大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 157-177. July 2001

탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구

신 은 주*·권 오 남**

Ⅰ. 서론

수학의 본질은 그 실천자의 활동과 성향을 통해서 반영되는 것으로 수학을 한다는 것은 직관을 사용하여 상황을 탐구하고, 규칙성을 찾아내고, 전략을 창안해 내며, 일반화와 추상화를 하는 과정에서 발견한 것을 조직화하고 정당화하는 것을 의미한다. 이것은 Freudenthal (1991)의 수학화 학습과정에 잘 나타나 있는데, 수학화란 개념의 발달이 비 형식적인 상황과 관련된 경험에서 시작해서 수학적 형식주의로 진행해 나간다는 것을 의미한다. 즉 수학화는 인간의 창조적 활동의 하나로서 간주할 수 있는 것으로 실제적인 상황에서 직관 모델을 만들고, 직관 모델의 탐구에서 수학적 모델을 만들어 내고, 추상화와 형식화를 통해서 수학적 해를 구하고, 구해진 해를 원래 상황에서 반성해 보는 피드백 과정을 거치는 수학적 모델링 학습을 의미한다.

현대 사회의 과학 기술적, 경제적 변화는 비평적 사고, 문제해결 능력, 타인과의 의사소통을 필요로 하고 있고, 일상 생활과 작업 현장에서는 수학과 수학의 응용 사이의 연결성의 요구가 증대되고 있다. 이는 추상적인 수학과 구체적이고 실제적인 수학 사이의 잠재적이고 체계적인 관계를 인식해서 연결을 강화하자는 것이다.

수학적 모델링을 통한 수학 학습은 학습자의 비형식적인 경험에서 시작하므로 관심과 영감을 불러일으켜서 사고를 자극할 수 있다. 또한 모델링 과정 중에 수학적 아이디어와 절차를 실험하고 사용하는 데 능동적으로 참여하게 되어 기호 조작이 이끄는 결론으로부터 의미를 유도해 낼 수 있다. 이러한 의의를 가진 수학적 모델링은 실제적인 수학과 추상적인 수학 사이의 연결을 강화하자는 요구에 부응할 수 있고, 더불어 수학의 발명 과정을 학습할 수 있게 할 것이다.

수학적 모델링 활동이 가진 이 같은 의의를 반영해 본 논문에서는 이론적 기초 연구로서 Freudenthal, Fischbein, Lesh, DiSessa, Blum, Niss의 모델 체계에 관한 연구 결과와 모델의 발견술적 효율성 조건을 검토하고, 수학적 모델링의 의미와 분류에 대해 살펴보았다. 그 후에 수학적 모델링 학습의 교육학적 의의를 정리하여 수학 교수학습 과정에서 수학적 모델링의 활용 방향을 논의하고자 한다.

Ⅱ. 수학적 모델에 대한 연구

* 이화여자대학교 대학원
** 이화여자대학교 수학교육과

1. 수학적 모델링으로서의 수학화

최근 인지심리학, 사회적 구성주의 철학관의 대두로 학생들은 지식의 수동적인 전수자가 아니고 지식을 해석하고 자신의 정신적 틀에 비추어 동화한다는 학습관 · 지식관 · 교수관에서의 관점의 전이가 이루어지고 있다. 따라서 수학에 대한 역동적이고 실험적 입장에 기반을 둔 견해는 수학을 정적이고 구조화 된 사실과 절차, 개념들의 조직체로 보기 보다 학습자가 수학을 사용하고 행하는 발생적이고 능동적인 과정에서 수학적 지식을 구성해 나가는 것으로 보게 되었다. 이는 학습자의 경험을 반영한 실제에서 시작해 수학을 발명 · 발견해 나가는 것을 강조하는 수학화 학습 이론의 강조점과 그 의의가 상통하는 것이다.

수학의 재발명을 중시한 실제적인 수학교육의 창시자인 Freudenthal은 수학교육의 시작점을 실제적인 상황으로 보고, 실제의 풍부한 상황이 수학 학습의 근원으로서의 역할을 한다고 강조했다. 즉 수학교육에 실제를 통합하자는 입장으로 수학을 인간의 정신적 활동으로 보고, 수학적 활동의 본질을 수학화 활동으로 보았다. 수학화는 수학적 모델링과 동의어로 사용되지만 더 정확한 의미에서 모델링 과정의 번역 부분이라고 할 수 있고 실세계를 시작점으로 해서 공식화, 형식화, 추상화, 도식화 같은 과정에 의해 진행된다(Freudenthal, 1991). 이러한 수학화 과정은 수학을 인간의 활동으로 보아 창조적인 활동으로서의 수학을 학습하게 하는 의의를 가지고 있다.

Freudenthal(1991)은 이러한 수학화 학습 접근과 대조적인 수학교육에 대한 기계적 접근은 산술적, 대수적 연산을 수행하고, 형태나 패턴을 구별하고, 응용문제를 구별하는 기계적 훈련에 의해 프로그램화된 컴퓨터 같은 장치로 인간을 간주해 왔다고 제시했다. 또한 기계적 학습을 강조한 수학학습 교과서에서 새 연산과 개념의 도입은 당연히 물질적, 시각적 도움을 사용한 설명에 의해 수반되었고 통찰력에 대한 관심이 너무나 피상적이었음을 지적하였다.

따라서 수학화라는 인간의 활동에 기반 한 실제주의적, 경험주의적 접근에 내재한 이데올로기는 수학 구조가 실제에서 시작해 인간의 학습과정에서 연속적으로 팽창되어 가는 것으로, 이 과정을 안내하고 그것을 경험하는 사람들에게 이 과정을 강화시키는 것이 교육의 예술임이 강조되어야 한다(Freudenthal, 1987).

위의 이론적 고찰을 바탕으로 수학화 학습이 가지는 의의를 정리해 보면 형식적 수학의 연역적 체계화에서 시작하는 학습은 인간의 실제나 경험적인 근원과 멀어져서 추상적으로 발달됨으로써 수학의 의미를 잃게 될 위험성이 내재하고 있다. 따라서 실세계를 시작점으로 해서 수학화 과정을 거치고 다시 실세계로의 피드백을 통한 반성으로 수학을 경험하고 재 발명하자는 수학화 활동이 중시되는 교육에서 학습자는 수학을 자신의 실제와 통합한 후에 점진적으로 형식화를 거치는 중에 수학적 사고 발달의 원동력이 되는 창조적 · 반성적 · 비판적 사고 능력을 소유하게 되는 것이다.

2. 수학적 모델에 관한 연구

가. 모델의 의미

모델이란 말이 가진 여러 가지 의미를 살펴보면 구체적 모델과 같은 물리적 모델을 의미하기도 하고 교사가 학생의 문제해결과정을 모델화 하는 것처럼 구체화나 시뮬레이션을 의미하기도 한다. 다양한 의미와 사용법 중에서 학교수학에서 수학적 모델이라는 용어는 복잡한

현상의 이상화된 상태 내에서 그 요소들과 관계들의 수학적 표현을 의미한다. 더 광의의 사용으로 수학적 모델은 현상의 이해를 분명히 하거나 문제를 해결하는데 사용한다는 의미에서 표현뿐 아니라 표현에 따라 활동하고, 수학적 모델 내에서 모델화 되는 현상과 관련해서 그러한 활동의 의미를 해석하는 것을 포함한다 (NCTM, 1999).

Frendenthal(1978)은 추상기하 형태의 구체적 모델을 만든 Klein을 수학에서 모델이란 용어를 처음 사용한 사람으로 보았다. Frendenthal에 의하면 Klein에게 있어 모델의 특징은 비 유클리드 기하의 상대적 구체화와, 사영기하 내에서 비 유클리드 기하의 재해석에 존재하는 것이었고, Klein의 예시는 공리계의 모델 개념이 발달된 근원으로서 이 때에 모델은 공리에 의해 암묵적으로 제시된 것을 적당한 수학적 대상에 의해 명백히 만들고 상대적으로 더 구체적인 형태가 주어지도록 하는 역할을 한다.

위 정의에서 알 수 있듯이 모델은 사고자에게 복잡한 체계의 행동을 서술하고 예측하고 통제하기 위한 능력을 제공하는 구조적 은유나 패턴을 의미하는 것으로 전체적인 유용한 단서의 기초 위에서 형식화된 의사결정을 하게 만드는 것이다(Lesh & Kelly, 1994). 실험을 통해서 물리적 현상의 이론을 수립하듯이 수학적 모델이 물리적 세계와 수학적 이론 사이에 연결을 하는 촉매 역할과 교량 역할을 성공적으로 이행하게 될 때에 모델적 사고는 수학적 사고력 함양이라는 수학교육의 목표 달성에 이바지하리라 본다.

나. 모델의 분류

(1) Freudenthal의 서술모델과 규범모델

Freudenthal(1978)은 수많은 '모델사고'의 예시가 현대 과학기술로부터 인용될 수 있다고 보았으며, 규범모델과 서술모델로 구별해서 설명하고 있다. 규범모델의 특징은 실용성이 있고 임의적인 것으로 흔히 찾아볼 수 있으며 관습적인 성질을 가진 반면, 서술적 모델은 타당성이 있고 한정적인 것으로 소수이고 강제성을 띄고 있다고 보았다. 규범모델의 예시로 교통흐름 조절모델을, 서술모델의 예시로 혈액순환 모델을 제시했다. 서술적 모델은 물리학에서 원자 모델이나 빛의 파동성 또는 입자설처럼 현상을 설명하기 위한 가설이므로 그 가치는 실용성에 있는 것이 아니라 타당성에 의해 입증되어야 하고, 실용적 가치를 주장하기 위해 실제에 적용하려고 한다면 그것은 모델을 과용하는 것이고 모델과 현실을 혼동하는 상황이 됨을 지적했다. Frendenthal(1991)은 복잡한 상황 내에 초점을 맞추고 역동적 상황의 본질을 파악하기 위해 단순화, 이상화로서 수학화의 한 측면으로서 모델보다는 모델링에 초점을 맞추고 있다. 비 형식적 상황, 즉 개인의 실제에서 시작한 시작 상황과 더 일반적이고 형식적인 주제의 수준 사이에서의 차이를 점차적으로 메꾸는 중재자로서 모델의 역할을 강조한 것이 그의 논지이다.

