大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 11 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.2, 239-256. Dec 2001

수학적 은유의 사회 문화적 분석

주 미 경*

I. 은유에 대한 현대 인지과학적 접근: 냉철한 사고 속에 스민 인간의 따스함

우리는 어떻게 수학적으로 사고하고 수학을 학습해가는가? 수학 학습 이론의 가장 근원적인 이 질문에 대한 이론적 해답의 모색은 세계가 초월적이고 보편적인 불변의 수학적 구조를 가진다는 가정 하에 수학의 학습을 사유를 통해 불변의 내재적인 세계의 구조의 발견과 연관지어 보는 관점으로부터 접근되어왔다. 이러한 서구 이성주의적 전통에서 수학적 사고에 가장 적절한 언어는 상상을 배제하고 엄밀하며 문자 그대로 해석되는 직해적 언어(literal language)로 간주되어 왔고, 반면 은유는 수학적 개념과 사고의 본질이 결여된 수사적 언어로 과소평가되어 왔다(Ortony, 1993).

그러나, George Lakoff와 Mark Johnson이 1980년 공저한 이정표적인 저서 'Metaphors We Live By'를 비롯해, 언어학과 인지과학 등의 폭넓은 분야에서 산출된 현대 은유이론은 은유가 보다 근원적인 수준에서 개념적 사고를 구성함을 증명하였다(Lakoff, 1993; Lakoff & Johnson, 1999; Ortony, 1993; Reddy, 1993; Schon, 1993). 전통적으로 수사적인 언어로 간과되어 왔던 은유가 인간 사고의 본질을 구성하며 나아가 인간의 경험적 지식이 배제된 것으로 간주되어온 이성적 사고가 실제로는 경험적 세계와 밀접히 관련되어 있음이 증명되었다. 특히, 수학과 관련하여, Lakoff와 Nunez는 최근 그들의 공저 'Where Mathematics Comes From'에서 기초적인 산술 분야뿐만 아니라 집합론, 대수, 해석학 등 광범위한 고등 수학에서의 개념과 법칙을 구성하는 은유의 체계를 정리 분석하고, 그로부터 직해적 언어는 수학적 사고에서 최소한의 골격만을 제공하며 그 골격에 의미를 부여하고 더욱 정교한 지식의 체계로 발전시켜가는 것이 은유적 사고임을 주장했다(Lakoff & Nunez, 2000)

이처럼 현대의 은유이론은 서구 이성주의적 전통에서 엄밀하고 직해적인 언어를 통한 사고의 정수라고 생각되어온 수학 역시 그 예외가 아님을 증명하고 수학이라는 지식에 대한 새로운 이론적 이해를 창출하는데 중요한 기여를 했는데, 이러한 이론적 진보는 인간의 개념적 사고의 본직을 이해하는 도구로서 은유를 개념적 영역 사이의 사상(cross-domain mapping)으로 정의하는 것에 의해 가능해졌다(Lakoff, 1993). 즉, 은유를 질적으로 다른 개념의 영역, 구체적으로, 감각적 경험의 영역과 추상적 개념의 영역 사이를 연결지어줌으로써 추상적 개념에 대해 사고할 수 있게 해주는 인지적 기제로 설명하는 것이다(Lakoff, 1993). 예를 들어, 은유를

* 한국교원대학교

개념적 영역 사이의 사상으로 보는 이론적 관점에서 "사랑은 여행이다(Love Is Journey)" 은유는 물리적 감각적 경험의 영역에 속하는 '여행'으로부터 추상적인 정서의 상태를 나타내는 '사랑'으로의 사상이다. 이 때, "사랑은 여행이다" 은유란 그 문장 자체를 지칭하는 것이 아니라 '사랑(Love)'과 '여행(Journey)'으로 범주화되는 두 집합의 원소들 사이의 대응 관계로 정의된다. 즉, '여행'의 범주에 들어있는 여행자, 교통수단, 여행목적지, 장애물 등은 '사랑'의 범주에 들어있는 연인, 연인관계, 연인이 지향하는 목적, 어려움 등에 각각 대응된다. 그러나, 은유를 정의하는 대응 관계는 각각의 원소들 사이에 존재하는 점별 대응이라기보다 그들 원소들 사이에 존재하는 추론구조 사이의 대응까지 포괄하는 관계임을 지적할 필요가 있고 바로 은유를 주어진 하나의 구체적인 표현에 한정하는 것이 아니라 관계개념사이의 추론구조를 보존하는 관계적인 대응으로 확장함으로써 은유가 개념적 사고에 관여함을 증명하는 것이 가능해진다(Lakoff, 1993). 예를 들어, "우리가 함께 탄 차가 막다른 골목에 도달했다"는 은유적 표현은 위에 나열된 원소들과 그들 사이의 추론 관계를 적용함으로써 "우리의 관계를 유지하기 힘들 정도의 심각한 난관에 부딪혔다"는 해석이 가능해진다. 이렇듯, 은유가 근본적으로 두 영역 사이의 추론 구조에 관계한다는 사실로부터 은유에 의해 전이된 경험적 개념 영역의 추론구조에 근거하여 추상적 개념에 대한 사고가 가능함을 의미한다.

살펴 본바와 같이, 은유는 질적으로 다른 두 영역 사이에 다리를 놓아 인간의 사고를 가능하게 하는 대표적인 인지적 기제이다. 좀더 구체적으로, 은유이론은 인간이 미지의 추상적인 개념에 대해 사고할 때 자신이 풍부한 물리적 감각 운동적 경험으로부터 구성한 지식과 그 지식체계의 추론 구조에 의존함을 증명함으로써 서구 이성주의적 전통에서 고수되어온 경험이 배재된 순수이성의 중요성을 강조하는 인식론에 반박한다. 나아가, 최근의 은유이론은 신경과학 분야의 연구 결과와 연결되어 경험적 개념의 영역에 해당하는 지식이 단순히 물리적 경험에 의해 결정되는 것이 아니라 그것을 해석하는 데 관여하는 인간의 생득적인 인지기제에 그 뿌리를 두고 있음을 보임으로써 인간의 사고와 지식이 물리적인 세계에 대한 '객관적'인 해석이 아니라 인간의 신경학적 속성과 그를 통해 구성된 감각경험적 지식체계에 의거하여 재해석된 표상체계임을 주장한다(Lakoff & Johnson, 1999).

Lakoff와 Nunez는 현대 인지 과학에의해 확장된 최근의 은유이론을 수학적 사고의 이해에 적용하고 있다(Lakoff & Nunez, 1997; 2000; Nunez, Edwards, & Matos, 1999). 구체적으로, 'Where Mathematics Comes From'에서 Lakoff와 Nunez는 subitizing[1], 이미지 스키마 등을 비롯한 인간의 생득적인 인지적 기제에 의해 생성된 초보적 산술 개념이 은유를 통해 고도의 복잡한 산술적 개념으로 발달해가는 과정을 보인다. 예를 들면, 현대 인지과학에서 증명되었듯이 인간이 subitizing 능력 등의 간단한 산술능력을 생득적으로 타고난다(Gelman & Geistel, 1978). 이들 생득적 산술 기능은 산술 기능이라고 분류하기에는 아주 미미한 것들이나, 그룹짓기, 순서짓기, 짝짓기, 암기능력 등의 여러가지 인지적 능력의 적용을 통해 subitizing에 의해 한정되어진 영역을 넘어서는 수세기와 나아가 산술연산의 수행기능으로 발달되어 간다.

1) subitizing이란 '갑자기(sudden)'을 의미하는 라틴어로써, 4, 5 정도의 작은 수를 순식간에 정확히 변별할 수 있는 능력을 의미한다.

