大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 179-191. July 2001

확률 개념 도입의 맥락과 난점

서 동 엽*·홍 진 곤**

I. 서론

우리는 명시적이든 암묵적이든 간에 다양한 상황에서 확률적 사고를 경험하면서 살아간다. 승용차를 이용하여 A 지점에서 B 지점으로 가고자 하는데 두 가지 길이 있다면 우리는 여러 가지 정보에 근거하여 어느 길로 갈지를 결정하게 된다. 이 때 주로 의존하게 되는 정보는 동일한 시간대에 A 지점으로 B 지점까지 갔던 과거의 축적된 경험이며, 이것에 비추어 어느 길로 가는 것이 더 빠른지를 결정한다. 또한, 가는 길에 주유소를 들러야 한다면 주유소를 이용할 수 있는 길을 선택하게 될 것이며, 두 길 모두 주유소가 있다면 소요 시간과 주유소를 이용하는 데 있어서 편리성 등을 고려하여 판단하게 될 것이다. 이와 같은 상황에서 어느 한 가지 길을 결정했을 때 그 길을 이용하는 것이 유리하다는 보장은 할 수 없다는 것이 확률적 사고의 특징이 될 것이다. 즉 동일한 시간대의 교통량에 대한 과거의 정보와 지리 정보를 종합하여 최선의 판단을 내린다고 하더라도 이 판단이 옳을 가능성이 틀릴 가능성보다 높다는 것만이 확률적 사고의 본질이 될 것이며, 가능성이 높다는 것만으로 절대적인 보장을 할 수는 없다는 것이다.[1)]

이렇듯 확률은 생활과 밀접하게 관련되어 있는 수학의 한 분야이면서도, 확률에 근거한 판단이 확실한 보장을 제공해 주지는 않는다는 점에서 다른 수학 분야와는 차이가 있으며 그 지도상의 어려움을 유발시키는 원인이 되기도 한다. 예를 들어 사각형의 대각선의 개수가 2개라는 사실은 어떠한 볼록 사각형에 대해서도 성립하는 성질이며 언제나 확인할 수 있지만, 주사위를 던졌을 때 1의 눈이 나올 확률이 1/6이라는 사실을 경험적으로 확인할 방법은 없다. 확률 개념에 대하여 통계적, 실험적 접근이 아니라 조합론에 근거한 이론적인 접근 방식을 채택하고 있는 우리 나라 교육 과정에서는, 확실하지 않고 눈으로 확인할 수 없는 개념을 이론적으로 다룬다는 점에서 학생들의 인지적 갈등을 유발할 가능성이 다분히 있는 것이다. 또한, 확률 분야의 이론적 기반이 다른 분야에 비하여 상대적으로 취약하고 이로 인하여 여러 가지 역리를 포함하고 있다는 것도 확률 지도에 있어서 어려운 점으로 지적되곤 한다.

본 논문에서 다루고자 하는 문제는 주로 확률 개념의 도입 과정에서 발생할 수 있는 난점에 대한 것으로, 확률 개념 지도 장면에서 발생할 수 있는 개연적인 학생들의 인지적 갈등

* 춘천교육대학교
** 경기여자고등학교

1) 여기서 '절대적인 보장'이라는 말은 학교수학의 맥락에서 이용한 것이다. 사실, Lakatos의 준경험주의와 같은 입장에서는 수학의 어떠한 내용도 절대적으로 참임을 보장할 수는 없다.

을 알아보고, 이를 해소하는 데 도움이 될 수 있을 것으로 판단되는 몇 가지 아이디어를 탐색해 보고자 하는 것이다. 이를 위하여 먼저 확률 분야의 특성을 살펴보고자 하며, 특히 수학의 다른 분야와 속성을 비교해 보아 확률 분야만이 갖는 고유의 속성과 확률 분야에서 문제시되고 있는 내용을 알아본다. 다음으로, 확률 분야의 특성과 관련하여 현행 확률 개념의 도입에서 발생될 수 있는 난점을 알아보고, 이를 해결할 수 있는 아이디어를 제시해 보기로 한다.

II. 확률 분야의 특성

이 장에서는 확률 분야의 특성을 두 가지 측면에서 살펴보기로 한다. 하나는 수학의 다른 분야와 비교되는 특성이며, 다른 하나는 확률 분야의 기초 이론이 갖는 특성이다.

1. 수학의 다른 분야와 비교되는 특성

어떤 사건이 일어날 가능성을 측정하는 수학적 수단인 확률은 다른 수학적 내용과 마찬가지로 현실 문제나 과학적인 문제의 해결을 위한 중요한 사고 도구이며 의사소통을 위한 강력한 수단이 되지만, 인과적이고 결정적이며 논리적인 특성이 강한 수, 도형, 함수에 관한 수학적 사고와 다르다. 인과적 사고가 편안한 느낌을 주고 논리적 사고는 명쾌하며 기하학적 사고는 이미지를 수반하는 데 비해 확률적 사고는 반직관적이고 오류가능성이 높으며 이해하기 어려운 특성이 있어, 분석과 연구를 요하는 많은 교육적 문제를 내포하고 있다(우정호, 1998).

확률적 사고가 반직관적이고 오류가능성이 높다는 것은 자명해 보인다. 이는 우리 나라 중학교 2학년 학생 6000여명이 참가하였던 제3차 수학·과학 성취도 국제 비교 반복 연구(TIMSS-R)의 한 문항의 결과에서도 드러난다. '정상적인' 동전을 4회 던져서 계속 앞면이 나왔다고 할 때 5번째 던질 때에는 어떻게 되겠는지를 묻는 '선다형' 문항에 대하여 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같다고 답한 학생이 약 65% 정도에 머물고 있어, 전체 문항에 대한 평균 정답률인 73%보다 낮은 결과를 보여 주고 있다(박정 외, 2000). 이는 동전이 4회 연속 앞면이 나왔다는 사실에서 심정적으로 앞면이 잘 나오는 경향이 있는 동전이라고 생각하게 되어 5회 째에도 앞면이 나올 것이라고 생각하게 되거나, 아니면 전체적인 균형을 생각하여 5회째에는 뒷면이 나올 가능성이 많다고 생각하는 학생들이 적지 않게 있었다는 것을 의미하며 이 점에서 반직관적이라는 것이다.