(2) Fischein의 모델 분류

Fischein(1987)은 모델을 직관적으로 받아들여진 인지를 형성하는 본질적인 도구로 보아 체계 B가 체계 A의 모델을 나타내는 것으로 어떤 동형 사상의 기초 위에서 A에서 만들어진 서술이나 해는 B에 의해 일관되게 반영되는 것으로 보았다. Fischbein(1987)은 모델 유형을 세 가지로 분류하고 있다.

첫째, 추상모델과 직관모델이다. 직관모델은 감각적인 것으로 어떤 다른 실체처럼 인지되고 표현되고 조작되는데, 예를 들어 벡터 크기를

나타내기 위해 유향 선분이 사용되고 확률과 조합 문제를 풀기 위해 수형도(tree diagram)를 사용함을 제시했다. 직관 모델의 예시로 그래프의 의미를 사용한 다이어그램 모델을 들 수 있다. 다이어그램은 실제의 개념적 해석과 실제적 표현 사이의 교량을 연결하는 이상적인 도구로서, 비록 다이어그램이 실제의 직접적 이미지가 없는 인지적 예시가 아닌 기호 체계 같은 개념 구조의 형상적 표현이지만 그 모델링 능력의 근원은 개념의 역동성과 공간 관계의 역동성 사이에서의 동형사상, 즉 원래 상황과의 동형 사상적 대응성 때문에 또한 원래 상황에 대한 자율성 때문에 문제해결을 위한 발견술적 모델이 되는 것이다(Fischein, 1987).

둘째, 명시적 모델(explicit model)과 암묵적 모델(implicit model)이다. 때때로 모델은 해의 발견을 촉진하기 위해서 의도적이고 의식적으로 선택되고 세워지는데, 예를 들어 그래프, 다이어그램, 히스토그램도 의도적으로 유도되지만 종종 모델은 자동적으로 만들어지고 어떤 실제와의 연결에서 암묵적으로 사용된다. Fischbein에 의하면 해결 시도의 대상이 어떤 현상, 즉 관심의 대상이라는 것을 확신한 사람들의 정신적 노력은 현상의 모델을 다루는 데, 어떤 모델은 주체의 해석에 영향을 전혀 주지 않고, 어떤 모델은 부적절한 요소가 개입할 때에 개념의 옳은 해석을 암묵적으로 왜곡하고 차단한다. 이들 성질의 암묵적 개입이 주체자가 의식하지 못하면 개념 해석, 해결 전략에 어떤 식으로든 영향을 미치게 된다.

셋째, 유추 모델(analogical model)과 예증모델(paradigm model)이다. 두 실제 사이에 체계적인 유사성이 있다면 두 실제는 유추 관계로 고려된다. 유추 모델의 경우 모델과 원래 상황은 두 개의 분명한 개념 체계에 속하고, 예증 모델의 경우 원래 상황은 실제의 집단에 속하고 모델은 고려되는 범주의 예가 되거나 부분집합이 된다(Fischein, 1987). Fischbein의 지적처럼 유추를 통한 모델이 사고에 영감을 줄 수 있고, 발견술적 수단이 되며, 유추를 통해 직관적으로 이해 가능한 구조를 제공함으로써 원래의 체계에 대한 관계에서 어려운 정신 모델이 용이해 지게 된다. 이에 반해 예증 모델은 단순한 예시와는 구별되는 것으로 본질적 질에 의해서라기보다 기능에 의해 정의된다. 즉 예증 모델은 모든 지적 활동에 기본 역할을 하는 것으로 직관적 접근, 해석, 해결을 형성하는데 본질적인 요소이며 정의, 설명, 분류, 예측에 중요한 역할을 하는 생산적 사고의 부분이다. 그러나 예증 모델이 제시한 개념의 암묵적 경계가 사람에 따라 다르고 개인 경험과 정보에 의존하고 개념의 예증적 정의는 비 통제적 과정이라는 단점을 가지고 있다(Fischein, 1987).

요약하면 수학교육에서 모델은 추론과정에서 창조적 과정에 필요한 구조화하는 요소를 제공하며, 모델을 탐구해 얻는 발견으로부터 원래 상황의 가능한 성질을 추론해 내고, 적합성을 판단하게 한다. 따라서 암묵적 직관모델과 추상모델, 유추모델, 예증모델, 다이어그램모델 사이의 상호 작용적인 학습을 통해 참된 인간의 경험 세계와 수학의 형식적인 체계 사이의 연결이 세워져야 한다. 이 때에 학생들은 수학이 인간에 의해 발명된 인간 활동이라는 것을 이해하고 수학을 창조하는 학습이 가능해 질 것이며 새로운 발명으로 진전되는 과학적 맥락에서의 교육이 가능할 것이다.

(3) Lesh의 개념모델

Lesh(1983)는 네 가지 체계로 구성된 적응적인 구조로 개념모델을 정의하고 있다. 첫째, 개념과 관계된 판단을 하기 위해 통합해야 하는 관계와 연산의 개념내 관계망(within concept network)이다. 둘째, 개념 관계망 내에서 연결하고 결합하는 개념들 사이의 체계(between concept system)이다. 셋째, 모델 내에서의 변형, 모델들 사이에서의 번역 체계를 가진 문어, 기호, 그림, 구체물 등의 표현체계이다. 넷째, 모델링 과정, 즉 위 세 요소를 사용 가능하게 하고 실제 상황에 맞추어 수정하거나 적응하는 역동적 체계이다. 모델링 과정은 실세계 상황을 현존하는 이해에 맞게 변화시키고, 현존하는 이해를 상황에 맞게 변화시키고, 모델 내에서 모순을 해결하고, 내적 불일치를 제거해 모델을 변화시키는 과정을 말한다. 대다수 수학자에게 수학은 구조의 연구이고 수학을 하는 것은 구조를 만들고 조작하는 것이지만 구조와 구조를 만드는 과정이 수학자와 학생이 문제해결에 사용하는 개념모델을 구성한다는 것을 강조했다.

Lesh는 네 번째 체계인, 문제 해결에서 가장 중요한 모델링 과정을 네 단계로 설명하고 있다. 첫째는 다른 특징에 초점을 맞추기 위해 실 상황에서 부적절한 특징을 무시함으로써 원래 문제 상황을 단순화하는 단계이다. 둘째는 문제상황과 개념모델 사이의 사상을 세우는 단계이다. 셋째는 원래 상황에 대한 정보를 만들기 위해 모델의 성질을 탐구하는 단계이다. 넷째는 모델로부터 거꾸로 원래 상황으로 예측을 번역하고 결과가 맞는지를 검토하는 단계이다. Lesh는 주관적 개념모델의 인식에 관심을 가졌을 뿐 아니라 그들의 조직이 영향받는 메카니즘을 조사하고 학생의 모델링을 모델화하는 방법에도 관심을 가졌다. 또한 실제적 수학, 실제적 상황, 실제적인 아동에 초점을 둘 것을 강조하는 실세계 시작점을 학습의 시작점으로 보고 있으며 아동을 과정 진행자라기 보다는 모델을 만드는 사람으로 보고 있다. 따라서 문제해결과 개념형성이 분리되어 고려되지 말아야 하는 이유 중 하나가 개념모델의 처리 과정 때문이므로 학생이 먼저 아이디어를 학습하고 나서 일반적인 문제해결 과정을 부과하고, 최종적으로 실제 상황의 과정과 아이디어를 사용할 필요가 없는 것으로 본다. Lesh는 실제적인 상황, 실제적인 수학에 초점을 둘 것을 강조해서 상황에 대한 지식이 중요한 수학적 아이디어와 과정을 이끌어 주므로 문제해결과 응용, 모델 구성이 학습이 일어난 후로 보류되지 말고 수학적 아이디어의 학습이 일어나는 상황에 통합될 것을 강조했다. 점진적 수학화의 이론 틀을 기초로 최근 교육학적으로 지향된 이론 틀인 상호작용적인 수학교육을 향한 추세를 Lesh의 개념모델을 통해 심화할 수 있다고 본다.

(4) 개념적 은유로서의 모델

은유가 새 개념과 아이디어에 의미를 창조하는 역할을 한다는 것을 깨닫게 됨에 따라 진행 중인 수학적 활동의 본질적인 부분으로서 수학 교실에서 일어나는 은유적 사고를 해석하려는 시도가 행해지게 되었다. 수학 학습에서 은유의 역할에 대한 토론은 Pimm(1987, 1995), Nolder(1991), Sfard(1994), Sierpinska(1994) 등의 연구에 의해 시작되었다(Carreira, 1997).

은유적으로 사고하는 것은 실제를 지각하는 새로운 방법을 가능하게 하는 다른 영역과 개념 사이의 잠재성 있는 연결에 놓여 있는 것으로 이는 Carreira(1997)가 실세계 문제해결, 즉 수학적 모델링과 은유적 사고가 서로 얽혀 있는 것으로 간주되는 과정에서 은유의 교육적, 인지적 역할에 대해 논하면서 은유의 특징을 주관의 투영, 즉 객관화와 상호작용이라고 설명한 데에서도 찾아볼 수 있다. 이 때에 주관의 투영이란 은유가 사람에게 근원 영역의 지식을 목표 영역으로 투영시킴으로써 근원 영역에 의해 목표 영역을 보게 해 주는 것이다.

