과 때문이다. 곧, 칸토어는 집합에 기수와 서수를 도입하고, 초월수가 대수적인 수보다 훨씬 많으며 차원이 서로 다른 유크리드공간의 기수가 같다(직선과 평면은 점집합으로 대등하다)는 사실을 자신이 체계화한 집합론을 이용하여 최초로 증명하였던 것이다. 제논의 역설 때문에 그리스 수학자들은 무한을 의도적으로 피하고 모든 수학적 논리전개를 유한의 과정으로만 한정하였다. Gauss(1777-1855)도 무한의 취급을 기피하였고, Cauchy(1789-1857)도 ε-δ 논법을 미적분학에서의 무한과정을 피하기 위하여 부등식의 해의 존재조건으로 바꿈으로서 그리스 수학의 유한성을 이어갔다. 이런 오랜 수학적 전통을 깨뜨린 것이 칸토어의 집합론인 것이다. 칸토어가 집합에 내린 최초의 정의는 다음과 같다.

> 우리의 직관이나 사고의 대상으로서 명확히 구분되는 것들의 전체인 모임으로 우리는 집합을 이해하고자 한다.[1)]

그런데 이 정의는 '모임'이라는 단어의 사용에 집합의 표현을 의지함으로서 또 다른 동의어의 반복처럼 받아들여진다. 모임, 집합, 집단 등은 일상적으로 같은 의미로 통용되어 왔기에 집합에 대한 이러한 정의는 마치 두 명제 [A는 B의 옆에 있다, B는 A의 옆에 있다] 와 같이 A, B의 위치를 명확히 알려주기보다는 A, B를 서로 순환적으로 대치하는 정도의 의미만을 담고 있는 것처럼 보이는 것이다. 칸토어의 이와같은 집합에 대한 정의는 현재에도 기초적 집합론이나 중등학교 수준의 수학에서 널리 사용되고 있다. 그러나 이 정의만으로는 해결이 불가능한 여러가지 미묘한 수학적 논의가 곧 바로 나타나기 시작하였다.

칸토어의 집합론이 수학에 영향을 미치기 시작할 무렵인 1897년에는 Burali-Forti(1861-1931)

1) "By a 'set' we shall understand any collection into a whole of definite distinct objects of our intuition or thought"

가, 1902년에는 Russell(1872-1970)이 무한집합에 대한 몇 가지 역설을 발견하여 발표하게 되었다. 이 중 러셀의 역설은 여러 가지 형태로 대중화되었는데 이들 중 가장 널리 알려진 것은 1919년 러셀 자신이 만든 다음과 같은 명제이다.

> 우리 마을의 이발사는 스스로 면도하지 않는 사람만 면도를 해 준다고 말하였다. 이 이발사는 자신이 스스로 면도하는가?

그리스 시대이후 인간의 언어나 논리 때문에 생기는 역설은 많이 있었으나 집합론과 같은 수학적 공리체계에서의 역설은 없었다. 이 역설은 수학의 존립의 근거를 의심하는 계기로 작용하면서 수학적 기초론에 수많은 논란을 불러 일으켰다. 이것이 확대되면서 19세기 말에는 수학적 논리체계의 근본을 의심하는 '수학의 위기'를 낳게 되었고, 결국 이것을 해결하는 과정에서 수리 논리학, 공리적 집합론, 수학적 기초론과 같은 새로운 수학의 분야가 나타나기 시작한 것이다. 엄격한 의미로 집합이란 용어는 정의할 수 없는 것이라는 것이 현대수학자들의 생각이다. 집합을 정의하고자 할 때 생기는 문제점 중의 하나가 러셀의 역설이다. 집합론에서 러셀의 역설 같은 난점을 피하려고 시도하는 것이 공리적인 접근법인데, 이 공리적인 집합론에서는 '집합'과 '원소'는 무정의 용어로 받아들이며 외연성 공리(집합 A와 B가 같은 원소들을 갖고 있을 때만 $A = B$), 공집합의 공리(ϕ는 하나의 집합이다), 쌍의 공리(A, B가 집합이면 $\{A, B\}$도 집합이다), 합집합의 공리(F가 집합들의 집합이면 F도 집합이다) 등과 같은 공리가 필요하다. 다양한 공리적 집합론의 구성은 본질적으로 러셀의 역설을 피하려는 노력에서 시작되었지만 아직도 완전히 만족할만한 결과에 도달하지 못한 것으로 알려져 있다. 이러한 공리적 집합론을 사용하면 이제까지 집합론에서 발견된 역설은 모두 피할 수는 있다. 그러나 이 공리계가 무모순이라는것, 곧 이 공리계에서는 어떠한 역설도 나타나지 않으리라는 보장이 없다는 것이다.