특히, Lakoff와 Nunez는 이러한 인지적 기제 가운데 개념적 은유와 개념적 혼합을 수학적 인지발달에 가장 핵심적인 것으로 본다. 뿐만 아니라, 은유는 근본적으로 질적으로 다른 두 영역 사이에 추론구조를 전이시킴으로써 경험적 지식체계의 추론 구조에 의거하여 은유적으로 수반되는 필연적 결과에 대한 명제를 산출하게 되고 바로 이 은유적으로 수반되는 명제들이 수학적 법칙들을 이루는 것이라고 주장한다. 또한, 은유는 개념적 대응 관계를 통해 경험적 지식의 이면에 존재하는 이미지 스키마의 추론 구조를 추상적 개념의 영역으로 전이한다. 예를 들면, 수집(collection)의 논리를 구성하는 용기 스키마(container schema)는 "산술은 대상집합(Arithmetic Is Object Collection)" 은유를 통해 용기 스키마의 추론구조가 산술의 영역으로 전이되는 것이다. 이러한 관점에서, 은유이론은 전통적으로 경이의 대상이 되어온 수학의 일관성, 보편성, 초월성은 Plato가 주장한 바와 같이 형이상학적인 것이 아니라 바로 인간에게 자연스러움과 익숙함을 연상시키는 이미지 스키마의 추론구조에서 비롯된 것이라고 주장한다 (Lakoff & Nunez, 2000).

현대의 은유이론은 고도로 발달된 추상적인 수학적 개념이 사실은 인간의 구체적이고 물리적 감각 운동적 경험에 근거하며, 그러한 경험이 인간의 다양한 생득적 인지기재에 의해 재해석되고 재구성된 표상의 체계가 수학이라고 설명한다. 이러한 측면에서 최근의 은유이론에서 이루어진 진보는 서구 이성주의적 관점에 의문을 제기하고 나아가 수학에 대한 이해를 확장시키는 데 크게 이바지했다고 평가할 수 있다. 달리 말하면, 수학적 개념과 법칙들이 개념적 은유에 의해 구체적이고 일상적인 경험의 세계와 연결되어 있고, 따라서 우리가 알고 있고 알 수 있는 수학은 우리가 누구인가, 즉 우리의 신체와 신경체계가 어떻게 디자인되어있고 그들을 이용하여 어떤 구체적인 활동을 하느냐에 의해 결정된다는 새로운 이론적 관점을 제공했다.

그러나, Lakoff에 의해 대표되는 인지 언어학적 은유 이론은 실제로 사용되는 맥락으로부터 유리된 이상적인 은유의 사례 분석에 의존함으로써 결과적으로 은유의 역할을 과대 평가한다는 비판을 받고 있다(Quinn, 1991). 이러한 비판적 관점에서, 본 논문은 Lakoff와 Nunez 등에 의해 대표되는 인지적 은유이론이 자연스러운 발화의 맥락에서 유리된 은유 그 자체의 논리적 관계에 분석을 한정하고 있다는 점에 착안하여, 수학 학급이라는 자연스러운 수학적 발화의 맥락 속에서 실제로 사용된 은유의 예들을 분석함으로써 수학적 사고, 나아가 수학 교수-학습에서의 은유의 중요성을 다른 각도에서 설명하고자 한다.

II. 연구 방법론과 자료 수집: 사회언어학적 민족지학연구

본 논문의 분석에 사용된 수학적 은유의 예들은 저자가 미국 서부 대도시 지역의 주립대학의 수학과에서 행한 언어의 사용에 초점을 둔 민족지학적 연구(ethnography of speaking)를 통해 수집되었다. 민족지학적 연구란 한 집단의 상호작용을 오랜 기간 동안 관찰하고 그 관찰 결과에 근거하여 그들의 행동을 하나의 통합된 전체를 이루는 체계로서 그들의 사회 문화 역사적 관점과 의미체계에 충실하게 표상하는 묘사 방법이다(Goetz & LeCompte, 1984). 특히, 선행된 수학 분야에서의 사회문화적 연구 결과에 비추어 본 논문에서는 연구가 진행된 수학과를 하나의 문화적 집단으로 가정하였고,

언어가 그 집단의 문화적 가치와 신념, 사회적 제도와 형식, 역할과 개인의 인성, 역사와 그 사회의 생태적 환경의 일면에 대한 실마리를 제공한다고 보는 사회언어학적 가정에 근거하여 자료의 분석에 있어서 언어를 분석의 단위로 설정하였다(Gumperz & Levinson, 1997; Gumperz & Hymes, 1972; Hymes, 1974).

이러한 방법론적 가정 하에, 본 연구의 자료는 1998-1999 학년도 세 학기에 걸쳐 필자가 미국 서부 지역 주립대학 수학과의 미적분학 조교로 활동하면서 그 과에 소속된 다양한 부류의 수학자와의 상호작용을 통해 수집되었다. 특히, 본 논문에서 사용된 수학적 발화에 대한 자료는 원로 수학자(이하 AW)의 협조 하에 수집됐다. AW는 1967년 동 수학과에서 기하를 전공하고 박사학위를 수여받은 뒤, 2년간 미국 동부의 대학 수학과에서 재직하고 다시 자신이 수학한 수학과로 돌아와 필자의 연구가 진행되던 당시까지 거의 30년에 걸쳐 수학을 연구하고 후진을 양성해왔다. AW는 자신의 연구 분야에서 세계적인 명성을 얻고 있을 뿐만 아니라, 수학을 지도함에 있어서도 열성적이어서 동료 수학자와 수학과 학생들로부터 교사로서 긍정적인 평가를 받고 있었다. 따라서 항상 자신의 수업을 개선하는 것에 관심을 가져왔고 그러한 수학 교육에 대한 열성이 본 연구에 참여하게된 동기로 작용했다.

구체적으로, AW의 수학 수업을 신입생을 위한 미적분학, 학부수학 전공학생을 위한 수학 강의, 대학원생을 위한 기하 수업 등의 세 수준에서 비교 관찰하고 몇몇 수업들을 분석을 위해 비디오 녹화했다. 수업 참관 이외에, 학년초와 학년말 AW의 수학 교육에 대한 관점을 탐구하기 위한 인터뷰가 이루어 졌고 형식적 인터뷰 이외에도 수업 참관을 통해 필자가 갖게 된 질문을 중심으로 한 비형식적인 대화가 일상적으로 이루어졌다. 이러한 대화의 내용은 필드노트에 기록되었다. 수업 참관 이후에는 필드노트가 작성되었고 몇몇 수업은 자세한 발화 분석을 위해 비디오 녹화되었다. 모든 인터뷰는 녹음되었고 자세한 분석을 위해 프로토콜로 작성되었다.

수업 참관 이외에, 그 수학과의 성원들이 수학 교육에 대해 가지고 있는 견해를 이해하기 위해 개별적인 인터뷰가 이루어졌다. 인터뷰를 위해 다양한 수학적 수준, 국적, 성별을 감안해 선택된 40명에 대해 인터뷰가 이루어졌다. 각 인터뷰는 녹음되어 분석을 위해 프로토콜로 작성되었다. 또한, 수학과에서의 수학교육을 이해하기 위해 다양한 종류의 문서, 예를 들면, 그 대학을 소개하는 웹사이트, 대학이 발행한 카탈로그, 그리고 수학과에서 학생들에게 학과와 강좌를 소개하기 위해 발행한 유인물 등을 수집하였다. 마지막으로, 필자는 본 연구가 진행되는 동안 세 학기에 걸쳐 자료 수집을 위해 참관한 미적분학 강좌와 동일한 종류의 미적분학 강좌의 연습 조교로 활동하였다. 이렇게 그 수학과 내에서 행해지는 수학교육에 직접적으로 관여함으로써 수학과 교수, 학생들과 자연스러운 상호작용이 가능해졌고 결과적으로 수학교육에 대해 많은 흥미로운 대화를 나눌 수 있는 계기가 자연스럽게 제공되었다. 이러한 대화 역시 필드노트에 기록되었다.

위에 제시된 다양한 종류의 자료의 수집을 통해, 본 연구는 분석의 사례로, 수학자, 달리 말해, 수학에 대한 깊은 안목을 지닌 교사에 의한 실제적인 수학적 발화를 분석하였고, 분석의 결과를 연구에 참여한 수학자들이 공유하고 있는 수학교육에 대한 사회문화적 관점에 의미있는 은유의 이론으로 통합하기 위해 학급 관찰과 인터뷰를 통해 수집된 자료의 분석, 그리고 수집된 문헌의 분석으로부터 추출된, 그

수학과의 성원들에 의해 공유된 수학교육의 사회 문화적 관점에 비추어 재분석되었다. 이들 다양한 종류의 자료는 수업참관을 통해 수집된 자료의 분석의 타당성과 신뢰도를 높이고 그로부터 찾은 패턴을 보다 폭넓은 사회적 맥락에서 설명하는데 사용되었다.