Carreira에 의하면 이러한 은유의 역할은 수학 학습에서 모델을 통해 현상의 실제를 보게 되는 것과 마찬가지로 근원 영역의 어떤 특징을 재해석해서 내재된 함의의 복잡성을 목표 영역으로 투영해 두 개념 사이에서 교량적 역할을 하는 중재적 위치를 가진다.

Pimm의 복소평면의 은유에서 모델 창조 과정을 발견할 수 있는 것처럼 Mason(1990)도 은유에 대한 학습을 모델링 활동을 유발하는 내적 활동으로 보았다. 은유는 모델링과 유사하고 은유에 대한 풍부한 이해는 참여하는 것과 관련되는 것으로 문제를 나 자신의 것으로 만들기 위해 자신의 은유를 구체화시킬 것을 제안하면서 정신적 이미지나 연상을 불러일으키는 알기 어려운 본질을 포착하면 은유를 이해하기 쉽다고 했다.

그러나 은유나 수학적 모델이 수학 학습과 교수에서 자연스럽게 만들어지는 것으로 위험성이 내재되어 있지 않은 것이 아니다. Pimm (1987)은 수학 학습과 교수에서 은유는 함정이나 위험에 영향을 받을 수 있는 것으로 단어의 사용과 의미가 유연하고 복합적이라는 것을 염두에 두고 은유가 가진 위험성을 인식하는 것이 필요하다고 제안했다. 이 같은 위험성 인식에 대해 Mason(1990)은 필수적인 모델로서 은유를 보고 은유와 관계된 풍부한 이미지와 운동 감각적 연상을 가진 은유를 개발하고 구성하는 것이 모델링을 통해서 가능하므로 모델을 은유적 풍부함과 상상을 보는 방법으로 보았다. 이 견해는 은유를 찾는 것을 수학적 모델링 시도에서 첫 실제 단계로 보고 어떤 가능한 모델 뒤에는 틀림없이 은유가 있고 은유 없이 모델은 성공적으로 성취될 수 없다는 것이다.

이상의 고찰과 같이 수학적 모델링에서 은유는 현상을 보고 현상을 설명하는 것 사이에서 중재자 역할을 하므로 수학 학습에서 이 같은 은유와 모델을 선택하고 세우고 사용하고 교육적 힘을 조명하는 것은 중요하다. 실세계 문제에 포함된 은유를 탐구하여 문제 해결의 의미론적 잠재성을 개발하게 해 주고, 모델화 된 상황의 개념적이고 은유적 성질에 심상 이미지를 형성해 정신적으로 경험하는 노력이 수반될 때에 수학적 아이디어와 개념에 대한 의미를 개발하는 새로운 가능성을 열어 줄 것이다.

(5) DiSessa의 현상학적 근원으로서의 모델

DiSessa(1987)는 인지 체계의 근원을 고찰하기 위해 현상학적 근원이라 부르는 모델 범주를 서술했다. 현상학적 근원은 현상의 전체류를 주체자가 설명하거나 정당화하는 특별한 현상으로서 학생들이 학습 과정에서 세상을 보고 설명하는 근거가 되는 현상 모임을 지칭한다. DiSessa는 현상학적 근원은 물리체계나 행동, 가설된 행동으로 인식됨으로써 행동하는 작은 지식 구조로서 행동적이거나 반드시 어떤 관계된 행동을 수반해서 자체적으로 설명적 역할을 하는 것이며, 물리 법칙과 관련된 직관적 동치이고, 경험적 기원을 통하는 경우를 제외하고는 설명되지 않는다고 제시하며 현상학적 근원의 예시로 물리 현상을 들고 있다. 예를 들어 자유 낙하하는 물체가 떨어지는 이유에 대해 학생들은 무겁기 때문이라는 대답을 하는데 이때에 무거움이 학생들에게는 현상학적 근원이다. 학생들의 인식에서 무거움은 대상의 본질적 성질로서 물체가 낙하하는 이유, 손을 누르는 이유, 가벼운 것보다 더 빨리 떨어지는 이유를 설명한다고 보았다. 이러한 현상학적 근원은 과학적 추론 개발에 유용한 역할을 하고 더 기술적 분석에 발견술적 단서가 된다고 그 의의를 설명하고 있다.

이상에서 알 수 있듯이 현상학적 근원은 실제 이론을 나타내는 개념 체계의 직관적 이해

를 제공하는 역할을 한다. Fischbein(1987)은 다이어그램모델처럼 현상학적 근원 모델은 개념적 용어로 현상의 범주를 해석하는 것을 촉진하는 중재 장치로 보았고, DiSessa는 현상학적 근원이 고등과학 추론에 통합될 때에, 즉 높은 복잡한 과학자의 사고에서조차 직관적이고 기본적인 현상학적 모델로서 그들의 영향력을 잃지 않는다고 보았다.

물리적인 대상이 가지는 구체성을 가지고 이성적 세계의 구조를 설명하는 기초적이고 근원적인 현상학적 근원에 의해 수학적인 대상들의 기초가 형성될 수 있다는 인식이 수학 교수·학습의 기저를 형성해야 한다. 즉 완성된 상태가 아니라 발달·발명 과정에 있는 것으로서 수학적 모델로서의 현상학적 근원에 대한 연구가 필요하다.

(6) Blum과 Niss의 모델 분류

Blum과 Niss(1991)가 제시한 모델은 현실 상황과 동일한 정도와 수학적 모델을 구성하는데 수학이 기여하는 역할이라는 두 가지 준거에 따라 분류된다. 첫째, 현실 상황과 동일한 정도에 따라 정확한(exact) 모델, 이론에 근거한 모델, 인상적 모델로 분류된다.

정확한 모델은 세기나 반복에 기초한 모델이나 응용이 수학에서부터 일어나는 모델이다. 예를 들어 복리에 의한 원리합계는 지수함수를 사용한 정확한 모델로 볼 수 있고, 기하적 예시를 사용한 비행기 항로망 구성도 정확한 모델에 해당한다. 실제 상황을 정확히 예상하는 반면, 어떤 경우는 실제 상황의 섬세한 측면을 무시하는 단점을 가지고 있다.

이론에 근거한 모델은 물리적 세계에 대한 응용에서 자주 찾아 볼 수 있다. 예를 들어 축구공을 15미터 올라가고 전방으로 50미터 나가도록 찼을 때 그 공의 경로를 예상하는 경우, 200°C로 데워진 오븐의 시간에 따른 온도 변화를 예상하는 경우, 특정 계절의 강우량을 예상하는 경우가 이 모델에 해당한다. 이들 경우에서는 상황에 대한 가정으로부터 수학적 모델이 유추된다. 가정에서는 상황에 불가능한 정확성을 전제하지만 측정 오차, 반올림의 필요성, 통계적 변인 등 여러 요소가 모델이 단지 실제에 대한 근사적 묘사에 불가할 수밖에 없도록 만든다. 그러나 이 경우 몇 가지 오류의 근원이 존재한다고 전제해도 모델을 이용하여 구한 결과를 어느 정도까지 신뢰할 수 있다.

인상적인 모델은 현실 상황에 적절해 보이기는 하지만 이론으로부터 유도되지 않는 것이다. 예를 들어, 1950년 이래로 수영경기에서 세계 기록은 일차함수에 의해 거의 근사적으로 표현될 수 있지만 그 직선은 시간에 대해 단조감소하는 곡선의 극히 일부분을 다룸으로써 초래된 직선이므로 장기간의 예상에 사용할 수 없다. 이와 같이 예측에 의한 모델은 대개 인상적인 것이지만 어떤 경우 가장 좋은 모델링의 예가 되기도 한다. 그 이유는 이러한 모델은 모델링 과정을 신중하게 고려해야 하기 때문이다. 그러나 그 자체가 훌륭한 예측을 보장하지 않고 정확한 사고를 필요로 하므로 모델의 가치를 확신하기가 더욱 어려운 면이 있어 다른 모델을 경험할 때까지 다루는 것을 미루는 것도 한 방안이다(Blum & Niss, 1991).

둘째, 수학적 모델을 구성하는데 수학이 기여하는 역할에 따라 규범적(normative) 모델과 서술적(descriptive) 모델로 구분된다. 규범적 모델은 원리합계의 계산 등과 같이 수학이 규범을 확립하는데 적용되는 모델이고 서술적 모델은 행성운동, 방사성 붕괴 같은 물리적 현상을 고려할 때 주어진 상황을 묘사, 설명하는데 관여하는 모델이다.

이상에서 고찰한 모델의 구분을 살펴볼 때에

유용한 개념모델은 잘 조화된 아이디어와 과정의 체계를 포함하고 있고, 모델이 내포한 은유와 현상학적 근원에 대한 이해는 이들 모델의 획득과 사용에 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 따라서 풍부한 수학적 아이디어와 관계된 직관모델과 개념모델, 현상학적 근원모델의 발달을 추적하고 다양한 표현체계가 이 발달에 역할을 한다는 것을 인식할 필요가 있다. 학교 수학에서는 다양한 이해 수준에 있는 학생들이 자신의 암묵적인 직관모델, 개념모델, 현상학적 이해에서 출발해 문제의 성질과 요구사항 그리고 수학적 세련화 수준에 적합한 형식화된 추상적인 수학적 모델을 스스로 구성해 나가는 기회를 제공해 주어야 한다.

다. 모델의 발견술적 효율성 조건

수학과 과학에서 가장 중요한 원리와 규칙은 점차적으로 구성되어 가고 모델로 연결되어 주기적이고 질적인 재조직이 발달과정에서 일어나는 것으로 우리를 둘러싸고 있는 세계를 이해하는 것은 모델을 세움으로써 시작된다. 즉 모델은 사물이 동작하는 방법을 알고 시험하게 해 주고 사물이 장차 미래에 어떻게 될 지를 예측하게 해 주므로 이 시각에 따라 학습의 주된 부분은 실제에 맞는 모델을 구성하는 것으로 볼 수 있다(Lesh, 1990).