III. 학교수학에서 집합을 어떻게 정의할 것인가?

현재 중학교에서 사용되고 있는 교과서의 집합에 대한 정의를 몇 가지 살펴보면 다음과 같다.

> '5보다 작은 자연수' 전체의 모임과 같이, 어떤 조건에 의하여 분명하게 결정되는 대상 전체의 모임을 집합이라 한다. (김응태 외, 1996, p8)

> 위의 사진에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9, 11이다. 이와 같이 어떤 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 집합이라고 한다.
> (김호우 외, 1996, p9)

> 위의 [물음]에서 할아버지만 모시고 있는 가정의 모임이나 할아버지, 할머니를 함께 모시고 있는 가정의 모임과 같이, 어떤 조건에 알맞은 대상이 명확하게 구별되는 모임을 집합이라고 한다. (박두일 외, 1996, p11)

> 위의 물음에서 「7보다 작은 홀수의 모임」은 「7보다 작은 홀수」라는 조건에 알맞은 대상 「1, 3, 5」를 분명하게 정할 수 있다. 이와 같이 주어진 조건에 알맞은 대상을 분명하게 정할 수 있는 모임을 집합이라고 한다.
> (김연식 외, 1996, p8)

위의 예를 살펴보면 대체로 집합에 대한 정의는 "주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 정할 수 있는 모임"이라고 할 수 있다. 이러한 정의에 의하면 집합은 모임과 같은 뜻으로 대

체 되면서 "그 대상을 분명히 구분 할 수 있는가?" 에 모든 초점이 맞추어진다. 다시 한번 각 교과서에서 집합과 집합이 아닌 모임의 예를 살펴보기로 하자.

[문제 1] 다음 중에서 집합이 아닌 것은 어느 것인가?
(1) 10보다 작은 홀수의 모임
(2) 우리 반에서 키가 큰 학생 전체의 모임
(3) 10보다 크고 100보다 작은 자연수 전체의 모임
(4) 대단히 큰 자연수의 모임
(김응태 외, 1996, p8)

[문제 1] 다음에서 집합인 것을 찾아라. 또 집합인 것은 그 원소를 말하여라
(1) 뚱뚱한 사람들의 모임
(2) 우리 반 학생들의 모임
(3) 100보다 작은 자연수의 모임
(4) 우리 반에서 마음씨가 착한 학생들의 모임
(김호우 외, 1996, p11)

[보기] 아름다운 꽃의 모임은 "아름답다" 라는 기준이 사람마다 다르므로 집합이 아니다
(박두일 외, 1996, p11)

그러나 [자연수에서 큰 수의 모임]은 어떤 수가 큰 수인지 그 기준을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
[문제 1] 다음 중 집합인 것을 말하고, 또 그 원소를 구하여라
(1) 6의 약수의 모임
(2) 작은 짝수의 모임
(3) 키 큰 사람의 모임
(4) 우리 나라의 특별시의 모임
(김연식 외, 1996, p8)

우리가 조사한 교과서에서는 대상을 '명확히 구분할 수 있는'에 초점이 맞추어진 것만 집합으로 정의한다. 이와 유사한 수준에서 집합을 다루고 있는 외국자료를 살펴보면 다음과 같다.