III. 수학적 발화 속의 은유: 코드 변환의 분석

Lakoff와 Nunez가 주장했듯이, 본 연구가 행해진 수학 학급에서의 수학적 발화 속에서 수학적 은유는 빈번히 관찰되었다. 예를 들면, 선형변환을 지도할 때 변환을 투입된 물체를 변환시키는 기계로 보는 은유가 자주 사용되었다. 예를 들면,

> "이 선형 변환은 수직으로 크기 늘리기, 줄이기, 그리고 회전시키기에 해당한다."[2]

이 예에서, AW는 사용된 계수의 특성에 따라 세 가지 선형변환을 분류하고 그들의 성질을 차례로 설명하고 있다. 특히, AW는 각 선형변환의 기하적 결과를 표상하는 동작들과 함께 은유를 사용함으로써, 마치 주어진 선형변환들이 그러한 조작을 그래프에 가하는 것 같은 상상을 유발한다.

다른 대표적인 은유의 예는 fictive motion metaphor이다. 이 은유는 특히 미적분 수업에서 최적화 문제의 해결을 위한 함수의 표상에 자주 쓰이는 데, 함수를 움직이는 점의 궤적으로 상상하는 것이다. 예를 들면,

> "이 이차 도함수의 그래프는 원점을 지나는 것처럼 보인다."[3]
> "이 그래프는 단조로운 함수인가 아니면 올라갔다 내려갔다하는 함수인가? 그 그래프는 어디서 바닥에 도달하는가?"[4]
> "최소값은 정확히 동일한 지점에서 생긴다."[5]

이 수학적 은유의 예들 속에서 함수의 그래프는 좌표평면 위를 움직여 다니고 있는 입자의 궤도로 묘사되고 있고 그 그래프 위의 점들은 그 여행의 경로에서 함수가 지나쳐 가는 지점으로 묘사된다. 또는 세 번째 예에서 볼 수 있듯이 그 경로 상에서 경험하는 사건이 발생하는 공간으로 묘사된다.

위에 제시된 실제적인 수학적 발화의 예들에서 볼 수 있듯이, 고도의 전문성을 지닌 수학자의 수학적 발화에서도 은유는 빈번히 사용되고 있고, 다양한 수준의 수학수업의 관찰 결과 수학적 전문성이 높은 수업일수록 수학적 발화 속에서 은유는 그 자체로 독립적인 의미를 갖는다기 보다 직해적인 수학적 언어들과의 밀접한 관계 속에서 은유가 사용되고 양자의 '적절한' 사용에 의해 하나의 수학적 발화가 보다 완벽한 의미를 갖게됨이 관찰되었다. 달리 말해, 은유는 자체가 완벽한 수학적 발화를 구성한다기 보다는, 수학자는 은유적 언어와 직해적 언어 양자를 통해 자신의 수학적 발화를 완성함이 관찰되었다. 이러한 측면에서, 은유 그 자체 내에 성립하는 논리적 완비성에 초점을 둔 Lakoff나 Nunez 등에 의해 제기된 인지언어학 이론에서와는 다른 방법으로 수학적 은유에 접근할 필요가 제기되며, 이러한 접근을 통해 우리는 인지 언어학적인 은유 이론이 제공하는 것과는 다른 종류의 은유 이론과 그로부터 유

---

2) "This [linear] operation corresponds to vertical stretching, squeezing, flipping."
3) "It looks like your graph of second derivative goes through the origin."
4) "Is [the graph] something simple or go up and down? Where does this curve hit the bottom?"
5) "The minimum occurs at exactly the same place."

추되는 교육적 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

이러한 점에 착안하여, 본 연구는 진행 중인 수학적 발화에서 코드변환(code switching)의 분석에 그 초점을 둔다. 코드 변환은 하나의 발화 속에서 두 가지 질적으로 다른 종류의 언어가 병행하여 사용되는 현상을 가리킨다[6]. 전통적인 언어학 이론에서 코드 변환은 새로운 언어를 학습하는 과정에서 나타나는 과도기적인 현상으로 설명되었으나, 사회언어학자들은 코드 변환을 의사소통의 효율성이라는 측면에서 접근하였다. 즉, 사회언어학이론에서 코드 변환은 인지적 결함으로 인한 자연스런 발화의 단절이 아니라, 한 발화의 맥락 속에서 다른 종류의 코드와 상호작용을 통해 그 발화를 보다 의미있는 발화로 완성시키는 역할을 한다고 설명된다. 실제로, 코드 변환을 자주 보이는 이중언어 사용자의 경우 코드 변환을 하는 상황에서 동일한 발화의 속도를 유지하며 코드 변환을 위한 별도의 의식적 노력을 하지 않음이 발견되었다(Gumperz, 1982). 따라서, 코드 변환에 대한 사회언어학적 연구 결과들은 코드 변환이 전적으로 발화자의 불완전한 언어적 기술에 관련되는 것이라기 보다는 각각의 언어가 전달할 수 있는 의미에 대한 이해에 기초하여 최적의 의사소통을 하려는 인지적 현상이라고 설명한다. 또한 사회언어학적 관점에서, 언어는 개인의 행동을 한정하는 사회적 체계로 생각되고, 따라서 코드변환은 발화자의 그 사회적 체계에 대한 자신의 이해를 반영한다고 생각된다 (Gumperz & Levinson, 1996). 즉, 발화자는 코드 변환에서 매 순간 상황에 대한 자신의 이해를 가장 적절하게 전달할 수 있는 종류의 코드의 사용으로 전환하게 되는데 그 이해와 전환의 전략은 발화자의 사회적 체계(본 논문의 분석에서는 수학적 지식의 체계)에 대한 이해에 기초한다는 것이다(Blom & Gumperz, 1972; Gumperz, 1982). 본 논문은 이 사회언어학적 관점을 수학적 발화에 적용하여 수학적 발화에서 자주 발견되는 은유적 언어와 직해적 언어의 병용을 일종의 코드 변환 현상으로 보고 그 변환을 분석함으로써 수학적 은유가 발화 전체의 맥락 속에서 가지는 의미와 역할을 이해하고 그로부터 교육적 시사점을 유추하고자 한다.

IV. 수학적 발화 사례의 코드 변환 분석

(1) 함수의 극한

다음의 수학적 발화의 예에서 AW는 함수 $100/s+60+s$에서 독립변수 s가 무한대로 갈 때 가장 지배적인 항이 어떤 항인지 설명하고 있다.

1. 변수 s가 클 때,
2. 이 항 [100/s]는 작아지고,
3. 이 항 [60]는 60에 머물지만,
4. 이 항 [s]는 계속 커진다.
5. 따라서, s가 이 함수를 지배한다.[7]

이 예에서, AW는 독립변수 s의 크기를 가정하는 직해적 언어에서 시작하여 (줄 1) 주어진 함수의 각 항이 어떻게 변화하는지 상상을 하고 그로부터 얻은 결과를 은유적인 언어, 구체적으로, 의인화를 통해 표현하고 있다 (줄 2-4). 예를 들면, 줄 1과 비교하여, 줄 2에서 "이 항

6) "[Code switching is defined as] the juxtaposition within the same speech exchange of passages of speech belonging to two different grammatical systems or sybsystems" (Gumperz, 1982, p. 9).

7) 1. When s is large, 2. this[100/s] gets small, 3. this[60] stays 60, 4. but this[s] gets larger and larger 5. so s dominates.