하지만, 문제는 오답을 제시하는 근거가 되는 두 가지 생각이 그렇게 잘못된 것이 아니라는 점이다. 그것은 문제에서 제시하고 있는 '정상적인'이라는 말이 함축하고 있는 앞면과 뒷면이 나올 확률이 같은 동전이라는 가정 자체가 매우 반직관적인 것이기 때문이다. 처음 만들 때부터 정상적인 동전이란 존재하지 않으며, 동전을 정확히 분석해 본다면 원형은 정확히 대칭으로 만든다고 하더라도 앞면과 뒷면에 새겨지는 무늬의 무게에서 차이가 있을 수도 있어서, 어느 한 쪽면이 나올 확률이 정확히 ½이라고 말하기는 쉽지 않을 것이기 때문이다. 그렇다면, '정상적인' 동전이란 추상화된 대상으로 보자는 입장이 있을 수도 있다. 이는 초등학교에서 다루는 기본 개념인 수나 도형이 각각 현실 세계에 존재하는 사물의 크기나 형상을 추상화·이상화한 대상이라는 것과 연결하여 생각하는 것이다. 하지만, 이렇게 생각한

다면 이상화되는 대상은 동전이 아니라 동전의 '정상성', 즉 앞면이 나올 확률이 ½이라는 것이며, 이는 확률 개념을 선험적인 것으로 만드는 것이다.

문제는 일어날 확률이 ½인 사건을 구체화할 방법이 없다는 것이다. '정상적인' 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률이 ½이라고 학습하지만, 동전을 실제로 한 번 던진 시행의 결과로부터 앞면이 나올 경험적 확률을 계산한 결과는 1 또는 0이다. 동전을 10번 던졌을 때 앞면이 5번이 나올 확률은

$$ {}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{252}{1024}=0.246\cdots $$

이며, 이 조차도 동전을 10번 던지는 시행을 1000번 반복하였을 때 앞면이 5번 나오는 사건이 약 246번 일어날 것임을 보장하는 것이 아니다. 컴퓨터를 이용하여 모의실험을 한다고 하더라도 던지는 회수가 커질수록 ½에 가까워 진다는 것을 보여 줄 수는 있겠지만 ½임을 직접 보여 주지는 못한다.

그래서, '정상적인' 동전을 통하여 가정되는 ½이라는 가능성은 구체화하기 어렵다는 점 때문에 심리적으로 받아들이기가 매우 어려운 개념이며, 그렇기에 동전을 던져서 앞면이 연속 4회 나왔을 때 5회 째에는 어떤 면이 나올지를 결정하는 것이 쉬운 문제가 아니라는 것이다. 특히, '정상적인'이라는 가정을 배제한다면, 위 문항은 정답이 없는 문항이다. 간단한 계산을 해 보면, 동전을 반복해서 던졌을 때 연속 4회 앞면만 나올 확률은

$$ \left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}=0.0625 $$

이므로, 유의도가 6.25%보다 크다면 5번째에도 앞면이 나올 가능성이 높다고 말할 수 있으며, 유의도가 6.25%보다 작다면 5번째에 앞면이 나올 가능성이 높다고 말할 수 없다. 즉, 유의도를 논하지 않고서 어느 한 가지 답을 결정할 수 없기에 정답이 없다는 것이다.

앞에서 언급한 구체화의 문제는 특히 초등학교에서 확률을 다른 분야와 구분하는 특징이 될 수 있다. 예를 들어 자연수 5를 구체화하여 보여 주고자 한다면 사물 5개를 제시하여 개수를 세어보게 하면 된다. 5개의 사물을 두고 개수를 세었을 때 개수에 대한 자연수 표현은 '5' 밖에 없으며, 역으로 자연수 5를 5개의 사물의 개수로 나타내는 일도 언제나 가능하다. 마찬가지로 자연수의 사칙계산 문제의 답을 구하는 과정은 언제나 구체화할 수 있으며, 항상 동일한 답을 보장한다. 예를 들어 $12\div3=4$라는 '12'라는 개수를 갖는 어떠한 사물이든 3등분하면 '4'라는 양이 된다는 것으로 보여 주는 일이 항상 가능하다는 것이다. 이는 기하 영역에서도 마찬가지이다. 현재 초등학교에서 다루어지고 있는 도형의 성질, 예를 들면 '삼각형의 내각의 합은 180°'라는 것이나 '직사각형의 대각선의 길이는 같다'는 것은 삼각형 모양이나 직사각형 모양의 구체물을 이용하여 언제나 입증 가능한 사실이다. 또한, 이러한 수학의 특성을 두고 수학의 '일반성'이라거나 '보편성'이라는 말을 쓰기도 한다(강지형 외, 1999). 그러나, 확률은 상황이 그렇지가 못하다는 데 다른 분야와 차이가 있다. 위에서 논의한 바와 같이 '정상적인'이라는 가정이 있건 없건 간에 동전을 던져서 앞면이 나올 확률이 ½이라는 것을 구체적으로 보여 줄 수 있는 방법이 없다.

2. 확률 분야의 배경 이론이 갖는 특성

확률의 개념화가 큰 진전을 이룩한 것은 1654년에 Pascal과 Fermat의 서신 왕래를 통하였다고 알려지고 있다. 두 사람이 서신 왕래를 통하여 다룬 문제는 다음과 같은 상금의 분배 문제였다(우정호, 1998).

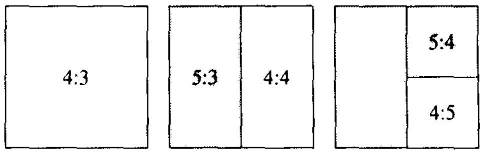
이 문제는 일련의 게임이 완결되기 전에 중단되었을 때 내기돈을 공정하게 분배하는 문제이다. 게임을 시작할 때 A, B 두 사람은 같은 내기돈을 건다. 정해진 횟수만큼을 먼저 이기는 사람이 내기돈을 모두 가지기로 한다. 그러나 두 사람 중의 누구도 필요한 횟수만큼 이기기 전에 게임이 중단될 수밖에 없는 상황이 일어났다. 만일 승자가 되기 위해서 5게임을 먼저 이겨야 하고, 게임이 중단된 상태에서 A가 4:3으로 유리한 상황이라고 하면 내기돈을 어떻게 나누어야 공정한가?