"집합이란 무엇인가?" 에 대답하기는 어려운 일이다. 초보적 집합론을 다룰 이 책에서 복잡한 공리적 방법으로 그 이론에 접근하기보다는 칸토어가 다음과 같이 착상한 집합의 직관적 정의를 받아들이는 것으로 만족하기로 한다.

우리의 직관이나 사고의 대상으로서 명확히 구분되는 것들(이것을 원소라고 부른다)의 전체인 하나의 모임을 집합이라고 한다
다음은 모두 집합의 보기이다.
(a) 이 교실에 있는 모든 의자들의 모임
(b) 이 대학에 있는 모든 학생들의 모임
(c) 문자 a, b, c, d의 모임
(d) 우리 기숙사의 규칙들의 모임
(e) 모든 유리수들의 모임
(f) 모든 자연수들의 모임
(g) 0과 1사이의 모든 실수들의 모임
(Lin & Lin, 1992)

집합의 개념은 매우 일반적이면서도 단순한 것이다.
「임의의 사물들의 모임은 집합이다.」
사물이란 만질 수 있을 수도 있고 만질 수 없을 수도 있다. 예를 들면 골프채들의 집합, 음식들의 집합, 체커 게임을 어떻게 하는가 하는 규칙들의 집합을 생각할 수 있다.
(Krause, 1991)

우리는 중학교에서 다루는 집합의 구성요건에 엄격히 '그 대상을 분명히 할 수 있는'이라는 전제조건이 꼭 필요한가에 대하여 의문을 제기해본다. 우리가 참고할 수 있는 집합에 관한 책들은 공리적인 접근을 시도하거나, 단순히 모임의 또 다른 의미로서 집합을 정의하는 수준에서 그치고 있다. 더구나 학교수학에서 집합은 모임정도의 의미 이외의 다른 용도는 발견되지 않는다. 주로 집합이 사용되는 곳은 '해집합', '자연수의 집합', '치역', '공역' 등이며 이들은 단순히 '해의 모임', '자연수의 모임' 등으로 대체할 수 있고, 엄격하게 집합의 정의에 의하여 어떠한 연산을 시행하는 일도 없다.

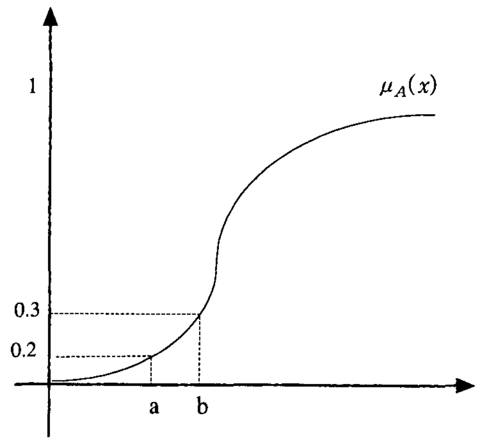
결국, 집합은 모임의 동의어로 사용될 뿐이다.

집합이 모임의 동의어로 대체되면 퍼지집합과 같은 것도 집합으로 받아들일 수 있는 유연성이 생기게 될 것이다. 이제는 우리에게 아주 익숙한 퍼지집합의 개념은 거의 모든 가전제품의 제어에 응용되고 있으며 이는 상당히 유용한 것으로 여겨진다. 퍼지 시스템의 작동 원리는 '뜨겁다' 라는 것을 0, 1로 정의하지 않는 것이다. 예를 들어 '뜨겁다'를 아래 그림에서 주어진 membership 함수 $\mu_A(x)$로 정의하면

$\mu_A(a)=0.2$; $x=a$에서 0.2 뜨겁다

$\mu_A(b)=0.3$; $x=b$에서 0.3 뜨겁다.

를 의미하게 한다. 이는 확률과는 다른 것이다.



분명히 공학에서 집합은 두 종류가 존재한다.

- Crisp set (그 대상을 분명히 구분할 수 있는 모임)
- Fuzzy set

물론 이 퍼지집합에서도 모든 집합 연산이 가능하도록 합집합, 교집합, 여집합 등이 정의되어있고, 이는 학교수학에서 배우는 집합연산의 성질을 그대로 이어가면서 확대하고 일반화한 것이다.