이 때에 언급되는 모델은 자신의 경험을 내적 모델로 사상함으로써 얻어지는 인지모델로서 이러한 모델이 만들어지는 과정은 인지과학의 기초 원리와 일치점을 찾을 수 있다.

Lesh와 Lamon(1992)은 수학적 모델링이 현대의 인지과학의 기초 원리와 일치되고 있는 점을 제시하였다. 인간은 주변 세계와의 상호작용의 내적 모델을 창조하여 그 결과를 자신의 표현의 조직망으로 구축한다는 점과 정신적·내적 모델이 조직체 내에서 연결되어 풍부하게 될 때에 창조적 과정이 가능하다는 점, 그리고 구성된 모델은 다른 구조적으로 유사한 상황을 해석하기 위해 점진적으로 확장되고 탈 배경화되는 상황화된 지식을 초래한다는 점에서 수학적 모델링이 인간의 지식이 발달되는 방법에 대한 인지과학적 접근과 합치됨을 설명했다.

그러나 실세계 상황에서 학생이 구성한 모델은 일반적인 인지구조와 수학 구조와는 다소 다른 경향이 있으므로 위의 관점을 고려해 모델화 된 상황의 심상 이미지를 형성하고 그것을 정신적으로 경험하려고 노력하는 것을 포함하는 모델링의 개념적 측면을 제시한 도움을 학생들에게 주어야 한다. 이를 위해서 수학 모델이 가진 특징을 알 필요가 있다.

Lesh(1990)는 수학과 과학 개념은 점차적으로 개정되고 세련화되고 분화되고, 복잡하고 완전하고 유연한 체계로 통합되어 가는 개념모델로서 점차로 증진되어 감을 제시했고, 수학 모델은 국부적인 상황을 해석하고 설명하기 위해 개발된 것으로 빛의 파동과 입자 모델의 경우처럼 역설적 혹은 부분적으로 중첩된 모델의 집합체가 주어진 문제해결 상황을 해석하고 설명하는데 필요한 것으로 보았다.

이상에서 보듯이 모든 모델이 인식을 강화하는 것은 아니므로 실제에 맞는 모델을 구성하는 것이 중요하다. 어떤 주어진 상황의 수학적 모델링은 수학적 시각으로 상황을 보고 재해석하는 것을 허락하는 수학 모델을 창조하는 것을 의미한다. 구체적인 개념과 아이디어에 기초해 이해하기 충분하고, 가능한 같은 영역에서 많은 아이디어와 추상 개념을 설명하고 표현하기에 충분한 모델을 세우고 사용하는 것이 중요하다. 따라서 학생의 인지 수준에 따라 효과적으로 사용하기 위해 적합한 모델에 익숙해야 하고 학습자는 자신의 경험을 반성하고 모

델의 힘을 이해해야 한다.

이를 위해 Fischbein(1987)은 마찰과 모순을 일으킬지 모르는 실제적 조건에서 모델에 어떤 제약을 부과하는 발견술적 조건 세 가지를 제시하고 있다.

첫째, 모델은 그들 사이에서 구조적 동형의 기초 위에서 실제 대상에 대해 신뢰성을 가져야 한다. 이것은 불변성, 일관성, 상호적 관계 응집성이 원래 것과 모델 사이에 존재해야 함을 의미한다. 둘째, 모델은 원래 것에 대한 상대적 자율성을 가져야 한다. 각 단계를 발생, 제어하기 위해 실제 대상에 의존할 필요성이 있는 모델은 발견술적으로 무용하다. 모델의 발견술적 능력은 실제 대상에 대한 이 자율성에 의존하는 것으로 모델을 사용하는 것은 모델에 의해 생산적으로 사고하는 정신 모델을 가지는 것이므로 정신모델이 해결전략을 고무하고 해를 제안하고 실제 대상에 의해 얻은 해의 의미와 일관성을 확인하기 위해 모델은 자율성을 가져야 하는 것으로 보았다. 발견술적으로 효능이 있기 위한 모델의 셋째 조건은 인간의 정보 처리 특징과 일치해야만 하는 것으로 이 셋째 범주는 모순되는 필요성을 이끈다고 지적했다. 그 이유로서 자율성이 있는 모델의 이점은 실제 대상에 의해 제기된 다양한 문제를 해결하기 위해 모델에 의존함과 동시에 해결자가 너무 모델에 사로잡혀 실제 대상에 대해 적절하지 않은 모델의 성질로부터 실제 대상에 대한 결론을 도출하는 위험성을 증가시키게 됨을 강조했다.

이상에서 살펴본 바와 같이 모델은 자체 일관성을 가지고 동시에 실제 대상, 인간 인지의 특징과도 일관성을 가진다. 좋은 모델은 자율적인 실제가 되지만 동시에 원래 상황과 해결자의 지적 활동 사이에서 신뢰성 있는 참된 중재자가 되어야 한다. 인지적 마찰을 통해 자신의 세계에 대해 사고함과 동시에 모델에 중요한 가정을 탐구하고 실제의 어떤 측면이 명확히 되고 단순화되는지를 탐구하는 것이 모델링 학습의 가장 중요한 측면임이 자명하다.

III. 수학적 모델링에 관한 연구

1. 수학적 모델링의 의미

실세계나 일상 문제의 사용을 통해 실제 상황에서 응용해 봄으로써 수학적 개념과 절차의 유용성을 이해시키고 강화시키는 것이 수학교육의 강력한 학습방법으로 강조되어 오고 있다. 이를 위해 모델링 활동으로서 수학을 학습하는 것이 유용한데, 모델링 학습은 모델화 된 상황의 복잡성을 이해할 수 있고, 상황에서 분리되는 현실화된 모델을 만들고, 표현의 다양성을 가지고 수학적 모델을 구성하고 해결한 후 해가 가진 잠재적 의미를 인식할 수 있게 한다.

Noss와 Hoyles(1996)의 지적처럼 모델링 과정은 탈배경화를 통한 추상화 과정이고, 인지적 활동의 더 높은 영역으로의 향상을 지향한다. 그들은 한 단계에서 다른 단계로 단순히 진보하기 보다 실제와 이론 사이에서 교육적 관계를 세우는 것으로 모델 수립을 생각해야 한다고 제시했다. 또한 개인 학습자를 위한 도전은 활동과 경험 사이에 다면성을 가진 연결을 구성하는 것으로 추상화 과정이 경험의 실제 문화의 부분이 되는 교육환경 계획을 강조했다. 실제와 추상화된 수학 모델 사이의 구체적 상호작용이 잘 형성될 때에 경험에 의해 창조된 의미가 Noss등의 제안처럼 인지적 수준의 진보를 이루게 될 것이다.

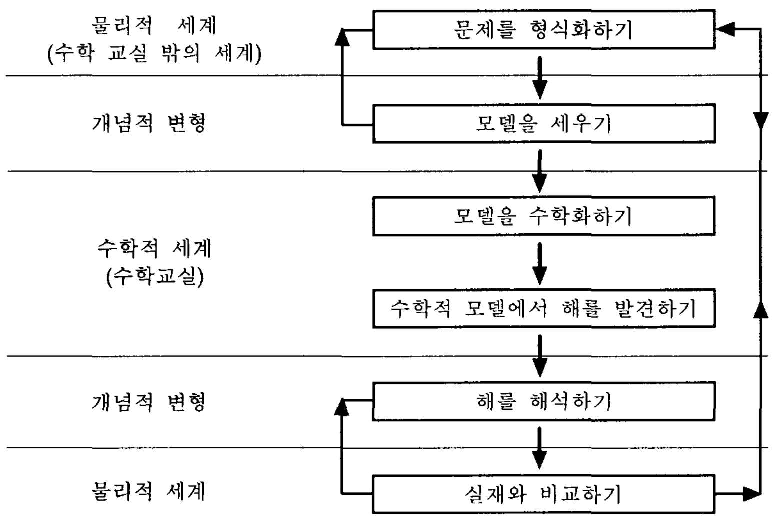
Freudenthal(1991)에 의하면 이상화의 의미에

서 모델링에 관심을 두어서 실제적이 되기에는 너무 복잡한 수학이론으로 차지되는 복잡한 현상을 단순화하거나, 특수한 수학 이론으로 접근 가능한 복잡한 현상을 단순화하기 위해 수학적 모델링이 사용될 수 있다. 즉 모델의 필수불가결성을 사람들이 의식하지 못하기 때문에 중재자로서 모델의 역할과 수학화의 한 측면으로서의 모델링의 역할을 강조하고 있다.

Freudenthal이 말하는 수학화 과정의 강조와 같은 시각으로 Niss(1991)는 선-수학적 모델 계획단계, 수학화 단계, 타당화 단계로 수학적 모델링을 설명하고 있다. 선-수학적 모델 계획 단계에서는 수학을 외적 상황에 적용하기 위해 상황을 구조화하고 정확한 용어로 고려된 측면과 대답해야 할 문제를 구체화함으로써 상황이 단순화되고 이상화되고 다양하고 명백한 암묵적인 가정과 조건이 상황에 부과되는 단계이다. 수학화 단계는 선-수학적 모델에서 가장 중요한 것으로 확인된 요소와 관계를 수학적 대상과 관계로 번역하는 단계이다. 또한 외적 수학적 상황에 대해 요구된 질문들이 수학적 질문들로 번역된다. 셋째 단계인 타당화 단계는 모델 내에서 연구가 완성되었을 때 그 결과가 역 번역에 의해 외적인 수학 상황과 관계된 결과로서 해석된다. 그때 모델은 타당해야 한다는 것이다. 타당화 과정은 가장 복잡한 일인데 왜냐하면 그 과정은 모든 과학에 내재한 철학적, 기술적, 실제적 어려움을 수반하기 때문으로 보고 있다.