은 작다(this is small)"이라는 정적인 표현을 사용하지 않고 "이 항은 작아진다(this gets small)"라는, 함수의 동적인 표현을 통해, 주어진 항이 주어진 조건에 유기적으로 반응하는 생명력있는 존재로 의인화하는 표상을 사용하고 있다. 그리고 그러한 은유적인 상상을 거쳐, 결론은 다시 수학적으로 정의된 언어인 '지배한다(dominate)'라는, 달리 말하면, 직해적인 언어로 끝맺고 있다.[8)]

위의 간단한 수학적 발화의 분석에서 볼 수 있듯이, 은유적 언어와 직해적 언어 사이의 변환을 통해 표상되는 수학의 성질이 변환되고 있다. 즉, 직해적인 언어를 통한 표상에서 수학적 대상은 통제의 대상, 예를 들면, 수학자가 변수의 크기를 조절하는 식의 수동적인 대상으로 보여지고 있다. 반면, 은유를 통한 표상 속에서 수학적 대상은 생명력을 가진 능동적인 대상으로 묘사된다. 또한 직해적 언어는 수학적 대상을 수학적 사실[9)]의 영역 속에서 다루고 있다면, 은유는 수학적 대상을 상상의 영역에서 다루고 있다. 달리 말하면, 직해적 언어는 객관적 수학의 영역, 은유는 주관적 수학의 영역에 각각 연관되어 있다고 할 수 있다. 이렇듯, 직해적 언어와 은유를 통해 표상된 수학은 서로 상반되는 성질을 갖는 것으로 보인다. 그러나, 코드 변환의 분석을 통해 발견된 보다 중요한 패턴은 양극단, 즉 수학적 사실과 수학적 상상의 세계가 서로 분리, 대립된 것이 아니라 변증법적으로 연관되어 있음을 보여준다. 예를 들면, 변수 s가 커질 때, 각 항의 변화에 대한 상상은 임의로 이루어지는 것이 아니라 분수식, 상수식, 일차식의 성질에 대한 이해에 근거한다. 그리고, 각각의 항에 대한 수학적 상상을 통해, 초기에 주어진 수학적 사실은 새로운 수학적 사실, 즉 변수 s가 무한대로 갈 때 어떤 항이 가장 지배적인지에 대한 사실의 발견으로 이어진다.

위의 수학적 발화의 분석에서 살펴본 바와 같이, 수학적 은유는 그 자체로 완벽한 수학적 지식을 구성한다고 할 수 없다. 다른 각도에서 표현한다면, 최소한의 은유적 대응 관계를 기저로 하여 논리적으로 필연적인 명제가 생성되는 과정을 통해 수학적 지식의 체계가 구성되어 간다는 인지언어적 은유이론의 관점에서는

---

8) '지배한다(dominate)'는 변수가 무한대로 발산할 때 함수의 한 항이 다른 항들에 비해 월등히 큰 무한대로 발산한다는 의미의 수학적 용어로, 항의 크기 비교를 통해 '지배'라는 의인적 개념을 적용했다는 면에서는 은유로 볼 수 있으나, 본 논문의 분석에서는 수학적으로 정의된 언어라는 면에서 직해적 표현으로 분류했다. Lakoff의 인지적 은유 이론에서는 인간의 모든 언어가 근본적으로 은유의 체계이며, 이러한 관점에서 Lakoff와 Nunez는 '지배한다(dominate)' 같은 종류의 은유를 정의적 은유(definitional metaphor)로 분류한다 (Lakoff & Johnson, 1999; Lakoff & Nunez, 1993). 본 논문은 Lakoff의 인지적 은유이론에 기초하고 있으나 구체적인 분석에서는 인지적 은유이론과 차별화되는 관점을 취하고 있다. 즉, Lakoff는 수학적 지식 체계에서 발견되는 은유의 체계를 거시적으로 분석한 반면, 본 논문에서는 은유가 수학적 사고의 구성에 실제로 사용되는 과정의 미시적 분석을 통해 은유에 접근하고 있고, 결과적으로 위의 예에서와 볼 수 있듯이, 구체적 분석의 상황 속에서 Lakoff의 인지적 은유 이론과는 불일치하는 부분이 나타나게 된다.

9) '수학적 사실'이란 수학 수업에서 교사에 의해 전달되는 수학적 지식의 범주 가운데 단어, 표기, 정의, 정리, 규칙, 공식, 절차 등의 정보적 형태를 갖는 지식의 범주를 가리킨다. 이러한 종류의 수학적 지식을 '사실'로 정의하는 것은 '사실'에 대한 사회학적 관점에 의거한다. 실제로 수리논리분야의 연구로부터 지식의 구조로서 수학적 체계가 절대불변하는 항구적인 진리의 집합이라기 보다는 수학적 공리체계에 따라 결정되는 상대성을 갖는 지식체계임이 입증되었다(Eklof, 1994; Martin & Solovay, 1970; Rudin, 1969; Shelah, 1974; Solovay & Tenenbaum, 1971). 뿐만 아니라, 수학적 지식의 구성에서 모종의 관례적 규범이 작용하고 있음이 주장되고 있다(Bloor, 1994; Joseph, 1994; Pickering & Stephanides, 1992; Restivo, 1990; 1994). 따라서, 수학이라는 지식은 영구불변의 진리라기보다는 그 지식을 구성한 사회의 의미체계로서 사회적 규범과 가치에 의거한 문화역사적인 "사실"이라고 본다. 이에 대한 필자의 보다 자세한 논의는 Ju(2001)의 제 8장에 나타나있다.

수학적 사고에서 특정한 종류의 은유가 선택되어 그로부터 수학적 지식의 체계가 구성되어 가는 측면에 대한 설명이 결여되어 있다. 즉, "왜 다름 아닌 바로 그 은유를 사용하였을까?"라는 질문에 대해 Lakoff와 Nunez의 이론적 설명은 빈약하다. 인지언어적 은유이론에서는 이미 분석할 은유가 선택되어 있다. 반면, 발화의 맥락에서는 '인간에 의한 선택의 중요성'이 상대적으로 부각된다. 수학적 사고에서 이미 산출되어 사회적으로 공유된 수학적 지식의 체계가 새로운 수학적 지식의 산출을 조건화하는 과정, 특히, 그 과정에서 개인의 선택의 중요성이 부각되고 결과적으로 수학의 두 얼굴, 즉, 주관과 객관 사이의 밀접한 관계가 드러나게 된다. 예를 들면, 위의 수학적 발화는 크게 직해적인 부분과 은유적인 부분으로 나누어져 분석되었는데, 이 과정에서 은유적인 발화 사이에도 모종의 질적인 차이가 있음을 간과해서는 안된다. 구체적으로, 세 항의 행동을 묘사함에 있어서, 마지막 항, 즉, 문제해결에서 핵심적인 의미를 가지는 항의 묘사에서는 반복법을 사용함으로써 보다 강렬한 종류의 은유가 쓰이고 있다. 이는 수학적 은유로 표상되는 수학적 상상이 직해적 언어로 표상되는 수학적 사실에 대한 이해에 의해 조건화됨을 시사한다. 다시 말해, 위의 수학적 발화에서 은유의 분석은 우리의 초점을 수학적 사고에서 상상과 사실, 개인의 선택과 사회적 지식의 체계, 일반적인 수준에서 본다면, 서구 이성주의 적 세계관 속에서 이분법적으로 이해되어온 주관과 객관 사이의 관계로 옮겨 놓았고 또 다른 예의 분석을 통해 양자의 변증법적 관계에 대해 좀더 살펴보기로 하자.

(2) 함수의 최적화

다음은 미적분학 시간에 함수의 최적화 문제를 해결하는 과정에서 나타난 수학적 발화의 예이다. 학급 관찰 당시, 수학 학급은 집을 나서며 욕실의 물을 잠그는 것을 잊은 사람의 이야기로 이루어진 문장제를 다루고 있다. 문장제 속에서 주인공은 운전을 하던 중 자신이 물을 잠그지 않고 집을 나온 사실을 기억하게 되고 최소의 비용으로 그 문제상황을 해결할 방법, 즉 집으로 물을 잠그러 가는 동안 흘러나온 물에 대한 비용과 되돌아가기 위해 사용한 가스의 비용의 합이 최소가 되는 운전 속도를 구하려 한다. 이 문제의 해결을 위해, AW와 그의 학생들은 운전 속도를 독립변수로 하는 함수의 식을 구하고 그 다음 단계로 그 함수의 최소값을 구하려고 시도한다. 다음은 그 문제 풀이 과정에서 발췌한 AW의 수학적 발화의 예이다.

1. 이 도함수는 변수 s가 10보다 작을 때 음이고
2. 변수 s가 10보다 클 때 양이다.
3. 그것이 의미하는 것은,
4. 위의 함수는 s가 10보다 작을 때 감소하고
5. s가 10보다 클 때 증가한다는 것이다.
6. 따라서 이 그래프에는 많은 굴곡이 있지않다.
7. 실제로, 그 그래프는 내려가다가
8. 이 점에서 수평접선을 만들고
9. 다시 돌아서 올라간다.
10. 따라서, 최소값은
11. s가 10일 때 발생한다.[10)]

10) 1. It [the derivative] is negative for s less than 10, 2. and positive as s greater than 10, 3. which means that, 4. the function is in fact decreasing for s less than 10, 5. and increasing for s greater than 10. 6. So there are actually not a lot of superfluous bands and wriggles in this curve. 7. Actually, it comes down. 8. And it develops horizontal tangent at this point. 9. And it turns back up again. 10. And so, indeed, the minimum occurs 11. when s is equal to 10.