형식적이고 논리적으로 우리의 사고를 정리하고 명확하게 표현하는 것을 가능하게 한다는 집합론의 장점은 중학교 수학에서 그 본래의 의미를 찾기 어렵다. 오히려 학생들이 느끼기에 아무런 의미가 없는 여러 기호와 용어의 무의미한 반복학습으로 이어지기 쉬우며, 몇 가지 형태의 정형화된 문제 풀이에 대한 학습이 강요되기 쉽다. 집합 단원에서의 이러한 학습 경험은 바람직하지 않으며 수학적 사고력의 신장에도 도움이 되지 않는다. 따라서 중학교 수준에서의 집합은 엄격한 정의보다는 '모임'의 동의어로 사용하여도 충분하며, 이러한 도입이 오히려 더욱 발전적으로 집합의 개념을 확장할 수 있는 방법도 되리라 생각한다.

IV. 무한 집합을 왜 가르치는가?

무한이라는 개념은 사람들의 마음을 끄는 마력이 있다. 이 개념은 인간생활의 언어, 문학 등에서부터 철학, 신학에 이르기까지 다양한 형태로 나타난다.

우리가 살고있는 세상은 유한함에도 불구하고 그것을 취급하기 위해 필요로 하는 수학은 거의 모든 경우에 무한을 수반한다. 집합론 초기에는 많은 수학자들이 다루기 곤란한 무한을 피하려고 노력하였지만 그럴수록 수학은 복잡하고 어려워진다는 사실을 발견하였다. 집합론에 관한 칸토어의 연구에서 최고의 업적은 초월수의 체계와 그것에 관한 산술의 전개로 여겨진다. 물건의 개수를 세기 위한 유한 수로 자연수가 필요했던 것처럼, 무한집합의 크기를 측정하기 위해서는 초월수가 필요했던 것이다. 그는 1874년 최초로 농도 개념을 도입하여 "초월수가 대수적 수 이상으로 많음"을 증명하였다. 이러한 그의 주장은 당시의 수학자들 사이

에 격렬한 논쟁을 일으켰고 특히 칸토어 자신의 스승이었던 Kronecker(1823- 1891)는 '무한론'과 그것을 주장하는 사람들을 향하여 사용 가능한 모든 수단을 이용하여 집요하게 공격하였다

이러한 칸토어의 예를 통하여도 알 수 있듯이 유한에서 무한으로의 인식 전환은 상당히 어려운 일이다. 일상에서 구체적인 예를 찾을 수 없는 무한을 상상 속에서 추상적으로 다룬다는 것이 얼마나 어려운 일이겠는가?

이러한 무한집합을 각 교과서에서는 어떻게 다루고 있는가를 살펴보기로 하자.

> 위의 물음(1)에서의 집합 {1, 3, 5}와 같이 원소의 개수를 끝까지 셀 수 있는, 곧 원소의 개수가 유한인 집합을 유한집합이라고 한다. 또, 물음(2)의 집합 {2, 4, 6...}과 같이 원소의 개수를 끝까지 셀 수 없는, 곧 원소가 무한히 많은 집합을 무한집합이라고 한다. (김연식 외, 1996)

> 집합 {a, e, i, o, u}, { x | x는10만 보다 작은 자연수}와 같이 집합의 원소의 개수를 끝까지 헤아릴 수 있을 때, 그 집합은 유한집합이라고 한다. 그리고 유한집합이 아닌 집합을 무한 집합이라고 한다. (박두일 외, 1996)

> 집합 A={ x | x는 자연수}에서는 아무리 큰 자연수를 택하여도 그것보다 더 큰 자연수가 있게 된다. 따라서 집합 A에서는 가장 큰 원소를 찾을 수 없다. 즉, 집합 A에는 원소가 무한히 많다. 이와 같이 원소가 무한히 많은 집합을 무한집합이라고 한다. (김호우 외, 1996)