이 문제에 대하여 다음과 같이 답하는 경우를 생각해 보자.

게임을 계속 진행한다고 하면 2게임이면 승자가 가려지게 되며, AA, AB, BA, BB의 4가지 경우가 일어날 수 있다. 여기서 처음 세 가지 경우는 게임에서 A가 승리하는 경우이며, 마지막 한 가지 경우만이 B가 승리하는 경우이다. 따라서 내기돈은 3:1로 나누는 것이 공정하다.

위와 같은 풀이는 다소 전형적으로 볼 수 있는 풀이지만, 현실적인 문제점을 안고 있다. 문제가 되는 것은 위의 4가지 경우 중 1, 2번째 경우인 AA와 AB로, A가 처음에 이긴다면 게임이 끝나게 되므로 다음 게임은 필요하지 않다는 것 때문이다. 첫 번째 A가 이기면 게임은 끝나게 되며, 첫 번째에 B가 이기는 경우에만 다음 게임이 필요하다. 따라서, 경우의 수는 A, BA, BB의 세 가지이므로 2:1로 나누는 것이 공정하다고 생각할 수도 있는 것이다. 이렇게 생각하는 것에 대하여 지적할 수 있는 오류는 A와 BA, 또는 A와 BB는 같은 가능성을 갖는 사건이 아니며, 정확히 A가 다른 사건의 두 배의 가능성을 갖는다는 것이다. 하지만 이것을 어떻게 아는가?

사실, 우정호(1998)는 이 문제의 풀이를 다음과 같이 도식화하여 제시하고 있다.



(a) (b) (c)

위의 도식은 A가 일어날 가능성이 BA나 BB가 일어날 가능성의 2배가 된다는 사실을 보여주는 직관적 모델이 될 수 있을 것이다. 위의 도식에 함축된 아이디어는 우선 첫 번째에 A가 이길 가능성과 B가 이길 가능성이 같으며, B가 이긴 경우 두 번째를 생각할 필요가 있고, 두 번째에 A가 이길 가능성과 B가 이길 가능성이 같다는 것이다. 이 그림은 위와 같은 상금의 분배 문제에 대하여 가능하지 않은 경우(AA와 AB)를 생각하여 생길 수 있는 인지적 갈등을 줄여 주는 역할을 할 수 있을 것이며, 본 논문에서 고찰하고자 하는 것이 바로 이러한 아이디어를 보다 넓은 범위에 적용할 수 있는 방법을 탐색하는 것이다.

이에 앞서, 본 절에서는 위와 같은 A, BA, BB와 같은 경우에 2:1이나 3:1이라고 답하기 어렵게 만드는 확률의 문제를 다루고자 한다. 현재 학교에서 도입되고 있는 확률의 정의는 Laplace의 정의로서 "어떤 사건 A의 확률 P(A)는 시행에서 가능한 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비와 같다"는 것이다. Laplace는 이 가정을 합리화하기 위해 '이유 불충분의 원리'를 도입하였는데 이는 "구별되어야 할 충분한 이유가 없다면 구별을 지을 수 없다"는 것이다. 그러나, 우정호(1998)가 지적하고 있는 바와 같이, '이유 불충분의 원리'는 완전히 무지인 경우에 선험적으로 모든 가능한 상태의 균일 분포를 전제로 하므로, 이 원리는 무지를 지식으로 변형시키는 모호한 규칙이라는 비판을 받게 된다. 다음과 같은 두루마리 화장지를 던지는 상황을 생각해 보자.

위의 화장지를 던질 때 그림과 같이 바로 서게 될 확률은 얼마인가? 또는 던져서 바로 설 확률이 정확히 ⅓이 되는 화장지가 존재하는가? 그 이유는 무엇인가? 그림과 같은 화장지를 던질 때 일어날 수 있는 경우는 위와 같이 ① 바로 서는 경우, ② 거꾸로 엎어져서 서는 경우, 그리고 ③ 옆면이 바닥에 닿는 경우의 3가지이다. 만약 화장지가 바로 설 확률이 ⅓이 아니라고 한다면, ①의 경우와 ②의 경우에 대한 확률은 같다고 하더라도 이와 ③의 확률이 다르다고 말할 이유가 있어야 한다. 그 이유는 과연 무엇이 될 수 있으며, ①의 확률과 ③의 확률이 같아질 수 있는 조건은 무엇인가? 이 문제에 답할 수 있는 방법은 물리학의 여러 지식을 동원하여 계산하거나 수많은 모의 실험을 통하여 경험적으로 계산해야 할 것이다. 그러나, 이렇게 어떤 답을 구했을 때 그게 옳다는 것을 어떻게 보장하는가?

여기서 확률의 모순된 상황을 볼 수 있는 두 가지 문제를 보자. 첫째는 'Bertrand의 현' 문제이다(우정호, 1998).