AW는 우선 최적화 문제해결에 대표적으로 사용되는 수학적 정리를 제시한다 (줄 1-5). 이 부분에서 그의 발화는 '음(positive)', '양(negative)', '..보다 작다(less)', '..보다 크다(greater)', '감소(decreasing)', '증가(increasing)' 등의 직해적이고 형식적인 언어로 구성된다. 그 수학적 정리를 진술하는 동안 AW는 문제의 함수가 어떤 종류의 그래프를 갖는지 대략적으로 상상을 하게 되고 자신의 머리 속에 떠오른 그림을 학생들에게 간단히 설명한다(줄 6). 즉, 그 그래프에는 많은 굴곡이 들어있지 않다고 말한다. 그러나, 이 묘사는 AW와 학생들이 직면한 문제의 해결에 결정적이지 않다. 다른 각도에서 본다면, 학생들의 관점에서는 AW가 제시한 그래프의 묘사에 아직은 공감하기 힘들다. 따라서, AW는 좀더 자세한 묘사에 들어가고 이 부분에서 직해적 언어는 은유로 전환한다(줄 7-9). 즉, 함수의 그래프는 좌표 평면 상에서 자유로이 움직이는 입자처럼 묘사되고 그러한 은유적 상상을 통해 함수의 최소값이 $s=10$에서 발생한다는 결론에 도달하고 이 문제해결의 결과는 다시 직해적으로 표상된다(줄 10-11).

이 발화의 예 속에서도 직해적 언어와 은유 사이의 코드 변환을 관찰할 수 있고, 그 각각의 언어적 표상을 통해 제시되는 수학적 대상의 성격에서도 앞서의 예에서와 유사한 관계를 찾아볼 수 있다. 즉, 직해적 언어에서 함수는 문제 상황에서의 그 특성이 수학자에 의해 규정되는 통제의 대상인 반면, 은유적 표상 속에서 주어진 함수는 의인화되어 생명력을 가지고 스스로의 움직임을 결정하는 능동적인 존재로 해석된다. 물론, '증가' '감소'라는 표현 속에서도 함수가 의인화되어 스스로 어떤 방향을 향해 움직여 가는 것으로 생각할 수 있지 않을까' 하는 질문이 제기될 수 도 있을 것이다. 그러나, '증가/감소'와 '올라가기/내려가기(coming up/ down)' 사이의 차이를 비교한다면 전자의 경우 독립변수를 적절히 조작한다는 것을 전제로 한다는 점을 지적할 수 있다. 특히 수학적으로 "함수 f가 증가한다"는 것은 "만약 $x<y$이면 $f(x)<f(y)$"로 정의된다. 이 정의에 따르면 적절한 독립변수의 움직임은 오른 쪽으로 움직여 가는 것으로 한정된다. 이러한 측면에서, 적절한 움직임이 존재한다는 것은 암묵적으로 특정 조작을 그 변수에 가한다는 것으로 해석할 수 있고 이러한 해석은 "함수가 올라간다"라는 은유적 표현에 비해 "함수가 증가한다"라는 직해적 표현에서 통제의 의미가 상대적으로 강하게 표현된다는 주장으로 연결될 수 있다.

이처럼 직해적 언어와 은유적 언어는 표상되는 수학적 대상의 다른 속성을 부각시키고, 나아가, 전자는 수학적 사실에, 후자는 수학적 상상의 영역에 연관됨을 보았다. 그리고 이와 같은 대응관계로부터 우리는 위의 두 수학적 발화 속에서 동일한 패턴, 즉 '직해적 언어 → 은유 → 직해적 언어'라는 코드 변환을 통해 '수학적 사실 → 수학적 상상 → 수학적 사실'로의 변환과정을 관찰할 수 있었다. 그러나 이 변환 과정은 분리된 세 단계가 아닌 유기적인 전체로 파악되어야 하며, 실제로 직해적 언어와 은유 사이의 코드 변환은 수학적 사고에서 수학적 사실과 수학적 상상 사이의 변증법적 상호작용을 보여주었다. 좀더 구체적으로 말하자면, 은유에 기초한 수학적 상상의 중재를 통해 하나의 수학적 사실이 다른 수학적 사실로 매개된다는 것이다. 이처럼 객관적인 수학적 사실은 주관적인 수학적 상상의 산물이라고 볼 수 있으며, Lakoff와 Nunez가 지적하듯이, 최소한의 수학적 사실의 체계는 은유를 통한 수학적 상상을 통해 그 의미가 풍성해지고 체계 역시 규모적으로 번성하게 된다.

그렇다면, 수학적 상상은 완전히 주관적인

것인가? 위의 예들에서 볼 수 있듯이, 주관적인 수학적 상상은 한 개인의 임의적인 백일몽이 아니라 객관적인 수학적 사실에 근거한다. 예를 들어, 수학적 상상에서 함수의 그래프는 의인화되어 스스로 올라갔다 내려갔다 움직이는 듯 보이지만, 실재로 이 상상의 이면에는 함수의 행동과 그 도함수의 부호 사이의 관계에 대한 이해가 존재한다. 이러한 주관적 상상의 객관적 측면을 보여주는 흥미로운 부분이 바로 줄 8이다. 그 부분에서 AW는 함수의 최소값이 발생하는 점에 대해 언급하고 있는데 그 점에 대해 설명하는데 상대적으로 긴 시간을 할애하고 있으며 함수 또한 자신의 일생에 중요한 순간을 스스로 구성하고 있는 가장 능동적인 상태로 묘사되고 있고 그 묘사 속에 함수의 최적값이 발생할 때 그 점에서의 도함수는 0이 된다는 새로운 수학적 사실의 발상이 이루어지고 있다. 따라서, 수학적 사실의 체계는 수학적 상상을 통해 그 의미의 깊이를 더해가고 지식의 체계로서 확대되어 가는 반면, 수학적 상상 역시 그 시점에 공유된 수학적 지식에 의해 조건화되는, 다시 말해, 수학적 사실과 수학적 상상 사이의 변증법적 관계를 볼 수 있다.

V. 문화적 모델로서 수학적 은유: 수학 학습 경험의 사회문화적 구성에 대한 이해

최근 인지언어학분야에서 산출된 은유이론은 인간의 개념적 사고, 특히, 수학적 사고의 이해에 새로운 이해의 지평을 열었다고 평가할 수 있다. 이 새로운 은유이론은 그 동안 수학교육이론에서 지지되어온 구성주의적 관점을 설명하는데 유용한 이론적 언어를 제공했고 수학학습에서 경험의 중요성을 그 이론 나름의 독특한 관점에서 부각시켰다고 평가할 수 있다. 이러한 이론적 발달의 맥락에서, 본 연구는 인지언어학적 은유이론을 수학학급 안에서의 구체적이고 실제적인 발화적 상황에 적용함으로써, 은유에 대해 거시적인 관점을 취한 인지 언어학적 은유이론을 보완하려했다.

구체적으로 설명하자면, Lakoff와 Nunez는 은유를 직해적인 언어로부터 분리하여 그 자체를 분석하는 것에 연구의 초점을 두었고, 결과적으로, 함수를 설명하는데 "왜 다름 아닌 기계나 여행 등의 특별한 종류의 경험만이 선택되어 수학적 은유를 구성하는가?"라는 의문에 대해서는 상대적으로 빈약한 대답을 제공하고 있다. 그러나, 본 논문에서는 은유의 선택에 대한 질문이 수학 학급에서 학습자가 경험하는 수학 학습의 중요한 일면에 연관되며, 따라서, 그 질문에 대한 대답은 수학 학급에서 학습자가 수학을 의미있게 성공적으로 학습할 수 있는 환경을 조성하는데 중요한 시사점을 제공한다고 생각된다. 즉, Lakoff와 Nunez의 이론이 설명하듯, 은유를 통해 학습자의 일상적 경험으로부터 누적된 지식이 수학적 이해에 도입된다고 본다면, 수학적 은유는 무제한 구성될 수 있을 것이다. 그러나, 모든 은유가 '수학적으로' 타당한 것일까?