> 집합 A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}와 같이 유한개의 원소로 이루어진 집합을 유한집합이라고 한다. 한편, 집합 N={1, 2, 3, 4, 5,...}와 같이, 무수히 많은 원소를 가진 집합을 무한집합이라고 한다. (김응태 외, 1996)

대체로 살펴본 교과서의 무한집합의 표현은 '셀 수 없는', '무한히 많은'의 수식어가 붙어있다. 그러나 이 용어의 사용은 상당히 주의 할 필요가 있다. 예를 들어 "밤하늘에 별이 셀 수 없이 많다.", "경포대 앞의 백사장에 모래알이 셀 수 없이 많다."에서 사용되는 셀 수 없이는 유한하기는 하지만 그 개수를 일일이 세어보기는 너무나 어려운 일이라는 의미일 뿐으로 무한집합과는 아무런 관계가 없다. 교과서에서 사용된 또 다른 무한집합의 표현 "집합의 원소의 개수를 끝까지 헤아릴 수 없는 집합"은 수학적으로 논쟁이 있을 수 있는 표현이다. 집합론에서는 자연수의 집합과 원소의 개수가 같은 집합을 셀 수 있는 무한(可算: countable)집합이라고 하고, 이것 이외의 무한 집합을 셀 수 없는 무한(非可算: uncountable) 집합이라 정의한다. 따라서 '헤아릴 수 없는', '셀 수 없는'이 사용된 수학적 문장은 '가산', '비가산'의 뜻으로 잘못 이해될 수 있음에 유의해야 할 것이다. 이는 일상용어와 수학적용어의 혼용에서 올 수 있는 문제점 중에 하나로 교과서의 기술방법으로는 피해 가는 것이 좋을 것이다. 또한 유한집합의 '개수'에 대응되는 개념으로 무한집합에 '농도'를 도입하면 '부분은 전체와 크기(농도)가 같을 수 있다', '크기(농도)가 다른 두 무한(집합)이 존재한다' 와 같은 사실을 증명할 수 있다. 이것은 유클리드 공리 '부분은 전체보다 작다' 와 상반되는 것이다. 학교 수학에서 무한집합과 그 부분집합의 관계를 쉽게 설명하기는 어렵다. 이는 부분이 모여서 전체를 이룬다는 상식을 넘어서기 때문이다.

수 집합을 제외하고는 무한 집합의 적절한 예가 존재하지 않는 것도 교사를 당황하게 하는 요인 중에 하나이다. 다시 말하여 무한집합으로는 자연수의 집합(정수, 유리수, 실수는 배우기 전 단계이므로)과 그 부분집합인 짝수, 홀수의 집합 외에는 학생들이 인지 할 수 있는

구체적인 대상이 없다.

이렇게 구체적인 예도 제시되기 전에 무한집합을 도입하여야 하는 이유는 무엇일까?

중학교 교과서의 전체적 구성으로 보아 무한집합의 개념이 반드시 필요하다고 여겨지는 곳은 없다. 아마도 무한집합이 도입된 단 하나의 이유는 원소의 개수 $n(A)$를 이용한 식

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

에 대한 설명의 필요성 때문이 아닐까 한다. 곧, 이 식이 유한집합에서만 성립하므로 이 식이 성립하지 않는 집합의 구별을 위하여 무한집합을 도입한 것으로 여겨진다. 오직 이 이유만이 무한집합의 도입 이유라면 무한집합에 대한 언급 없이 그 개수가 유한한 집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립함을 이야기하는 정도에서 마쳐도 될 것이다.

엄격한 논리 전개를 위하여 무한집합을 도입하여도 오직 용어만 정의하고 '보기', '활용의 예', '무한에 의한 논리전개나 확장'이 거의 없는 무한집합은 가르치는 사람과 배우는 사람 모두에게 부담이 된다. 오히려 적절하지 못한 무한집합의 비유(백사장의 모래, 하늘의 별)는 '무한이란 구체적으로 말하기는 어렵지만 상당히 큰 수'라는 잘못된 인식을 심어 줄 수 있음에 주목할 필요가 있다.