반지름 R인 원에 내접하게 정삼각형을 그리고 그 원과 만나는 한 직선을 무작위로 그릴 때, 현의 길이 s가 삼각형의 한 변의 길이 a보다 길어질 확률은 얼마인가? 이 문제에 대하여 다음과 같이 세 가지의 풀이가 가능하다.

a) 현은 중점 M에 의하여 유일하게 결정된다. 만약 M이 반지름 $R_1 = R/2$인 원의 내부에 있을 경우, $s > a$이고, 그렇지 않을 경우는 $s \geq a$이므로,

$$P(s > a) = \frac{(\text{반지름 } R_1\text{인 원의 넓이})}{(\text{반지름 } R\text{인 원의 넓이})} = \frac{1}{4}$$

b) 하나의 지름에 수직인 현끼리 비교해 보자. 그러면 현의 중점이 원의 중심으로부터 거리가 $R/2$인 구간의 내부에 있을 때 s는 a보다 크다. 따라서,

$$P(s > a) = \frac{(\text{구간 } I\text{의 길이})}{(\text{지름})} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

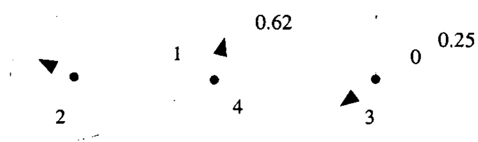
c) 현의 양 끝점을 P, Q라고 할 때, P에서의 접선 t와 현 사이의 각을 θ라고 할 때, θ의 범위는 (0, 180°)이며, $60° < \theta < 180°$이면 $s > a$이다. 따라서,

$$P(s > a) = \frac{(60° < \theta < 120°\text{인 구간})}{(0° < \theta < 180°\text{인 구간})} = \frac{1}{3}$$

위의 결과는 매우 당혹스러운 것이다. 한 문제에 대하여 세 가지의 그럴 듯한 풀이 방법이 존재한다는 것과 함께 그 결과가 근소한 것이 아니라 큰 차이를 보이고 있다는 점에서 그러하다. 확률은 일가함수이므로 위의 세 가지 방법 중 적어도 두 가지는 결함을 갖고 있다고 볼 수 있으나 그 이유를 알기 힘들고, 이와 더불어 정상적인 동전이나 주사위와 같이 그 가능성을 알기가 명확하지 않은 사건에 대한 확률을 결정하는 방법을 알기 어렵게 하는 것이다. 앞서 예를 들었던 두루마리 화장지의 확률에서도 3가지 사건의 확률이 모두 ⅓인 화장지가 존재해야 하겠지만, 어떠한 화장지가 그러한지를 유일하게 결정할 수 있을지는 의문스럽다.

다음과 같은 게임판 문제도 확률의 역리를 보여 주는 예이다(우정호, 1998).

3개의 게임판을 갖고 두 사람이 게임을 할 때 어느 것을 택하는 것이 가장 좋은가?



$$S_1 \; S_2 \; S_3 \; P(S_1 > S_2) = 0.62,$$
$$P(S_2 > S_3) = 0.25 + 0.75 \cdot 0.38 = 0.535,$$
$$P(S_1 > S_3) = 0.25$$

이 결과가 보여 주는 것은 차례로 S_2보다는 S_1을 선택하는 것이 유리하고, S_3보다는 S_2를 선택하는 것이 유리하고, S_1보다는 S_3를 선택하는 것이 유리하다는 것이다. 결과적으로 어느 것을 택하는 것이 좋은지에 대한 아무런 정보도 주지 못하는 상황이 일어나는 것이다. 어떤 사건의 확률을 유일하게 결정할 수 있다면, 그 사이에 추이성이 성립해야 하겠지만 위의 문제는 그렇지 않은 상황을 보여 주는 것이다. 이러한 상황은 확률적 사고의 어려움을 보여 주는 것으로 확률 지도에서 많은 문제를 야기할 수 있음을 시사해 주는 것이다.

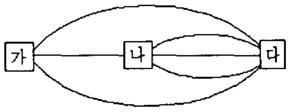
III. 현행 확률 지도의 맥락과 난점

현행 수학 교육 과정에서 확률 지도는 초등학교 6학년, 중학교 2학년, 고등학교 2학년에서 순차적으로 이루어지고 있다. 이 장에서는 초등학교와 중학교를 중심으로 확률 개념의 도입이 어떻게 이루어지고 있으며, 제 II장에서 언급한 확률 분야의 고유한 특성으로 인하여 어떠한 난점이 존재하는지를 논하여 보고자 한다.

1. 초등학교 6학년에서 확률의 도입

초등학교에서 다루는 '확률과 통계' 영역의 대부분의 내용은 통계에 관한 것이나, 6학년 2학기에서 경우의 수를 다루면서 마지막 부분에서 확률을 암묵적으로 계산해 보게 함으로써 도입하고 있다.[2] 경우의 수를 지도하면서 다루고 있는 소재는 동전, 주사위, 수 카드를 넣은 상자 등 각각의 경우에 대한 가능성이 동일한 것이 대부분이나 다음과 같은 예도 포함되어 있다(교육부, 1997 : 112).

다음 그림은 가 도시에서 나 도시와 다 도시로 통하는 길을 나타낸 것이다.



◎ 가 도시에서 나 도시를 거쳐 다 도시까지 가는 길은 몇 가지인가?

◎ 가 도시에서 나 도시를 거치지 않고 다 도시로 가는 길은 몇 가지인가?

◎ 가 도시에서 다 도시로 가는 경우의 수는 얼마인가?

위의 세 번째 문항에서 구하는 경우의 수는 5가지이다. 하지만, 이 경우의 수를 구하는데 있어서 나 지점을 거치는 길과 거치지 않는 길 사이의 미묘한 차이는, 여기서 계산하는 경우의 수가 선행하여 다루었던 동전의 앞, 뒷면이나 주사위의 눈의 경우의 수를 세는 것과는 다르다는 것을 학생들이 의식하게 할 수도 있다.[3] 뒤이어 두 가지 사건의 곱집합을 생각하는 경우의 수를 다루면서 두 개의 동전, 동전과 주사위 등의 상황과 함께 "집에서 문구점까지 가는 길이 4가지, 문구점에서 학교까지 가는 길이 3가지 있을 때, 집에서 문구점을 거쳐 학교까지 가는 모든 경우의 수"를 $4 \times 3 = 12$

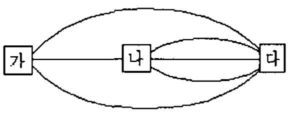
2) '확률과 통계'라는 영역 명칭은 제 7차 교육 과정에 근거한 것이다. 하지만, 초등학교 6학년에서 제 7차 교육 과정에 따른 교과서를 이용하는 것은 2002년부터이므로 제 6차 교육 과정에 따른 6-2 수학 교과서로 분석하였다. 이는 중학교 2학년에 대해서도 그러하다.

3) 앞으로 상술하겠지만, 이 차이는 결국 확률 계산의 오개념이 나타날 가능성으로 연결된다.