본 연구결과에 따르면, 이 질문에 대한 대답은 부정적이다. 수학자들은 나름대로 독창적인 은유를 고안하여 자신의 수학적 아이디어를 전달하는 데 사용하지만, 때로는 사용된 은유가 타당한 것인지 그 자체가 수학적 토론의 대상이 되는 경우도 관찰할 수 있었다. 예를 들어, 한 기하 수업에서, AW는 토러스(torus) 위에서 정의된 조화진동(harmonic oscillation)에 대해 강의했다. 그러나 그 개념은 학생들의 수학적 수준에 비추어 볼 때 다소 추상적이었고, 학생들

은 어떤 구체적인 예를 얻고자 했다. 그 수업이 끝난 후 몇몇 학생이 AW에게 그들이 알고 있는 비디오 게임에 대해 설명하며 좌표평면화된 토러스 위에서의 조화진동이 그 비디오 게임에서 점의 움직임과 수학적으로 동일한 것인지, 즉 '비디오의 은유'를 문제의 토러스 상의 조화진동을 이해하는 데 적용할 수 있는지 질문한다. 그 학생들이 묘사한 비디오 게임에서는 점으로 표상되는 물체가 자유자재로 움직여 다니는데 정해진 각도의 방향으로 직선적으로 움직이다가 화면이 끝나는 곳에서 일시적으로 사라지고 곧 그 화면의 맞은 편에 평행으로 놓인 면에서 다시 나타나 동일한 각도를 유지하며 다시 직선운동을 시작한다. 이에 AW는 토러스의 위상적 구조가 그 비디오 게임 화면의 구조와 동일함을 확인하고 또한 게임에서 입자의 움직임이 조화진동과 수학적으로 동일함을 확인함으로써 비디오 게임 은유가 유용하다고 판단하고 실제로 그는 다음 강의에서 학생들에게 토러스 상의 조화진동에 대해 구체적인 이미지를 주기 위해 그 은유를 사용했다.

뿐만 아니라, 수학자들은 자신의 개인적 경험으로부터 수학적 사고에 유용한 은유를 구성하기 때문에 한 수학적 개념을 표상하는 데 다양한 수학적 은유가 사용되는 반면, 앞서 보았듯이, 함수의 표상에서 기계를 조작해본 경험이나 여행을 해본 경험이 다른 종류의 경험에 비해 압도적으로 사용된다. 또한, 동일한 수학적 개념일지라도 구체적인 연구 주제마다 독특한 수학적 은유가 사용된다. 예를 들면, 함수를 어떤 관점에서 다루느냐에 따라, 기계의 은유, 여행의 은유, 선을 점의 집합으로 보는 은유 등의 다양한 은유 가운데 특정한 은유가 선택되었다. 예를 들면, 함수의 최적화 문제 해결에서는 여행 경험에 기초한 fictive motion metaphor가 가장 빈번히 사용되었고 선형변환에서는 기계의 은유, 연속성이나 함수의 극한에서는 선을 점의 집합으로 보는 은유가 빈번히 사용되었다. 이러한 현상들은 은유의 구성과 선택이 모종의 사회적 규범에 근거하고 있음을 암시하고, 이는 발화의 맥락 속에서의 수학적 은유의 분석은 인지언어학적 이론과는 질적으로 구별되는 수학 교수-학습에 대한 시사점, 구체적으로 수학 학습 상황에서의 사회문화적 규범의 측면과 관련된 시사점을 제공한다고 볼 수 있다.

우선 수학적 발화에서 코드변환의 분석은 수학적 사고의 서로 다른 두 단면을 보여주었다. 흔히 수학은 그 자체로 독립적으로 존재하는 초월적이고 보편적인 진리의 체계이며 인지적 조작의 대상으로 간주되어 왔고, 이러한 수학의 측면은 직해적 언어의 사용으로 잘 묘사되고 있다. 반면, 실제의 수학적 발화의 맥락에서 수학적 대상은 수학자의 수학적 상상 속에 살아 움직이는 능동적인 존재로 표상되었고, 이러한 종류의 표상은 은유에 의존한다. 이러한 맥락에서 수학적 발화 속에서 관찰된 직해적 언어와 은유 사이의 코드변환은 수학 교수-학습이 단순한 기술의 영역을 넘어선다는 것, 즉, 수학 수업에서 교사가 가르치는 것은 단순히 가치중립적인 수학적 기술과 정보의 집합뿐만이 아니라 나아가 은유와 은유적인 몸동작(gesture)의 사용을 통해 전달된 수학적 상상의 능력까지 포함함을 시사한다.

또한 코드변환의 분석은 수학적 사실과 수학적 상상 사이의 변증법적 상호작용 과정을 드러내줌으로 이성주의적 전통 속에서 고수되어 온 주관과 객관에 대한 이분법적 관점을 반박하였다. 주관과 객관 사이의 변증법적 관계를 보여주는 현상 가운데 가장 흥미로운 것은 의인화된 수학적 대상 속에 수학자 자신을 투사하여 수학자 자신이 수학이 되는 주관적 연루

현상(subjective involvement)이다.

> "음수는 크기가 작아질수록 증가한다. 만일 우리가 −100에서 −1로 가면, 우리는 앞으로 움직이고 있는 것이다 ((AW는 교실 바닥을 바라보며 앞으로 걸어간다)). 우리는 수직선의 오른쪽으로 움직이고 있다. 따라서 이 함수는 증가하고 있다."[11]

AW의 미적분학 수업에서 관찰된 위의 수학적 발화 속에서도 우리는 코드의 변환 관계를 통해 앞에서 설명한 수학적 사실과 수학적 상상 사이의 변환 패턴을 찾아볼 수 있다. 그러나, 이 예를 통해 지적하고 싶은 것은 AW가 수를 직선 위를 움직여 가는 점으로 은유화함과 동시에 나아가 자신이 직접 그 점이 되어 점의 관점에서 사고하는, 다시 말해, 주관과 객관의 벽이 완전히 허물어지는 주관적 연루현상이다. 이 발화의 예에서, AW는 학생들에게, 음수의 절대값이 작을수록 커진다는 사실을 지도하고 있다. 그 학급 학생들의 수학적 전문성은 상대적으로 낮은 수준이었으므로, 이 명제는 때로 혼동을 야기하기도 했다. 따라서, AW는 이 명제를 보다 의미있게 전달하기 위해 은유와 몸동작을 사용한다. 즉, 수를 직선 상의 점으로 보는 은유를 사용함으로써, 음수의 절대값이 커질수록 원점을 향해, 즉 앞을 향해 움직인다는 것, 즉 수직선의 은유체계 속에서 증가함을 보여준다.

이처럼 위의 AW의 수학적 발화는 관련된 수학적 사실의 이해를 위해 수학에 대해 사유하는 수학자 자신이 직접 점이 되어 점의 관점에서 주어진 움직임, 즉 앞을 향해 나가는 것의 의미를 파악하는 수학적 사고에서의 주관적 연루경험(subjective involve- ment)을 부각시키며, 이처럼, 수학적 상상, 또는 그것을 통해 표출되는 수학적 주관은 수학적 사고에서 본질적이며, 실질적으로 수학적 사실, 또는 수학적 객관을 규정함을 알 수 있다.

결과적으로, 수학적 발화 속의 코드 변환 분석을 통해 본 논문의 논의는 수학적 주관과 수학적 객관이라는 주제에 초점을 두게 되었다. 그리고 위에 제시된 수학적 발화의 분석을 통해 수학적 주관은 수학적 객관을 규정하고 동시에 수학적 주관은 수학자가 공유하고 있는 수학적 객관에 의해 조건화됨을 보았다. 이러한 맥락에서 그 동안 수학적 주관이 열등한 종류의 지식으로 취급되어온 것은 수학적 주관에 대한 왜곡된 해석에 근거함을 지적할 필요가 있다. 구체적으로, 수학적 주관은 그것이 공유된 사회적 지식으로서 수학적 객관에 의해 조건화된다는 면에서 사적인 수학적 견해와는 구별되어야한다. 즉, 수학적 주관은 한 수학자 개인의 구체적인 수학적 경험과 분리될 수 없지만 동시에 그와 관련된 공유된 수학적 사실과 규범에 대한 이해를 전재로 한다는 면에서 개인의 임의적인 해석에 근거한 사적인 견해와는 구분된다는 것이다.