V. 왜 공집합은 모든 집합의 부분집합인가?

왜 공집합 ϕ는 모든 집합의 부분집합인가? 집합을 가르치는 교사나 배우는 학생들이 적어도 한번은 의문을 갖게 되는 것이 이 물음일 것이다. 각 교과서의 기술된 이 부분은 다음과 같다.

> 이와 같이, 집합 B의 원소가 모두 집합 A에 속할 때, B를 A의 부분집합이라고 한다. 또 A는 B를 포함한다 또는 B는 A에 포함된다고 말하고 $B\subset A$ 또는 $A\supset B$로 나타낸다. 공집합 ϕ는 모든 집합의 부분집합이라고 생각한다.
> (김응태외 p13)

> 이와 같이, 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 즉 A가 B에 포함될 때 또는 B가 A를 포함할 때 A를 B의 부분집합이라고 한다. 이 때 이것을 기호로 $B\subset A$ 또는 $A\supset B$와 같이 나타낸다. 그리고 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 정한다. (김호우외 p16)

> 집합 B의 모든 원소가 집합 A에 속할 때 B를 A의 부분집합이라고 한다...(중략)...집합 A의 모든 원소는 그 자신이 집합 A에 속하므로 $A\subset A$이다. 즉, 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. (참고) 공집합 ϕ는 모든 집합의 부분집합이라고 정한다. (박두일외 p16)

집합 A에 대하여 $A\subset A$ 임을 설명한 교과서는 있어도 $\phi\subset A$ 임을 설명한 책을 찾아 볼 수 없다. 모든 책은 이를 '공리' 정도로 다루고 있다. 그러나 공리란 대다수의 사람이 참으로 받아들이는 명제이어야 한다. 이렇게 쉽게 받아들이기 어려운 명제는 무엇인가 그렇게 정하게 된 이유에 대한 설명이 필요한 것이다. 참고로 아래의 책들은 공집합이 임의의 집합의 부분집합이 되는 이유를 다음과 같이 기술하고 있다.

> (정리1) 공집합 ϕ는 임의의 집합의 부분집합이다.
> (증명) 명제 「$x\in\phi$ 이면 $x\in A$」에서 조건 '$x\in\phi$'이 거짓이므로 결론 $x\in A$의 참 거짓에 관계없이 이 명제는 참이다.
> (You-Feng Lin외, p83)

> 앞의 집합 (베토벤, 뉴턴, 다윈, 가우스, 바베지, 바하로 이루어진 집합으로 집합의 여러 부분집합; 수학자의 집합, 영국인의 집합, 이름의 마지막 철자가 n인 집합등을 설명한 집합)에서 '100살 까지 살았던 사람'들을 생각해보자. 이 성질은 명확하므로 이 조건으로부터 U의 부분집합을 만들 수 있다. 이 집합이 원소를 갖지 않는다는 사실 때문에 쉽게 무시해버리기 쉽지만 이것도 U의 부분집합이다.
>
> (Krause, 1991, p32)

당연하게 받아들이기 어려운 사실은 약간의 설명을 덧붙여 주는 것이 좋으리라 생각된다. Krause의 예는 좋은 보기가 될 것이다. 곧, 전체 집합 U에 대하여 집합의 성격만 명확히 한다면 원소가 없는 집합이라도 집합 U의 부분집합으로 생각할 수 있음을 이용하여 공집합이 모든 집합의 부분집합이 되는 이유를 설명할 수 있을 것이다.