위에서 고찰한 모델링 과정은 모두 실세계 상황의 적절한 특징을 결정한 후 상황을 모델화 하고 모델화 된 상황의 특성에 대한 분석과 추론을 통해 수학적 모델을 만들고 추상화와 형식화를 통해 수학적 해를 구한 후에 조작의 결과를 상황에 적합한 지에 대해 반성해보는 단계를 거치고 있다. 이러한 복잡한 과정을 거치는 모델링 활동을 도식화한 것을 <그림 1>에서 정리해 볼 수 있다.

이상에서 살펴본 관점들을 반영하여 모델링 단계를 종합해 보면 다음과 같다. 첫째 단계에서는 실세계 상황을 명확히 탐구해 상황과 관계된 본질적인 측면과 부적절한 측면을 발견하



<그림 1> 모델링 과정(English, 1999)

고 어떤 측면이 고려되고 어떤 측면이 무시될 지를 결정하는 구체화 단계이다. 이 단계에서는 상황에 관련 있어 보이는 타 학문영역에 대해서 사고하고 필요시 상황에 대한 통찰력을 얻기 위해 데이터를 수집하고 분석해야 한다. 두 번째 단계에서는 개념모델을 세우는 단계이다. 모델의 개념적, 은유적 성질 때문에 가장 어렵고 미묘한 단계로서 모델화된 상황의 정신적 이미지를 형성하고 정신적으로 경험하려고 노력하는 과정에서 모델 내에서의 변형이 수반되는 단계이다. 세 번째 단계에서는 수학적 모델을 세우는 단계이다. 문제 언어로 문제를 형식화하고 변수에 대해 사고하고 미지의 것이 무엇인지, 기지의 것이 무엇인지를 분류하고 문제를 수학적 언어로 번역하는 단계이다. 네 번째 단계는 수학 문제를 해결하는 단계이다. 모델의 방정식을 해결하기 위해 모든 가능한 분석적 방법, 수학적 방법, 시뮬레이션 등을 사용한다. 다섯 번째 단계는 해를 해석해 실제와 비교하는 반성단계이다. 사용된 방법의 오류를 분석하고 최종 해를 문제 언어로 번역해 보아 유용한 관찰이나 데이터와 예측을 비교해 잘 일치되면 모델을 받아들이고 그렇지 않으면 가정과 예측을 관찰된 모순에 비추어 변경을 한다. 만족할 만한 모델이 얻어질 때까지 위의 과정을 계속 반복한다. 그 후 모델로부터 결론을 연역해내고 이 결론을 이전의 데이터, 부가적 데이터에 대해 시험을 한다.

학생에게 광범위한 수학교육을 제공하고 수학적인 전문직에 종사하는 소수의 사람을 위해 수학교육이 유지되어서는 안 되고 수학 자체의 영역과 바깥의 세계에서 수학의 역할과 사용을 다루고, 수학을 습득하는 것을 수학적 사실을 아는 것과 동치라고 생각하지 않는 수학적 과정의 습득이 필요하다는 취지에서 학생들에게 수학적 모델링 과정을 수행하게 하는 학습이 필요하다고 본다.

2. 수학적 모델링의 분류

앞 절에서 살펴본 수학적 모델링 과정에서는 학습자의 직관적 토대 위에서 자신의 경험을 반영하여 해결과정을 시작한다는 것을 알 수 있다. 사람들의 직관적 토대는 우선 문제를 창조하려는 활기를 제공할 뿐 아니라 문제를 해결하는 적당한 모델링 전략을 선택하는 수단을 제공한다. 그러나 모델링 과정에 내포된 전략적 복잡성에 의해 직관에 의존해서 만은 해결되지 않고 그 후에 직관적 도약을 하여 이론적이고 수학적인 근거 하에서 해결을 해야 한다. 즉 물리적인 것에서 추상적인 것까지를 다루는 이 모델링 학습과정을 Open University(1990) 에서는 세 가지 접근으로 대상(object) 모델링, 경험적 모델링, 이론적 모델링의 과정으로 제시하고 있다. 전략적 복잡성에 의해 상당한 정도의 사고가 필요하고 세 접근 모두 건전한 직관적 토대 위에서 결정되는 것으로 보고 있다.

대상 모델링은 주어진 문제 해결을 위해 다른 물리적 대상을 활용해 모델링 하는 것으로 원래 문제에서 언급한 것으로부터 다른 대상을 가지고 실제적이고 물리적으로 행하는 것을 말한다. 대상의 물리적 속성 때문에 주어진 문제 상황에서는 좋은 모델링이 될 수 있으나 다른 상황에서는 그렇지 못할 수 있고, 대상의 물리적 성질 속성에 기인한 부정확성이 야기될 수 있고 해가 왜 그런지 이유를 설명하지 못한다. 경험적 모델링은 물리적 세계에 대한 실험을 시도함으로써 관계에 대한 정보를 얻는 체계적 시도를 하는 모델링 방법으로 문제에서 나타난 관계에 초점을 맞추는 것이다. 대상 모델링과는 달리 주어진 상황을 일반화 할 수 있고, 실험장치가 없어 일상생활에서 경험적 모델링을

실험할 수 없거나 모든 이론을 실험할 수는 없지만 상상의 실험실에서 무수히 많은 실험을 실행할 수 있다. 이론적 모델링은 중요한 일반성을 보기 위해 체계적으로 전문화하는 경험적 모델링처럼 더 직접적으로 일반적이다. 실제에 대한 근사적인 것이므로 계산에서 오류가 없어도 어떤 가정을 바탕으로 하느냐에 따라 부정확한 결과도 초래할 수 있고 대수적 계산이 포함되므로 어렵다. 대부분의 수학교육과정에는 이론적 모델링을 심도 있게 가르치고 있으며 학교수학에서는 단순히 추상적인 모델링 기능을 활용하는 연습을 위한 문제를 제시하는 경우가 많다. 많은 학생에게 이론적 접근은 너무 추상적이고 비 실제적, 비 경험적으로 보이고 어려운 대수를 시도하는데 학생들을 참가시킨다(Open University, 1990).

위의 세 모델링을 보면 직관적 토대에서 시작해 문제의 성질과 요구사항, 수학적 세련화 수준에 맞는 모델링 형태를 선택하는 것이 필요하다. 학습자의 호기심을 자극해 물리적 실험이 수반되지 않는 수학적 상황에서도 무엇을 알고, 무엇을 원하는지 목표를 명백히 한 후에 머리 속에서 하는 사고 실험을 통해 경험적 모델링을 거친 후 확인된 변수들 사이의 관계에 대한 질적 탐구로 이론적 모델링 과정을 통해 해에 이르는 것이 중요하다.

Skovsmose(1994)는 반성적 지식에 대한 더 구체적인 해석을 얻기 위해 수학적 모델링을 조사했다. 수학이 형식화되는 강력한 방법으로 수학적 모델링 과정에서 수학은 실제를 다루고 실제에 들어가고 실제를 변형시켜 추상화가 현실화되는 힘을 가진 것으로 의의를 설명했다. 또한 수학적 모델링은 과학기술의 진보에서 핵심적인 문제를 구성하는 것으로 과학과 수학적 행동의 반성에 대한 토론을 가능하게 해 주는 기능을 가진 것으로 본 것이 논지이다.

Skovsmose는 축소된(pointed) 모델링과 확장된(extended) 모델링의 두 유형을 구별하고 있다. 축소된 모델링은 형식 언어로 모델링 하는 것으로 문제확인, 체계 개발, 수학화, 알고리즘화, 현실화를 포함한 해석이 포함되고, 사고화된 추상에서 현실화된 추상으로 이끄는 과정으로 논리적이고 협소한 체계 안에서 구현된 잘 규정된 문제에 초점을 두는 모델링 과정으로 언급한다. 이에 반해 확장된 모델링은 과학기술과정에 대한 토대를 제공하고 사회생활 전체 영역이나 부분이 대상이 되는 것으로 구별하고 있다. 모델링의 확장된 유형에서 수학은 사회적인 문제를 다루기 위한 기본적인 체계의 부분으로 흡수됨을 지적했다. Skovsmose는 실제를 구조화하지 않고서는 실제와 접촉할 수 없고 실제의 요소를 확인하고 이들 요소 사이의 어떤 관계가 본질적인지를 결정함으로써 실제를 보기 위한 이론적인 틀인 조직이 창조됨을 설명했다. 실제의 개념적 조직화를 모델링의 선결조건으로 본 것은 Freudenthal의 수학화 이론, De Lange의 개념적 수학화에서의 시각과 같다.

또한 수학적 모델링과 관계된 모델 자체의 기초를 구성하는 개념 체계 구성의 복잡성을 은폐하지 않고 선험적 이해의 본질을 확인하는 것이 반성을 위한 주된 과제임을 강조했다. 즉 이 관점은 모델을 구성하기 위해 필요한 수학적 지식, 모델의 구성 방법에 대한 과학 기술적 지식, 모델의 본질에 대한 개념 틀과 문제에 대한 해 자체가 아니라 문제 자체를 이해하기 위해 취해진 인식론적 단계, 즉 메타수준에 있는 지식인 반성적 지식으로 수학 교수와 학습이 이루어지는 것으로 보고 있는 것이다.