(가지)로 구하는 상황을 다룬다. 다음으로 순서가 있는 경우의 수와 토너먼트 게임의 수 등 다양한 경우의 수를 다루며, 마지막으로 '확률'이라는 용어를 명시적으로 이용하지 않으면서 '모든 경우의 수에 대한 특정한 경우의 수의 비율'을 다룬다. 확률에서는 먼저 동전의 면이 나오는 경우의 수에 대한 앞면이 나오는 경우의 수의 비율이 ½임을 구하게 한 후에, 주사위 던지기, 상자 속의 수 카드 꺼내기, 주머니 속에 든 색깔 있는 공 꺼내기, 동전 2개 던지기 등의 상황을 통하여 확률을 구하게 하고 있다. 확률과 관련된 상황은 모두 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 같은 사건만을 다룬다는 점에서는 공통되고 있다.

이와 같은 맥락으로 경우의 수에서 확률 개념의 도입까지 간단히 다루어지고 있으나, 다음과 같은 문제를 학생이 교사에게 질문할 때 답변하기가 매우 어려울 것으로 보인다.

가 지점에서 다 지점까지 가는 방법이 다음 그림과 같을 때 모든 경우의 수에 대하여 나 지점을 거치지 않고 가 지점에서 다 지점까지 가는 경우의 수의 비율은 얼마인가?



위의 문제에 기술된 것만을 보고 구할 수 있는 답은 2/5이다. 이는 모든 경우의 수가 5이고, 가 지점에서 다 지점까지 가는 경우의 수는 2이기 때문이다. 그러나, 교사는 위와 같은 문제를 학생이 질문해 올 때 과연 2/5가 답이라고만 알려 주고 끝낼 수 있을 것인가? 이 문제는 사실 '경우의 수' 단원의 마지막 부분에 위와 같은 비율 문제를 다루는 상황이 들어간 이유와 연관지어 생각할 필요가 있다. 5학년 2학기에서 비율을 학습하였고, 이 단원에서 경우의 수를 학습하였으므로, 경우의 수에 대한 비율을 통하여 확률에 대한 기본 개념을 암묵적으로 경험하게 하려는 의도가 이 상황에 내재되어 있기 때문이다. 하지만, 위의 문제에 2/5라고만 답하고 끝낸다면, 확률 개념과는 거리가 먼 것이며, 학생에게 유발된 인지적인 갈등을 덮어버리고, 오히려 확률에 대한 오개념을 가지게 할 우려가 있다. 그렇다고 하여 정확한 확률은

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

임을 6학년에게 설명할 수 있는 방법을 찾는 일도 쉽지는 않다.

위의 문제는 심리적인 측면까지 고려한다면 더욱 다양한 오답이 가능하다. 이렇게 답할 수도 있을 것이다. '가 지점을 출발하면서 나 지점을 통과할 지 아니면 통과하지 않을 지를 결정해야 한다. 따라서, 나 지점을 통과하는 경우와 통과하지 않는 2가지 경우가 있고, 구하는 비율은 ½이다.' 이렇게 답하는 것이 가능한 이유는 우리가 위와 같은 문제 상황에서 다 지점으로 어떻게 갈지를 결정해야 하는 경우, 세 가지 길을 대등하게 보기는 어렵다는 것이다. 오히려, 나 지점을 지나갈 지 지나지 않을지를 우선적으로 고려하고, 그 다음에 나 지점을 지난다면 (그림에서) 위의 길로 갈 것인지 아래의 길로 갈 것인지를 고려하는 것이 자연스럽다는 것이다. 아울러, 위의 문제 상황에서 나 지점을 지나지 않는 길 중 한 가지가 나 지점을 지나는 세 가지 길과 대등한 가능성을 갖는다는 것을 받아들이기도 쉽지 않을 것이다.

2. 중학교 2학년에서 확률 개념의 도입

확률 개념이 명시적으로 도입되는 시기는 중

학교 2학년이다. 분석 대상으로 삼은 한 교과서에서는 초등학교에서보다는 복잡한 여러 경우의 수를 다룬 이후에, 확률의 뜻을 도입하는데, 먼저 주사위를 10번, 50번, 100번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 관찰하여 상대도수를 구해보게 하고, 주사위를 200, 400, 600, 800, 1000번 던졌을 때 1의 눈이 나온 횟수를 기록한 표를 제시하여 1/6에 가까워진다는 것을 보여준 후에, 다음과 같이 확률 개념을 도입하고 있다(김연식 외, 1998).

> 일반으로, 어떤 시행에서 각각의 경우가 일어나는 정도가 같다고 할 때, 사건 A가 일어날 가능성, 곧
>
> $$\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{모든 경우의 수})}$$
>
> 를 이 시행에서 사건 A가 일어날 확률이라고 한다.

확률 개념의 이러한 도입 방법에 따르면, 학생들에게 동전을 던지는 활동을 경험하게 하고, 모의 실험 결과를 제시함으로써 확률 관념에 대한 직관을 제공할 뿐만 아니라, "어떤 시행에서 각각의 경우가 일어나는 정도가 같다고 할 때" 생각할 수 있는 것으로 확률을 '정의'하게 한다. 이러한 정의 방식은 대부분의 교과서에서 비슷할 것으로 생각되며 다르게 규정하기 힘든 것이 사실이지만, 학습자의 입장에서는 다소 혼란을 느낄 가능성이 있다.

그것은 처음에 동전을 던지는 활동이나 모의 실험 결과를 통하여 갖게 되는 확률에 대한 직관은 확률은 '미지(未知)의 사건'에 대한 가능성을 결정한다는 것이다. 동전을 10번, 50번 던져서 앞면이 나오는 횟수와 상대도수를 구하는 동안 학생이 자연스럽게 갖게 되는 생각은 '경험적 확률'에 대한 것으로, 확률은 경험적인 상대도수를 뜻하는 것으로 받아들이게 될 것이다. 하지만, 확률에 대한 정의를 통하여 확률에 대하여 갖는 느낌은 확률은 '기지(旣知)의 사건의 조합'에 대한 가능성을 결정한다는 것으로 바뀌게 될 가능성이 있다는 것이다. 즉, 확률이라는 것은 "각각의 경우가 일어날 가능성이 같은 사건에 대하여 각각의 경우의 조합에 대한 비율"이라고 생각하게 된다는 것이다.