VI. 결론

앞서 언급한바와 같은 집합 교육의 필요성에도 불구하고 '모임'과 동의어로 여겨지던 '집합'이라는 일상용어를 수학적으로 정의하고 형식화함으로서 일상생활과 수학에서 사용하는 용어사이에 괴리감이 형성되고 있다. 이러한 때이른 형식화에도 불구하고 집합개념의 도입이 다른 수학적 개념의 논리 전개에 별다른 영향을 주고 있지 않다는 것이 우리의 판단이다. 일상적인 문제의 풀이 과정에서 자연스럽게 도입되는 방정식, 부등식, 함수, 도형단원 등과는 달리, 집합은 형식적이고 논리적으로 우리의 사고를 정리하고 명확하게 표현하려는 의도에서 도입된 것이지만, 이렇게 도입된 논리는 뒤따라 나오는 다른 학습내용과 연계되지 못함으로서 단절되고 고립된 단원이 되고 만다. 따라서, 중학교 일학년에서 집합을 도입한 것은 지나친 일이라고 결론 지을 수밖에는 없다.

이는 집합을 가르치는 것이 어렵다거나 집합에 관련된 어떤 문제를 풀지 못한다는 뜻은 아니다. 실제로 합집합, 교집합, 차집합, 여집합에서 제한된 집합 연산에 관한 문제나 원소의 개수를 구하는 문제는 대체로 정형화되어 있어 보통의 학생들이 잘 푸는 문제 중에 하나라고 여겨진다. 우리가 주장하는 것은 집합이 학교수학에 도입된 이유가 불명확해져 있다는 것이다. 형식화를 위하여 도입된 것이라면 적어도 도입된 내용에서는 완벽한 논리체계를 갖도록 하고자 함이다. 이를 위하여 다음과 같은 제안을 하고자 한다.

첫째, 중학교에서의 집합은 모임의 동의어로 사용하거나 그 내용을 완전히 삭제하고 고교과정에서 도입한다, 특히, 집합이 아닌 모임에 대하여는 언급하지 않도록 한다.

둘째, 무한집합의 예로 자연수를 제외하고도 충분히 많은 것이 제시될 수 있도록, 무한집합은 적어도 정수, 유리수를 배운 후에 학습시키도록 한다.

셋째, 공집합이 모든 집합의 부분집합이 되는 이유를 제한적으로나마 도입한 논리체계 안에서 설명하도록 한다.

넷째, 형식화와 논리적 사고의 필요성을 위하여 집합의 도입을 고등학교로 미룰 경우 완전한 논리전개를 위하여 집합, 대응, 함수를 동시에 도입하는 것이 좋을 것이며 중학교에서 다루는 일차함수, 이차함수는 정비례, 반비례, 직선, 포물선 등의 개념으로만 도입하여도 될 것이다. 가능하다면 명제에서 논리연산을 취급함으로서 필요조건, 충분조건 등을 자연스럽게 집합으로 설명할 수 있도록 하는 것도 좋으리라 여겨진다.

참고문헌

김연식, 김홍기 (1996). 중학교 수학 1. 서울: 동아출판사.

김응태, 박승안, 오현장, 신현용 (1996). 중학교 수학 1. 서울: 한샘출판.

김호우, 박교식, 신준국, 정은실 (1996). 중학교 수학 1. 서울: (주)지학사.

박두일, 신동선, 강연환 (1996). 중학교 수학 1. 서울: 교학사.

최용준 (1996). 중학교 수학 1 교사용지도서. 서울: 천재교육.

한국교육과정평가원 (1998). 제7차 교육과정 개정에 따른 수학과 수준별 교육과정 적용 방안과 교수-학습 자료 개발 연구. 서울: 한국교육과정평가원.

Eugene F. Krause (1991). Mathematics for Elementary Teachers. Lexington, MA: Heath and Company.

You-Feng Lin & Shwu-Yeng T. Lin(1992). Set Theory:An Intuitive Approach. Boston: Houghton Miffin Company.

Proposals on Teaching the Set Theory in Secondary School

Lee, Man-keun (Dongyang University)

The set concept has long been recognized as important for organizing traditional mathematics. Although 'to understand mathematical structure' is an important educational purpose, we think that teaching the abstract set theory in the 7th grade is too early.

In this paper, we reviewed the set theory in the secondary school and we made some proposals such like that we must accept the term 'set' as 'collection' in 7th grade.