이러한 수학적 주관과 수학적 객관 사이의 변증법적 관계에 대한 논의가 제공하는 교육적 시사점은 무엇인가? 앞서 살펴보았듯이, 수학적 객관은 수학적 주관으로부터 탄생한다. 그러나, 여기서 지적되어야할 점은 그러한 변환과정이 자연적이고 가치 중립적인 것이 아니라, 그 변환을 행하는 수학자들이 속해있는 사회가 역사적으로 문화적으로 발전시켜온 사회적 규범과 가치에 의해 조건화되는, 다시 말해,

11) "When a negative number gets smaller and smaller in magnitude, it's actually increasing. If we go from -100 to -1, we're moving forward ((AW is walking forward as looking down the floor)). We are moving to the right of the number line. So this function is actually increasing."

사회문화적 현상이라는 점이다(Bloor, 1994; Joseph, 1994; Ju, 2000; 2001; Pickering & Stephanides, 1992; Restivo, 1990; 1994). 주관과 객관의 변증법적 관계에서 사회문화적 측면을 부각시켜주는 것은 개인의 구체적인 경험으로부터 은유를 구성할 때 모든 종류의 경험이 타당한 것으로 받아들여지지 않는다는 점이며, 이는 다양한 종류의 경험 가운데 주어진 수학적 개념에 대해 한 사회가 공유한 문화적 모델에 적합한 경험에 기초한 은유만이 타당한 것으로 평가된다는 것을 의미한다.

이러한 사실을 수학 교수-학습 맥락과 연관시켜 생각해 볼 때, 학습자는 교사가 제시하는 수학적 개념을 이해하기 위해 은유를 구성하게 되는데, 만일 이 은유가 수학적 개념의 문화적 모델과 부합되지 않는다면 그 은유를 통해 표상된 그의 수학적 사고는 성공적인 것으로 평가되지 않음을 지적할 수 있으며, 본 은유의 사회문화적 접근은 수학 학습에서 학습자가 경험하는 수학적 곤란이 단순히 학습자 개인의 인지적 결함의 문제가 아님을 시사한다. 또한, 은유가 수학적 사고에 본질적이고 따라서 수학적 개념 지도에 많은 잠재성을 가지고 있다고 하더라도, 수학 교사가 수학적 내용의 분석을 통해 구성한 유용한 제시한 수학적 은유 속에 내재한 경험이 학습자의 입장에서 수용되지 않으면 그 은유는 교수학적으로 의미가 없는 것이라고 할 수 있다.

실제로, 앞서의 수학적 사고에서 주관과 객관 사이의 변증법적 관계에 대한 논의에 비추어 볼 때, 수학 교사에 의해 제시되는 수학적 개념은 사회적으로 공유된 객관적 개념과 그것을 전달하는 교사의 주관적 이해의 혼합체라고 할 수 있다. 따라서, 학교 밖에서 학습자가 가지는 수학적 경험의 분석을 통해 수학 교사 자신의 수학적 관점뿐만 아니라, 학습자의 수학적 관점을 포용할 수 있는 은유를 개발함으로써 수학적 개념 지도에서 은유의 효율성을 높일 수 있을 것으로 생각된다.

위에 제시된 문화적 모델로서 수학적 은유에 대한 논의는 수학 학급에서 진행되는 교수-학습 상황의 복잡성을 수학적 발화의 분석에 의해 포착된 '수학적 사실과 수학적 상상', '객관과 주관', 그리고, '사회와 개인' 이라는 이분법적 양단의 설정을 통해 묘사하려 하였다. 그러나, 본 논문은 그들 이분법 속의 두 요소를 상반되고 대립된 관계로 보기보다는, 구체적인 수학적 발화의 맥락 속에서 궁극적으로 서로를 보완, 규정해 가는 변증법적 관계에 놓여있음을 보였고 이러한 변증법적 관계의 묘사를 통해 개인의 수학적 사고 속에 내재한 사회문화적 측면을 부각시키려하였다. 본 논문은 수학적 발화를 코드 변환의 관점에서 접근함으로써 수학적 발화를 인위적으로 수학적 사실과 수학적 상상의 두 범주로 구분하였다. 그러나, 발화의 어느 부분도 이들 가운데 하나로 규정될 수는 없는 것이다.

예를 들어, 앞에 제시된 함수의 최적화 문제해결에 대한 수학적 발화의 예에서, AW의 문제 해결적 사고는 사용된 언어의 종류에 따라 수학적 사실과 수학적 상상으로 범주화되었다. 그러나, 수학적 사실을 진술하는 순간에 AW의 인지적 행동이 완벽하게 사실의 영역에 속한다고 할 수 있을까? AW가 수학적 사실의 진술을 마침과 동시에 그 함수의 그래프에 대한 이미지를 이미 가지고 있었다는 사실 (줄 6 참조)을 참조한다면 위의 질문이 시사하듯, 수학적 사고에서 사고와 상상을 완벽히 분리한다는 것은 불가능하며 나아가 무의미하다. 앞서 간단히 언급했듯이, 수학적 전문성이 고도화될수록 수학적 사실은 수학적 상상을 보다 직접적으로 조건화하고 저자는 이러한 자동화가 개인의 수

학적 의식이 사회적으로 공유된 수학적 사실의 체계에 의해 조건화되는 것으로 해석했다. 이러한 조건화, 달리 말해, 질적으로 다른 두 지식 체계 사이의 변증법적 통합과정이 Vygotsky에 의해 대표되는 사회문화적 인지이론의 관점에서는 인간의 인지적 발달로 정의되며, 이러한 관점에서 수학 교수-학습이란 한 사회에 의해 역사 문화적으로 구성되어온 공적인 지식으로서 수학을 대표하는 교사와 문화적 체계로서의 수학에 익숙하지 않은 초보자로서의 학습자 사이에 수학이라는 문화체계를 매개로 한 교섭 과정으로 볼 수 있으며, 성공적인 수학학습이란 그러한 교섭 과정을 통해 학습자의 수학적 사고가 사회적 수학체계와 변증법적 상호 규정 과정을 통해 재조정되는 것으로 볼 수 있다 (Lave & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978).[12)]

끝으로, 위에 제시된 수학 교수-학습에 대한 사회문화적 관점을 본 고를 통해 다루어진 '객관'과 '주관'에 대한 이분법과 더불어 '교사'와 '학습자'라는 이분법적 관계에 적용한다면, 수학학급에서 학습곤란은 학습자 자신의 인지적 결함보다는 교사에 의해 제시되는 공적인 지식으로서의 수학, 그리고 그것을 공적인 지식으로 변환시키는 사회적 규범과 가치에 대한 이해의 부족에서 기인하는 것으로 설명할 수 있다. 현대 은유이론이 주장하듯, 은유는 수학적 사고에 핵심적이며 학습자는 자신의 개인적 경험에 기초한 은유를 통해 수학적 개념을 표상한다.

그러나, 앞서 살펴보았듯이, 수학적 개념의 은유적 표상이 기초하고 있는 경험이 수학 사회에 의해 타당한 것으로 평가되지 않는다면, 달리 말해서, 학습자가 사용한 은유가 수학 사회에 의해 공유된 문화적 모델에 부합하지 않는다면, 그 은유를 통해 표상되는 수학적 사고는 부적절한 것으로 간주된다. 실제로 연구 결과, 학습자가 학교에서 제시되는 수학 문화와는 상이한 종류의 수학 문화에 익숙해져 있을 때 수학 학습에 심각한 문제를 유발함을 입증되었으며, 이와 같은 '문화적 모델 사이의 부조화'에 대한 조명은 수학 교실에서의 문화적 모델 사이의 부조화는 학습자가 수학 학습에서 경험하는 곤란이 전적으로 개인적인 인지적 결함의 문제가 아니라 사회문화적으로 구성됨을 시사한다(Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993; Reed & Lave, 1981; Scribner, 1977; Voigt, 1998).

나아가, 이러한 관점에서, 기술적인 수학의 지도는 수학 교사의 공적 지식으로서의 교과목에 대한 이해를 넘어서, 교사가 사회화되어온 수학적 체계와는 다른 수학적 체계에 익숙해져 온 학습자의 수학적 사고에 대한 이해, 다시 말해, 수학적 인식론의 상대성과 다양성에 대한 인식을 전제로 하며, 이러한 측면에서, 본 은유의 사회문화적 분석은 수학학급에서의 인식론적 차이에 대한 이해의 지평을 여는 것을 그 궁극적인 목표로 한다.