여기서, 각각의 경우가 일어날 가능성이 같다는 것을, 앞서 초등학교 내용에서 다루었던 "가 지점에서 나 지점을 지나지 않고 다 지점까지 가는(이 사건을 A라 하자)" 확률과 연관지어 생각해 보자. '사건 A가 일어나는 경우의 수'는 명백하게 두 가지이다. 그러나, 이 때 '모든 경우의 수'를 5가지라고 할 수 있는가? 여기서 구하는 확률이 ⅔라고 하기 위해서는 모든 경우의 수를 3으로 보는 것이 필요하며, 이를 정당화하는 것은 확률의 정의에서 기본적으로 가정되는 "어떤 시행에서 각각의 경우가 일어나는 정도가 같다"는 것이다. 그렇다면, 가 지점에서 나 지점을 지나지 않고 다 지점으로 가는 두 가지 길의 각각과 가 지점에서 나 지점을 지나 세 갈래의 갈림길에 따라 다 지점으로 가는 경우가 일어나는 정도가 같다는 것은 어떻게 정당화되는가? 아마도 이를 정당화하는 것은 시간의 개념에 의해서일 것이다. 시간적으로 가 지점에서 먼저 세 갈래 길 중 하나를 선택하게 되고, 나 지점을 경유하여 가는 길을 선택할 경우에는 나 지점에서 3갈래 길 중 하나를 선택하므로, 동일한 시간대에 선택할 가능성으로 본다면 나 지점을 경유할 가능성은 ⅓밖에 되지 않는다는 것이다.

그러나, 이러한 설명이 확신을 부여하는 것은 나 지점에서 세 가지 갈림길이 있다는 것을 모르는 상태에서 가 지점을 출발하는 경우일 것이다. 나 지점에서 3가지 길이 있는 것을 알고 있는 상태에서 길을 간다면 자연스러운 것

은 전체 경우의 수를 5로 보는 것이며, 이것이 우리의 실제와도 연결되는 것 같다. 제 II장에서 다루었던 상금 분배 문제에서 주어진 상황은 게임 상황이므로 다음의 결과를 전혀 예측할 수 없다는 점에서 길 찾기 문제에서 나 지점의 갈림길이 있다는 것을 모르는 것과 동형인 문제로 보인다. 이러한 확률 문제는 다음과 같은 문제와 구분되는 특징을 갖고 있는 것으로 보인다.

두 개의 동전 A, B를 동시에 던질 때, 앞면이 한 개만 나올 확률을 구하여라

(김연식 외, 1998, 177).

이 문제에 대한 답은 2/4이다. 하지만, 이 문제에 대하여 앞면이 나오는 개수의 경우를 생각하면 0개, 1개, 2개인 경우의 3가지가 있으므로 ⅓이라고 생각할 가능성이 있다. 그러나, 앞에서 다룬 특정한 길의 확률을 구하는 방법과 여기서 동전의 앞면의 특정한 개수의 확률을 구하는 방법 사이에는 차이가 있다. 길의 확률 문제에서는 문제 상황에서 보이는 길은 모두 5가지가 있으나 모든 경우의 수를 3으로 보아야 했던 반면, 동전의 확률 문제에서는 문제 상황에서 생각되는 앞면의 개수의 경우는 모두 3가지가 있으나 모든 경우의 수를 4로 보아야 한다는 점이다. 즉 어떤 경우에는 눈에 보이는 경우를 축소하여 생각해야 하는 반면 어떤 경우에는 보이지 않는 경우까지 확대하여 생각해야 한다는 것으로, 이는 각각의 근원사건이 일어나는 경우가 같아야 한다는 조건을 충족시키기 위한 것이다.

또한, 이 두 가지와는 달리 어떻게 생각하더라도 상관없는 상황도 있다. 이는 다음 문제와 같은 상황이다.

갑, 을, 병, 정의 4명 중에서 2명의 대의원을 뽑을 때, 병이 대의원으로 뽑힐 확률을 구하여라

(김연식 외, 1998, 178).

이 문제에 대한 전형적인 풀이는 수형도를 이용하여, 모든 경우는 (갑, 을), (갑, 병), (갑, 정), (을, 병), (을, 정), (병, 정)의 6가지가 있음을 밝히고 이 중 병이 포함되는 경우가 3가지 있으므로 3/6 = 1/2라는 답을 얻는 것이다. 이 풀이에 대하여 학생들은 2명의 대의원이므로 순서는 관계없으므로 (을, 갑)인 경우를 포함하지 않는 것은 받아들인다고 하더라도, 갑으로 시작하는 세 가지 경우 각각과 을로 시작하는 두 가지 경우 각각, 그리고 (병, 정)인 경우가 모두 같은 확률을 갖는다는 것에 대하여 의문을 가질 수 있다. 즉, 수형도를 본다면 앞서 길 찾기 문제를 연상할 수 있고, 여기서 처음에 갑, 을, 병 각각으로 시작하는 경우끼리 확률이 같아야 한다고 생각할 여지가 있다는 것이다. 자연스러운 사고 방법은 처음에 나올 수 있는 사람이 갑, 을, 병, 정의 4명이 있고, 각각의 경우마다 3명이 올 수 있어서 모든 경우의 수는 12이고, 이 중 병이 포함된 경우는 6가지이므로 6/12 = 1/2이라고 하는 것이지만, 이 경우에 12는 4명 중에서 2명의 대의원을 뽑을 수 있는 모든 경우의 수가 아니라는 점에서 문제가 된다. 하지만, 6가지 경우로 나누는 것은 각각의 경우의 확률이 같다는 것을 보장하기에 어려움이 따른다는 점에서 차라리 12가지 경우를 구하게 하는 것이 학생들에게는 더욱 쉽게 받아들여질 수도 있을 것으로 보인다.