Skovsmose는 모델링 과정을 통해 네 가지 다른 상황의 측면을 확인할 수 있음을 강조했다. 첫째는 문제 확인을 할 수 있다. 개념체계

의 틀 내에서 문제가 재정의되고 체계적 언어로 서술된 문제를 다루기 위해 수학을 적용할 때에 재형식화를 하게 된다. 즉 수학적 모델을 사용할 때에 자연언어로, 체계적 언어로, 수학적 언어로 변형해 나감으로써 문제해결의 효율적인 수단으로 수학적 모델링 과정을 거치게 되는 것이다. 둘째는 과학기술적 활동에 이론적 근거를 제공하는 논증의 구조를 확인 할 수 있다. 수학적 모델링은 문제설명과 해결의 언어 뿐 아니라 해결 과정의 논증적 측면도 변화시킬 수 있다는 것이다. 셋째는 비평과 수정을 위한 기초를 확인할 수 있다. 수학의 언어가 제시한 행동을 검토하고 문제 영역에서 알고리즘으로, 다시 자연언어로의 탐구 과정을 수반한 수행에서 비평과 반성이 수행된다는 것이다. 넷째는 가능한 과학기술적 행동의 범위를 확인할 수 있다. 모델링 과정은 상황에 영향을 미치기 때문에 모델링 과정에 대한 반성은 모델링 과정이 과학기술적 탐구 과정의 주요 측면, 즉 문제확인, 기술적 활동을 위한 이론적 근거, 비평을 위한 기초, 과학기술적 처리의 열린 범위에 어떤 효과를 가졌는지에 대한 연구를 포함한다는 것이다.

이상에서 고찰한 것을 반영할 때에 고정되고 고립된 형식체계로 받아들이는 수학적 지식이 아니라 발달 과정을 조명하려는 자세를 가지고 수학적 모델에 선행되는 개념적 실제를 확인하려는 행동이 수반되고, 수학적 모델링이 문제해결 과정에 영향을 주고, 수학적 형식화의 본질을 포착하게 하고, 수학의 형식화하는 힘을 확인하게 하는 비평과 반성을 위한 기초에 영향을 줄 수 있다는 점을 인식할 때에 모델링 학습의 의의를 수학 교수·학습에 반영할 수 있을 것이다.

3. 수학적 모델링 학습의 교육학적 의의

가. 교육적 관점

수학적 모델링 학습이 수학교육에 도입되었을 때 기초 기능이 최소화되어 기본적인 기능 학습이 이루어지지 못한다는 우려가 있을 수 있으나 모델링 학습이 기초를 무시하고 고등적 기능만을 수행한다는 것은 모순이다. 기본적인 개념적 이해를 가지고 내용을 깊이 있게 사고하고 기초 기능을 잘 수행할 수 있어야 그 후에 심층적인 이해를 갖게 되는 것이다.

그러나 기초 기능만을 강화하고 교육 시간을 기초 기능학습에 많이 소요하는 것은 교육과정이 상위 중등 수준에 이르렀을 때에 고등 수준으로의 전이가 어렵기 때문에 알고리즘적 표준 규칙과 기계적 연습, 고립된 경험에서 초래되는 알고리즘의 무분별한 사용을 줄여 사고전략에 초점을 맞춘 교육이 이루어져야 한다(De Lange, 1996).

Lesh와 Lamon(1992)은 학생이 학습해야 할 가장 중요한 수학적 대상은 고립된 사실적·절차적 규칙이 아니라 실세계를 구성하고 이해하는데 필요한 수학적 모델로 보았다. 그들이 제안하는 수학적 모델 학습은 실제적인 수학교육으로 재생주도의 산술교수를 초월한 교수를 주장하는 것으로 Streefland(1992)가 사고전략을 수학교육의 목표로 보아 기능과 완성된 지식의 결과적 산물을 강조하는 재생적 학습에서 구성적 학습으로의 목표 전이를 강조한 것과 같은 시각이다.

수학적 모델링 학습은 한 상황에서 학습된 기능이 다른 상황에서 받아들여지지 않을 수 있다는 인식을 하고 탈 배경화된 기능의 교수, 사실에 대한 지나친 강조에서 벗어나 복잡한 문제해결과 응용을 지향한다. 따라서 수학적 내용조직 방식에서 수학의 구조화된 통합을 지향하고 수학 구조의 부과에서 학습자 스스로

실제에 대한 분석을 통한 수학 구조를 창조하게 하는 것이 수학적 모델링 학습의 중요한 의의이다. 또한 지식의 요소가 순차적으로 분석되어 연결성이 파괴되고 구획화로 인해 개념과 절차 사이의 연결성이 파괴되고 지식이 상황과 분리되어 가르쳐지는 것을 지양하고, 단편적인 지식보다는 교과 내·외적으로 구조적으로 통합된 지식을 학습하는 중에 학습한 수학과 실세계를 관련짓고, 수학내의 영역들 사이의 관련성을 인식해서 수학을 응용하고, 타 교과와의 상황과 연계해 잘 구조화된 지식과 기능을 소유하게 되는 것이 강조되어야 할 것이다.

나. 교사 관점

실제에서 시작하는 수학 교육은 교수를 더 복잡하게 만들 수 있다. 문제해결과 수학외적 세계로의 참조는 교육을 더 열려지게 만들고 교사를 더 노력하게 만든다. 교사와의 조화에서 교실은 최적의 결과를 얻고 상호작용의 구성, 개인과제, 그룹과제, 교실토론, 학생발표, 교사발표로 수업이 이루어지게 된다. 모델링 활동에서 교사와 학생은 한 가지 옳은 답, 다른 옳은 답, 다른 전략을 가지는 문제에 직면해 한 수준 이상의 수학적 사고를 포함하는 전략의 가치를 토론하는 상황 속에서 학습이 이루어진다.

교사는 모든 내용, 목표, 수준을 포함하는 평가 자료를 설계하고 과제를 점수화 하는데 대한 조언을 제공해야 한다. 많은 교사들은 그들이 스스로 학습했던 주제로부터 취해지지 않는 응용된 예제들을 다루게 되므로 교육에 적합한 응용과 모델링 예시를 알아서 실제 학급에 적용하고 세부적으로 지도할 준비를 위한 노력을 해야 한다. 또한 교사는 학생이 질문하고 자신의 아이디어를 표현할 자유를 보장하는 열리고 비 형식적인 교실 환경을 학습자의 아이디어를 받아들이고 학습자가 추측하고 가설을 세우게 고무해야 한다.

수학적 모델링 학습에서는 지도 역할보다는 인지적 코치로서 학습자의 정신적 표상에 대해 가능한 많은 것을 알고 수행을 개선시키려는 노력이 중요하다. 교사 자신이 수학적 모델링 학습 지도에 앞서 모델링 문제 해결자로서 유능함과 경험을 가지고 있어 적절히 중재할 시기를 결정해서 조언을 해 주는 역할과 학습자의 사고 과정을 이끌어내어 진보를 촉진하는 역할, 교육과정과 모순이 없는 지적 탐구 가치가 있는 적절한 과제와 교실 환경을 구성하는 역할이 무엇보다도 선행되어야 한다.

다. 학습자 관점

실세계 상황에 기반을 둔 수학적 모델링은 그 과제가 너무 개방적이어서 학습자에게 어려움을 주거나 수학교육 목표가 모호해 진다는 사실에 직면할 수도 있다. 그러나 De Lange (1996)의 언급처럼 문제가 너무 실제적이고 개방적이어서 목표가 후에 재구성될 수 있기 때문에 처음에는 목표를 정확히 알지 못하는 것이다.

모델링 학습에서는 학습자가 자신의 인지적 개념 구조를 가지고 교사에 의해 전달되는 지식을 적극적으로 해석하는 것을 지향하고 문제해결 단계가 다단계를 취하고 해결이 된 후에 그 해의 의미를 반성해 보는 과정을 거치므로 모든 학습이 끝난 후에 목표가 더 확실해지고 학습자 스스로 그 목표에 동화되었음을 느낄 수 있다. 이러한 학습과정은 그룹내의 활동이나 교사와의 의사교환을 통한 상호작용이 중시되어 학습자는 모델수립자, 이론 수립자로서 그 역할을 하는 중에 교육목표를 달성하게 되

는 것이다.

Streefland(1992)의 지적처럼 사회적 활동으로서의 상호작용 교수와 학습을 통해 해결이 병행되고 아이디어가 교환되고 다른 도식 수준에 있는 접근이 비교되고 논거가 비판·논박·수정·지지되고 학습 과정이 타협될 수 있는 것이다. 상호작용은 이렇게 반성을 촉진하는 사회적 학습환경을 만들어 학습자의 아이디어, 비형식적 절차·전략이 점진적인 수학화 활동으로 발달되게 한다는 것이 그의 논지이다.

수학적 모델링 학습은 수학의 구성과 참조를 중시한 실제적인 상황에서 시작하는 활동이므로 다양한 집단이 함께 수행할 때 수학적 의사소통으로 자신의 사고를 명료화하고 사회적·인지적 마찰이나 모순에서 초래되는 갈등을 해결해 나갈 수 있을 것이다.

라. 테크놀러지 사용 관점

테크놀러지는 더 나은 수학교육을 향해 진보하게 도와주고 교실경험을 위한 더 실제적 응용이 가능하게 만든다. 또한 문제해결자는 틀에 박힌 계산에서 벗어나 스프레드쉬트나 그래프 등의 도움으로 어떤 정보가 고려되는지, 어떤 관계나 패턴이 적절한지, 정보가 해석되는 방법이 무엇인지를 판단하고 이 과정 중에 유용한 정보에 대해 사고하는 방법을 구성하는 개념적으로 지향된 활동에 초점을 맞추게 되는 것이다.

그러나 교사가 테크놀러지를 사용하는데 있어 직면하는 장애를 해결할 때만이 테크놀러지는 효과적인 도구로서의 역할을 하게 된다. De Lange(1996)는 교사가 테크놀러지를 사용하는데 있어 직면하는 장애를 다음과 같이 제시하고 있다.