결과적으로 중학교에서 다루는 확률 문제의 상황은 다음의 다섯 가지로 분류해 볼 수 있을 것이다.

첫째, 각각의 경우의 확률이 같은 상황이다. 예를 들면, "주사위 1개를 던질 때 3의 눈이 나올 확률"과 같은 것이다. 이를 '상황 1'이라고 부르기로 한다.

둘째, 드러나는 경우를 축소한 후에 확률이 같은 상황이다. 예를 들면, 앞에서 다룬 길 문제가 있다. 이를 '상황 2'라고 부르기로 한다.

셋째, 각각의 경우의 확률이 같지만 경우의 수를 구하기 위하여 순서쌍을 이용하는 상황이다. 예를 들면, "주사위 1개와 동전 1개를 던질 때 주사위의 5의 눈과 동전의 앞면이 나올 확률"과 같은 것이다. 이를 '상황 3'이라고 부르기로 한다.

넷째, 드러나는 경우를 순서쌍을 이용하여 확대한 후에 대칭적이 되는 상황이다. 예를 들면, 앞에서 다룬 동전 문제가 있다. 이를 '상황 4'라고 부르기로 한다.

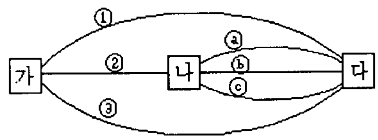
다섯째, 각각의 경우의 확률도 같고 확대한 후에도 확률이 같은 상황이다. 예를 들면, 앞에서 다룬 대의원 문제가 있다. 이를 '상황 5'라고 부르기로 한다.

IV. 확률 개념 도입에서 고려할 점

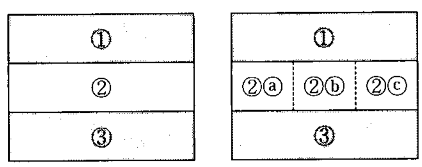
제 III장에서의 고찰을 통하여 현재 우리 나라 초등학교 및 중학교에서 확률 개념이 다루어지는 맥락을 살펴보고, 개연적으로 발생할 수 있는 난점에 대하여 조사해 보았다. 이 장에서는 제 III장의 마지막에서 나누어 보았던 네 가지의 확률 문제 상황에 근거하여 경우의 수와 확률 개념 지도에 대하여 살펴보기로 한다.

첫째로, 상황 1의 경우는 고려할 수 있는 각각의 경우가 동확률성을 바로 보장할 수 있는 것으로, 초등학교에서 경우의 수의 지도와 중학교에서 확률 개념 지도의 출발점이 되고 있다. 여기에는 한 개의 동전 또는 한 개의 주사위를 던질 때 나오는 경우의 수나 몇 장의 서로 다른 수 카드가 들어 있는 상자에서 수 카드를 꺼낼 때 나오는 숫자의 경우의 수 등이 포함된다. 이 상황에서는 경우의 수와 확률 지도의 연결이 자연스러워 보인다. 경우의 수를 나눌 때에나 구하는 경우의 수와 전체 경우의 수의 비를 구할 때 일어날 수 있는 인지적 갈등은 없을 것으로 보인다.

둘째로, 상황 2와 같은 경우에는 경우의 수를 따지거나 확률을 구할 때 세심한 주의가 필요하다. 문제는 다음 그림과 같은 상황에서 가 지점에서 다 지점으로 가는 경우의 수를 주사위나 동전 던지기 상황과 같이 다루었을 때, 나중에 확률을 계산할 때는 다른 방법으로 계산해야 한다는 것을 받아들이는 데 있어서 인지적 갈등을 느낄 수 있기 때문이다.



실제로 위와 같은 상황에서 나 지점에서 갈림길이 있다는 것을 모르는 것으로 가정한다면, 상금 분배 문제에서와 같은 도식을 이용하여 직관적으로 도움을 줄 수 있을 것이다. 즉, 다음 그림과 같이 도식화할 수 있을 것이다.



가 지점 나 지점

위의 도식에서 ②번 그림을 3등분해야 한다고 설명할 수 있는 근거가 되는 것은 시간상의 차이가 된다. 즉, 가 지점에서는 3가지 중의 한 가지를 선택하고, 시간적으로 이후에 나 지점에서 다시 3가지 중 한 가지를 선택한다는 것으로 설명이 가능하다.

셋째로, 상황 3의 경우는 피아제의 용어로는

'승법적 분류'를 요구하는 상황이다. 인헬더와 피아제(1958)는 놋쇠로 된 막대(A_1)와 놋쇠가 아닌 막대(A'_1), 충분히 구부러지는 막대(A_2)와 충분히 구부러지지 않는 막대(A'_2)로 막대를 분류한다면, 구체적 조작기의 말기의 아동은 여기서 나오는 다음 4개의 승법적 분류를 할 수 있음을 밝히고 있다.

$$A_1A_2 + A_1A'_2 + A'_1A_2 + A'_1A'_2$$

따라서, 동전 1개와 주사위 1개를 던질 때 나오는 눈의 경우의 수를 찾는 일은 그리 학생들에게 그리 어렵지 않을 것으로 생각되며, 동일한 상황에서 제기될 수 있는 확률 문항에 대해서도 마찬가지일 것으로 보인다. 그러나, 주사위나 동전과 같은 대상 중 어느 한 가지를 선택하여 2개를 던지는 상황에서는 가능한 모든 경우의 수를 구하는 것은 비슷한 상황이지만, 예를 들어 두 눈의 합이 10인 경우의 수 또는 그 확률을 묻는 상황은 다소 차이가 있으며 이는 네 번째 경우에 해당한다.

넷째로, 상황 4의 경우는 상황 3의 경우와는 차이가 있다. 예를 들어, 동전 2개를 던졌을 때 앞면이 1개만 나오는 경우는 몇 가지인지를 구할 때, 동전 1개는 앞면, 동전 1개는 뒷면이면 되므로 1가지 경우라고 답할 가능성은 충분히 있는 것이다. 이 경우에도 앞서 이용한 것과 유사한 도식을 이용하면 보다 직관적으로 설득력 있는 설명을 제공할 수 있다고 생각된다. 동전이 2개이므로 두 개를 따로 생각하게 하여 다음과 같은 도식을 이용한다.

앞	뒤

A 동전

앞-앞	뒤-앞
앞-뒤	뒤-뒤

B 동전

이 그림을 통하여 앞면이 1개인 경우의 수는 2라는 것과 나아가 앞면이 1개만 나올 확률이 2/4＝1/2라는 것은 보다 명확해지게 될 것이다. 주사위 2개를 던지는 상황이라면 가로와 세로의 사각형이 6칸씩인 도식을 이용할 수 있을 것이다. 또한, 이 경우와 유사한 것으로 "1, 2, 3이 쓰여진 3장의 숫자 카드를 늘어놓아서 만들 수 있는 세 자리 숫자의 경우의 수" 또는 이와 관련된 확률 문항을 생각할 수 있다. 이 경우에도 위의 도식을 이용하여 해결할 수 있다.

1	2	3

첫째 자리

1-2	2-1	3-1
1-3	2-3	3-2

둘째 자리

다섯째로, 상황 5의 경우는 4명의 학생 중에서 대의원 2명을 뽑는 경우의 수나 특정한 학생이 포함되는 확률을 구하는 상황으로, 궁극적으로는 조합을 이용하여 해결하게 되는 상황을 말한다. 4명의 학생을 각각 A, B, C, D라 할 때 대의원 2명을 뽑는 6가지 경우 각각에 대하여 동확률성이 보장되는 방식으로 제시하기는 쉽지 않아 보인다. 두 번째 경우나 네 번째 경우의 어느 것을 이용하더라도 앞서 III장에서 제시한 바와 같은 문제가 일어날 수 있으며, 6가지 경우를 차례로 열거하여 세어 나가고 여기서 확률을 구한다면 앞에서 다룬 두 번째, 세 번째, 네 번째 상황과 혼동을 일으킬 염려가 있는 것이다. 그래서, 2명의 대의원 속에 학생 A가 포함될 확률을 구하는 경우 전체 경우는 순열로, 학생 A가 포함되는 경우는 조합으로 구하거나 그 역으로 구할 개연성이 있는 것이다. 따라서, 이 경우에 매개적인 접근 방법으로서 세 번째 경우와 같이 순서쌍을 이용하는 단계를 거치는 것이 더 자연스러울 것으로

보인다. 이 경우 먼저 이용하게 되는 도식은 다음과 같은 것이 될 것이다.

A	B	C	D

첫째 학생

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

둘째 학생

이 도식으로부터 한 가지 순서쌍에 대하여 순서를 바꾼 쌍이 '언제나' 하나 더 있다는 것으로부터 조합적인 사고를 하도록 유도할 수 있을 것이다.

V. 결론

본 고에서는 현행 교육 과정과 교과서의 분석을 통하여 초등학교에서 경우의 수와 중학교에서 확률 개념이 도입되는 맥락을 조사하여 개연적으로 발생할 수 있는 난점을 조사하였으며, 특히 도수적 관점에서 확률 개념을 도입할 때 문제가 되는 근원사건의 동확률성의 개념을 보다 자연스럽고 직관적으로 도입할 수 있는 방법을 모색해 보았다. 현재 초등학교와 중학교에서 확률이 도입되는 것은 도수적 관점에 의해서이며, 경우의 수나 확률을 구하는 다섯 가지의 구분되는 상황을 발견할 수 있었다. 그러나, 다섯 가지 상황 각각이 포함하고 있는 특수성으로 인하여 각 상황별로 적용되는 특정한 방법을 이용할 경우 학생들의 인지적 갈등을 유발할 수 있는 가능성이 충분히 있어 보이며, 이러한 개연적인 갈등을 줄이는 데 도움이 될 수 있을 것으로 기대되는 도식을 이용하여 각각의 상황을 다루는 방법을 제시하였다.

확률 도입 과정에서 이유 불충분의 원리에 의하여 보장되는 근원 사건의 동확률성의 문제는 수학적으로도 다소 문제를 안고 있는 개념이며, 본 연구에서 구분한 다섯 가지 상황 각각에서 동확률인 근원 사건을 규정하는 방식에 차이가 있어 학생들의 확률 개념 학습에서 인지적 갈등을 유발할 여지가 충분히 있는 것이다. 이에 대하여 비교적 일관성이 있는 사각형 도식을 이용함으로써 이러한 개연적인 인지적 갈등을 해소하는 데 도움이 될 수 있을 것으로 기대된다.

이러한 도식을 실제 교수·학습 장면에서 적용해 보고, 이를 응용한 여러 직관적인 도식을 만드는 일이 필요하다고 하겠다. 나아가 영국과 미국에서 이용하고 있는 통계적 실험적 접근과의 비교를 통하여(우정호, 1998), 보다 자연스러운 확률 개념의 도입 방안을 탐색하는 일이 필요할 것이다.

참고문헌

김연식, 김홍기 (1998). 중학교 수학 2. 서울: 두산동아.

교육부 (1997). 수학 6-2. 충남 연기: 국정교과서주식회사.

강지형, 김수환, 라병소, 박성택, 이의원, 이정재, 정은실 (1999). 7차 교육과정에 의한 초등수학교육. 서울: 동명사.

박정, 홍미영, 김성숙 (2000). 제 3차 수학·과학 성취도 국제비교 반복 연구(TIMMS-R) 국내 평가 결과 분석 연구 II. 서울: 한국교육과정평가원.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

Inhelder, Bärbel & Jean Piaget (1958). Trans. by Anne Parsons & Stanley Milgram, *The Growth of Logical Thinking: from childhood to adolescence,* London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Contexts and Difficulties on the Introduction of Probability Concept

Seo, Dong-Yeop (Chuncheon National University of Education)
Hong, Jin-Kon (Kyunggi Girls' High School)

The Study investigated the contexts and probable difficulties of the teaching of the number of cases and the introduction of probability concept. In our mathematical curriculum, the contexts of the teaching of probability can be classified into five cases. We suggested some intuitive diagrams to be likely to decrease the cognitive complications caused by the equal possibilities of the unit event in the cases, respectively.