첫째, 개념적 이해에서 본질적 이득을 알지 못할 수 있다. 그래프를 그리는 도구나 계산도구 같은 컴퓨터 사용이 둘째 장애에 직면한 문제를 완전히 정당화 하지는 못한다. 둘째, 컴퓨터의 사용으로 일어나는 논리적인 문제가 있다. 셋째, 소프트웨어는 혁신적이었으나 교육철학은 매우 전통적일 수 있다. 넷째, 교실이 적합한 하드웨어를 가져야 한다. De Lange는 학생과 교사사이, 학생사이에서의 상호작용, 정보테크놀러지를 사용하는 학생과 사용하지 않는 학생을 위한 모델 개발이 미래의 중요 연구 문제이므로 응용과 모델링, 개념적 추론, 응용추론에 컴퓨터가 유용하다고 교사들이 생각하기를 추천했다.

Lesh와 Lamon(1992)도 실제적인 도구와 자원을 이용해 학습환경이 구성될 때 참된(authentic) 수학적 수행이 가능함을 제시했다. 실제적인 상황에서 시작하는 수학학습은 휴대용 계산기, 컴퓨터, 참고도서, 동료, 교사 등의 실제적인 유용한 도구와 자원의 촉매역할을 통해서 그 창조가 촉진될 수 있음을 강조했다. 모델링 학습의 문제 상황은 인위적이지 않고 실제적인 면이 강하고 유용한 정보를 수집·조작하는 대안적 수준과 방법을 탐구해야 하며 데이터를 해석하고 대안적 추측의 적합성을 판단하고 실행된 절차를 모니터·평가하는 활동들을 포함하고 있으므로 실제적인 자료들을 이용해서 학습환경이 구성될 때 모델링 학습의 의의를 반영한 학습이 교수·학습이 이루어질 것이다.

마. 수학적 모델링 학습 평가 관점

교육결과에 대한 변하는 예측은 인간 본성의 비 행동주의적 관점을 반영하게 되었고 학습자는 정형적 기능이나 절차의 기억이 아닌 더 복잡한 사고방식을 필요로 한다는 인식을 하게 되었다. 최근 구성주의 철학의 대두는 학습관

에 많은 변화를 가져왔고 이러한 변화에 의해 교육평가의 성격도 변화되고 있다. 새 평가 목표는 고등사고 기능인 추론 기능, 의사소통, 비평적 자세의 개발을 강조해서 '사고' 교과 과정을 지향한 '사고' 평가에 초점을 맞추어 변하고 있다. 이러한 평가의 목표를 반영하여 모델링 학습을 이행할 때에 주된 장애 중 하나는 적합한 평가 도구의 유용성일 것이다. Lesh와 Lamon(1992)은 학생이 개념적 구상을 하고 개념적 전이를 하는 것을 돕는 것을 평가 프로그램의 중요 기능으로 보고 세 가지 평가 목표를 제시하고 있다.

첫째, 학생이 다양한 문제해결 환경에서 예측하고 설명하기 위해 모델을 사용할 때 모델의 정확성, 복잡성, 완전성, 유연성, 안전성을 결정하기 위해 학생이 구성한 모델의 특징을 조사해야 한다. 둘째, 학생이 제시한 정보의 양을 시험하는 것을 초월해야 한다. 중요한 규칙성에 대해 만들어진 타당하거나 타당하지 않은 추측을 확인하고, 감지한 정보의 페턴의 성질을 평가해야 한다. 셋째, 개념적·절차적 증폭자를 제공하는 강력한 모델을 구성하게 도와야 한다.

Lesh(1990)는 모델링 학습을 통해 교육에 통합되는 평가를 위해 교사가 알아야 할 중요한 것을 다섯 가지로 제시했다. 첫째, 중요한 개념틀이 실제에 부과되고, 실제에서 단순히 끌어낼 수는 없다. 둘째, 한가지 틀 이상이 주어진 현상 해석에 유용하다. 셋째, 다른 틀이 주어진 정보를 명확히 하거나 왜곡할 수 있다. 넷째, 한 모델이 부분적으로나 전체적으로 다른 모델에 속한다는 의미에서 유용한 모델이 연쇄적이고 계층적으로 관계된다. 다섯째, 주어진 틀이 안정되면 다른 틀로의 전이가 어렵다.

이 제안에서 보듯이 Lesh는 개념적 전이는 인지성장에서의 개념 구성만큼이나 중요하고 학습자가 그러한 개념적 전이를 준비할 때 결정을 돕는 것이 뛰어난 평가 프로그램의 가장 중요한 기능임을 제안했다. 따라서 구 모델에서 신 모델로의 개념적 전이에서 대안적 모델을 비교·대조하고 다양한 개념들의 발달차원에 따른 능력과 연계되는 평가와 모델 전이를 도울 수 있는 평가가 중시됨을 강조했다.

Lesh와 같은 시각에서 Goldin(1992)은 수학적 아이디어를 잘 이해하지 못했거나 학생이 수학적 개념을 이해한다는 것의 의미에 대한 좋은 인지적 모델을 가지지 못한 교사가 고등사고 평가를 위해 비전통적인 시험도구를 사용할 때는 시험을 위한 지도를 성공적으로 할 수 없음을 강조했다. 그의 제안은 의미 있는 수학학습과 이해를 평가하기 위한 틀의 토대로 인지모델의 필요성이 강조되어야 함을 의미한다.

모델링 학습은 언어적, 상황적 문제서술에서 시작해 구문론적 표현체계를 이해한 후 상상적, 발견술적 인지 능력을 통해 형식적, 기호적 표현체계로 전이하게 되는 학습과정을 내포하므로 Goldin이 제안한 다섯 가지 인지적 표현체계의 학습을 가능하게 해 준다. 이러한 복잡한 인지적 표현체계가 포함된 유의미한 모델링 수학학습을 효과적으로 평가하기 위한 새 평가 목표와 방법의 이해를 개발하는 것이 중요하다. Goldin의 연구와 같은 수학적 사고에 대한 연구와 이론이 효율적 평가기술의 토대가 되어 넓고 다양한 새 평가 기술을 개발할 필요가 교육자에게 제시된 과제일 것이다.

위의 고찰을 반영해 볼 때 모델링 학습이 이루어지는 중에 교육에 통합되는 평가는 학습자의 가치 있는 경험을 위해 고안되어 교사는 학습자의 성취와 능력을 보이는 활동에 초점을 맞춘 교육에 많은 시간을 투자함으로써 학습자를 위한 높은 질의 수학의 본질, 실제적인 문제해결의 본질을 명확히 하여 이를 교육에 피

드백 해 학생과 교사 모두를 위한 교육활동의 기반을 형성하는 평가활동에 초점을 맞추어야 할 것이다.

Ⅳ. 결론

현대 수학은 내재적 가치, 즉 수학 자체를 위한 수학이 가르쳐져서 수학학습과 지도에서 실험적이고 탐구적인 활동이 이루어지지 못해 왔다. 수학의 재발명을 중시한 실제적인 수학 교육의 창시자인 Freudenthal은 수학교육의 시작점을 실제적인 상황으로 보고, 실제의 풍부한 상황이 수학 학습의 근원으로서의 역할을 한다고 강조했다. Freudenthal(1991)은 교육은 학습자가 수학보다는 수학화를, 추상적인 것보다는 추상화를, 알고리즘 보다는 알고리즘화를, 언어보다는 언어화를 재 발명하는 안내된 재발명 과정으로 간주한다. 수학화는 인간의 창조적 활동의 하나로서 간주할 수 있는 것으로 실제적인 상황에서 직관 모델을 만들고, 직관 모델의 탐구에서 수학적 모델을 만들어 내고, 추상화와 형식화를 통해서 수학적 해를 구하고, 구해진 해를 원래 상황에서 반성해 보는 피드백 과정을 거치는 수학적 모델링 학습을 의미한다. 실상황 문제에서 시작해 탐구하는 수학 활동으로 모델을 구성하고 문제를 해결해 나가는 수학적 모델링 활동은 학생 스스로 수학적 발견을 하고 개념 사이에서 의미 있는 연결을 만들어 나가게 하며 수학 학습자로서 자신의 가치에 대한 자신감을 개발할 기회를 제공한다. 또한 수학적 행위가 알고리즘적 과정을 거쳐 형식화, 기호화되는 것이 아니라 내용과 형식의 상호작용, 심적으로 구성된 실제와 형식 세계와의 상호작용을 거쳐 정신적·생명적·발명적 표현을 가능하게 한다.

수학교육에서 모델은 추론과정에서 창조적 과정에 필요한 구조화하는 요소를 제공하며, 모델을 탐구해 얻는 발견으로부터 원래 상황의 가능한 성질을 추론해 내고, 적합성을 판단하게 한다. 교사는 불안정한 모델이 개정, 통합되어 학생들의 지식이 조직화된 체계를 창조하기 위해 고립된 사실과 기술을 다루는 것 이상이 되도록 안내해야 하며, 모델 구성 단계는 한 단계 답을 주는 것 이상이어야 하므로 학생들은 그들의 수행을 계획, 모니터, 검토해야 만하고 사고에 대해 의식 없는 사고를 하는 것을 초월해야한다. 또한 답을 정당화하는 것은 답을 제시하는 것만큼이나 중요하므로 고려된 정보의 양, 추측, 조건, 가능한 오류 근원을 확인하며 모델로부터 얻어진 답을 정당화 해 나가야 한다.

이상의 고찰로부터 수학적 모델링을 통해 진정으로 행함으로써 학습되는 과정과 많은 시도와 적용을 통한 지식의 탐색을 가능하게 하는 실험과정이 가능하게 됨으로써 수학적 힘을 소유한 능동적 사고자가 될 수 있으라는 신념을 가지고 수학교수 학습에서 모델링 활동을 촉진하기 위해 다음을 제언한다.

첫째, 실제를 반영한 상황적 맥락을 통한 문제에서 학습이 시작되어야 한다. 수학 문제가 실제를 반영했을 때에 학습자는 실제 사건을 예측해 보고 접근 가능하지 않은 사건을 머리속에서 모의 실험해 봄으로써 중요한 패턴과 규칙성에 기반해서 예측을 할 필요성을 느끼고 모델 구성의 필요성을 감지하게 되는 것이다. 따라서 실제적인 상황이 수학 학습을 위한 출발점으로 사용되어 관찰과 사고실험을 통한 경험적 특징, 연역적 방법과 계산을 통한 합리적 특징을 가진 수학의 힘을 이해하고, 필요한 수학적 모델을 탐구해 수학의 참 경험을 촉진 할 수 있는 학습 자료에 대한 연구가 필요하다.

둘째, 학생들이 너무 많거나 충분하지 않은 정보가 주어진 문제에 접하게 해서 유용한 의사결정 상황을 서술하기 위해 구성이나 설명이 필요함을 인식하게 해야 한다. 이는 중요한 의사결정 상황에서 스스로 필요한 정보를 찾아 조직하고 중요한 추측, 조건, 대안을 찾고 정당화하거나 다양한 모델을 시도해 보는 과정 중에 적합한 모델을 구성해 나갈 수 있다는 것을 강조한 시각이다. 다른 상황에서 동형적 아이디어를 인식해서 결과를 일반화 할 기회를 가질 때에 문제 상황을 잘 연계하는 모델을 만들고 문제 상황을 일반화 할 수 있는 다양한 모델을 개발할 수 있게 되어 모델 구성이 가지는 잠재적 효율성을 촉진할 수 있다. 또한 스스로 구성한 모델에서 만들어진 결과의 유용성을 평가하게 해야 한다. 다양한 해결방법, 다양한 해가 있음을 인식해 자신의 해결과정을 되돌아봄으로써 수학적 아이디어와 사용한 절차를 다시 통합해 정리하고 조직한 개념들 사이의 체계로부터 의미를 유도해내어 원래 상황과 연결하여 나갈 수 있게 된다. 과제는 특정한 주제나 문제에 관한 정보를 수집하고 분석하는 창의적인 탐구학습 활동을 행하게 하는 프로젝트법을 통해 수학적 탐구력, 창의적인 문제해결력, 비판적 사고력을 함양하게 한다. 따라서 학생들이 탐구단계, 형식화 단계, 일반화 단계를 거치는 효과적인 수학 학습 지도 방법에 대한 연구가 필요하다.

셋째, 학습자의 상황에 대한 사고에 관해 가능한 한 많은 정보를 이해해야 한다. 교실 관찰, 사례연구, 학습자와 교사와의 상호작용을 매개로 하여 학습자의 상황에 대한 사고 방법, 결과에 이르기 위해 경험한 다양한 모델링 사이클과 스스로 개발하거나 거부한 모델에 대한 많은 정보를 이해하고 있어야 효율적인 모델 도출 활동을 촉진할 수 있다. 수학교사는 타 학과의 교사와의 의사소통, 상호학습을 통해 학습 방법을 개선해 나가고 실제적인 어려움을 해결해 나가야 한다. 따라서 교사들은 간 학문적 안목을 갖는데 많은 시간을 할애해야 하고, 수학 및 수학의 여러 적용 분야에 대한 폭넓은 소양을 구비하기 위해 노력해야 한다. 또한 넓고 다양한 새 평가 기술의 개발이 필요하다. 학습자가 모델을 사용할 때에 모델의 적합성, 유연성, 완전성을 평가해 효율적인 모델 구성을 촉진하기 위해서는 임상 면담, 실험 보고서와 같은 모델링 활동 보고서 등을 통해 수행을 관찰하고, 교육과정 목표에 기반 한 가치 판단에 수학학습과 일관되고 통합된 평가가 이루어야 한다.

넷째, 테크놀러지의 사용으로 수학적 아이디어를 가시화 할 수 있게 하고 물리적 시뮬레이션을 통해 맹목적인 계산이 아니라 광범위한 탐구를 가능하게 해서 가능한 많은 실제적인 상황을 수학의 도움으로 모의실험할 수 있게 한다. 모델링 학습의 문제 상황은 인위적이지 않고 실제적인 면이 강하고 유용한 정보를 수집·조작하는 대안적 수준과 방법을 탐구해야 하며 데이터를 해석하고 대안적 추측의 적합성을 판단하고 실행된 절차를 모니터·평가하는 활동들을 포함하고 있으므로 실제적인 자료들을 이용해서 학습환경이 구성될 때 모델링 학습의 의의를 반영한 학습이 교수·학습이 이루어질 것이다.

참고문헌

권성룡·조완영(1998). 열린수학교육과 모델링. 대한수학교육학회 논문집, 8(2), 663-677.

권기석·박배훈(1997). 고등학교에서 수학적 모델링에 관한 연구. 한국수학교육학회지, 수학

교육, 36(2), 149-159.

김수미(1993). 중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰. 서울대학교대학원 교육학 석사학위 논문.

정은실(1991). 응용과 모델 구성을 중시하는 수학과 교육과정 개발 방안 탐색. 한국수학교육학회지, 수학교육, 30(1), 1-19.

주미경(1991). 모델 지도에 관한 고찰. 대한수학교육학회 논문집,1 53-61

홍정희(1995). 수학적 모델링을 활용한 수학탐구 수업 효과의 고찰. 이화여자대학교 대학원 교육학 석사학위 논문.

홍정희 · 송순희(1995). 수학적 모델링을 활용한 수학탐구 수업 효과의 고찰. 한국수학교육학회지, 수학교육, 34(1), 83-96.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, application, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 39-68.

Carreira, S. (1997). Metaphoric thinking and applied problem solving: Implications for mathematics learning. *21th Conference of the Internatoinal Group for Psychology Mathematics Education. Vol(2)*, 129-136

DiSessa, A. (1987). Phenomenology and the evolution of intuition. In C. Janvier (Ed.), *Problem of representation in the teaching and learning mathematics.* Lawrence, Erlbaum Associates Publisher.

English, C.(1999). Modelling for the new millennium. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse, (Eds.), *Rethinking the Mathematics Curriculum.* The Falmer Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing.* Preface to a Science of Mathematics Education. D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1987). Mathematics starting and staying reality. In Wirszup, I., & Streit, R. (Eds.), *Development in school mathematics education around the world (Vol.1).* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A. (1992). Toward an assessment framework for school mathematics. In Lesh, R. & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics.* The American Association for the Advancement of Science.

Lange, J. D. (1996). Using and applying mathematics in education. In A. J. Bishop et al. (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in mathematical problem solving. In R. Lesh, & M. Landau, (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press.

Lesh, R. (1990). Computer-based assessment of higher order understanding and prcesses in elementary mathematics. In G. Kulm, (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics.* The American Association for the Advancement of Science.

Lesh, R., & Lamon, S. J. (1992). *Assessing* *authentic mathematical performance*. In R. Lesh, & S. J. Lamon, (Eds.), Assessment of authentic performance in school mathematics. The American Association for the Advancement of Science.

Lesh, R., & Kelly, A. E. (1994). Action-theoretic and phenomenological approaches to research in mathematics education: Studies of continually developing experts. In R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. H. (1990). Modelling: What do we really want student to learn. In D. Blane, & M. Evans (Eds.), *Mathematical modelling for the senior years*(pp.7-21). The Mathematical Association of Victoria Clunies Ross Ho-Use, Parkville: Acacia Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Principle and standards for school mathematics: Disscussion Draft.*

Noss, R., & Holyes, C. (1996). *Window on mathematical learning culture and computer*. Kluwer Academic Publishers.

Open university (1990). Some approaches to modelling. In D. Blane, & M. Evans, (Eds.), *Mathematical modelling for the senior years*(pp.43-55). The Mathematical Association of Victoria Clunies Ross Ho-Use, Parkville: Acacia Press.

Open university (1990). Analyzing the model. In D. Blane, & M. Evans, (Ed.), *Mathematical modelling for the senior years* (pp.56-65). The Mathematical Association of Victoria Clunies Ross Ho-Use. Parkville: Acacia Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically.* London: Routledge & Kegan.

Skovsmose, O. (1994). *Toward a philosophy of critical mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1992). Thinking strategies in mathematics instruction: How is it possible? In Lesh, R., & Lamon, S. J. (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics.* The American Association for the Advancement of Science.

A Study of Exploration- Oriented Mathematical Modeling:

Shin, Eun-Ju (Ewha Woman's University)
Kwon, Ohnam (Ewha Woman's University)

Modern society's technological and economical changes require high-level education that involve critical thinking, problem solving, and communication with others. Thus, today's perspective of mathematics and mathematics learning recognizes a potential symbolic relationship between concrete and abstract mathematics.

If the problems engage students' interests and aspiration, mathematical problems can serve as a source of their motivation. In addition, if the problems stimulate students' thinking, mathematical problems can also serve as a source of meaning and understanding.

From these perspectives, the purpose of my study is to prove that mathematical modeling tasks can provide opportunities for students to attach meanings to mathematical calculations and procedures, and to manipulate symbols so that they may draw out the meanings out of the conclusion to which the symbolic manipulations lead.

The review of related literature regarding mathematical modeling and model are performed as a theoretical study. I especially concentrated on the study results of Freudenthal, Fischbein, Lesh, Disessea, Blum, and Niss's model systems.

We also investigate the emphasis of mathematising, the classified method of mathematical modeling, and the cognitive nature of mathematical model. And We investigate the purposes of model construction and the instructive meaning of mathematical modeling.

In conclusion, we have presented the methods that promote students' effective model construction ability. First, the teaching and the learning begins with problems that reflect reality. Second, if students face problems that have too much or not enough information, they will construct useful models in the process of justifying important conjecture by attempting diverse models. Lastly, the teachers must understand the modeling cycle of the students and evaluate the effectiveness of the models that the students have constructed from their classroom observations, case study, and interaction between the learner and the teacher.