12) 본 논문의 논의는 그동안 누적되어온 수학에 대한 비교문화적 연구 결과에 근거한다 (de la Rocha, 1986; Lave, 1988; Lave, Murtaugh, & de la Rocha, 1984; Murtaugh, 1985; Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993; Reed & Lave, 1981; Saxe, 1982; 1985; Schliemann & Acioly, 1989; Scribner, 1977; 1986). 이 연구 결과들은 수학이 초월적이고 보편적인 지식이 아니라 한 문화적 집단의 수학적 경험을 규정하는 문화에 의해 조건화되는 지식이며 수학적 사고의 발달은 바로 그 특정한 문화적 규범에 의해 정의됨을 증명했다. 이러한 관점에서 본다면, 수학학급은 나름대로의 수학적 문화를 가진 문화적 집단으로 볼 수 있고, 본 논문의 논의는 이러한 문화적 집단으로서의 수학 학급에 대한 이론적 가정에 기초한다고 할 수 있다 (Cobb, Wood, & Yackel, 1996; Lampert & Blunk, 1998; Voigt, Seeger, & Waschescio, 1998).

참고문헌

Blom, J. P., & Gumperz, J. J. (1972). Social meaning in linguistic structure: Code-switching in Norway. In J. J. Gumperz & D. Hymes (Eds.), *Directions in sociolinguistics: The ethnography of communication*(pp. 407-434). New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Bloor, D. (1994). What can the sociologist of knowledge say about 2+2=4? In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: An international perspective* (pp. 21-32). London and Washington, D. C.: The Falmer Press.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1996). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E. Forman, N. Minick, & A. Stone (Eds.), *Context for learning: Sociocultural dynamics in children's development*(pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

de la Rocha, O. (1986). *Problems of sense and problems of scale: An ethnographic study of arithmetic in everyday life.* Unpublished Doctoral Dissertation, University of California.

Eklof, P. C. (1976). Whitehead's problem is undecidable. *American Mathematical Monthly*, 83(10), 775-87.

Gelman, R., & Geistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge: Harvard University Press.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.* New York: Academic Press.

Gumperz, J. J. (1982). Conversational code switching. In *Discourse strategy*(pp. 59-99). New York: Cambridge University Press.

Gumperz, J. J., & Levinson, S. C. (Eds.) (1996). *Rethinking linguistic relativity.* New York: Cambridge University Press.

Gumperz, J. J., & Hymes, D. (Eds.) (1972). *Directions in sociolinguistics: The ethnography of communication.* New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Hymes, D. (1974). Toward ethnographies of communication. In *Foundations in sociolinguistics: An ethnographic approache*(pp. 3-28). Philadelphia: University of Pennsylvania Press.

Joseph, G. G. (1994). Different ways of knowing: Contrasting styles of argument in Indian and Greek mathematical traditions. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: An international perspective*(pp. 194-207). London and Washington, D. C.: The Falmer Press.

Ju, M. K. (2000). Communicative routines in mathematics class. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 443 724)

Ju, M. K. (2001). *Being a mathematician: An ethnographic account of the cultural production of a mathematician at a University.* Published Doctoral Dissertation, University of California.

Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of meatphor. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought*(pp. 202-276). New York: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors* *we live by*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to western thought*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., & Nunez, R. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*(pp. 21-89). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lakoff, G., & Nunez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.

Lampert, M., & Blunk, M. L. (Eds.). (1998). *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning*. New York: Cambridge University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. New York: Cambridge University Press.

Lave, J., Murtaugh, M., & de la Rocha, O. (1984). The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Rogoff, & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Development in social context*(pp. 67-94). Cambridge: Harvard University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Martin, D. A. & Solovay, R. M. (1970). Internal cohen extensions. *Annals of mathematical logic*, 2, 143-178.

Murtaugh, M. (1985). The practice of arithmetic by American grocery shoppers. *Anthropology & Education Quarterly*, 16, pp. 186-192.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Nunez, R., Edwards, L., & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3), 45-65.

Ortony, A. (1993). Metaphor, language, and thought. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought*(pp. 1-16). New York: Cambridge University Press.

Pickering, A., & Stephanides, A. (1992). Constructing quaternions: On the analysis of conceptual practice. In A. Pickering (Ed.), *Science as practice and culture*(pp. 139-167). Chicago and London: The University of Chicago Press.

Quinn, N. (1991). The cultural basis of metaphor. In J. W. Fernandez (Ed.), *Beyond metaphor: The theory of Ttopes in anthropology*(pp. 56-93). Stanford, CA: Stanford University Press.

Reddy, M. J. (1993). The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought*(pp. 164-201). New York: Cambridge University Press.

Reed, H. J., & Lave, J. (1981). Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition. In R. W. Casson (Ed.), *Language, culture, and cognition:*

Anthropological perspectives(pp. 437-455). New York: MacMillan Publishing Co., Inc.

Restivo, S. (1990). The social roots of pure mathematics. In S. E. Cozzens, & T. F. Gieryn (Eds.), *Theories of science in society*(pp. 120-143). Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.

Restivo, S. (1994). The social life of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: An international perspective*(pp. 209-220). London and Washington, D. C.: The Falmer Press.

Rudin, M. E. (1969). Souslin's conjecture. *American Mathematical Monthly*, 786, 113-19.

Saxe, G. (1982). Developing forms of arithmetical thought among the Oksapmin of Papua New Guinea. *Developmental Psychology*, 18 (4), 583-594.

Saxe, G. (1985). Effects of schooling on arithmetical understandings: Studies with Oksapmin children in Papua New Guinea. *Journal of Educational Psychology, 77* (5), 503-513.

Schliemann, A. D., & Acioly, N. M. (1989). Mathematical knowledge developed at work: The contribution of practice versus the contribution of schooling. *Cognition and Instruction*, 6 (3), 185-221.

Schon, D. A. (1993). Generative metaphor: A perspective on problem-setting in social policy. In A. Ortony (Ed.), *Metaphor and Thought*(pp. 137-163). New York: Cambridge University Press.

Scribner, S. (1977). Modes of thinking and ways of speaking: Culture and logic reconsidered. In P. N. Johnson-Laird & P. C. Wason (Eds.), *Thinking: Readings in cognitive science*(pp. 483-500). New York: Cambridge University Press.

Scribner, S. (1986). Thinking in action: Some characteristics of practical thought. In R. J. Sternberg, & R. K. Wagner (Eds.), *Practical intelligence: Nature and origins of competence in the everyday world*(pp. 13-30). New York: Cambridge University Press.

Shelah, S. (1974). Infinite Abelian groups - Whitehead's problem and some constructions. *Israeli Journal of Mathematics*, 18, 243-56.

Solovay, R. M. & Tennenbaum, S. (1971). Cohen extensions and Souslin's problem. *Annals of Mathematics*, 94, 201-45.

Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. In J. Voigt, F. Seeger, & U. Waschescio (Eds.), *Culture of mathematics classroom (p. 191-220)*. Cambridge, NY: Cambridge University Press.

Voigt, J., Seeger, F., & Waschescio, U. (Eds.) (1998). *Culture of Mathematics Classroom*. Cambridge, NY: Cambridge University Press.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society: The Development of higher psychological processes* (Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, and E. Souberman). Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Analysis of Mathematical Metaphor from a Sociocultural Perspective

Mi-Kyung Ju (KNUE)

The notion of metaphor has been increasingly popular in research of mathematics education. In particular, metaphor becomes a useful unit for analysis to provide a profound insight into mathematical reasoning and problem solving. In this context, this paper takes metaphor as an analytic unit to examine the relationship between objectivity and subjectivity in mathematical reasoning. Specifically, the discourse analysis focuses on the code switching between literal language and metaphor in mathematical discourse. It is shown that the linguistic code switching is parallel with the switching between two different kinds of mathematical knowledge, that is, factual knowledge and mathematical imagination, which constitute objectivity and subjectivity in mathematical reasoning. Furthermore, the pattern of the linguistic code switching reveals the dialectical relationship between the two poles of mathematical reasoning.

Based on the understanding of the dialectical relationship, this paper provides some educational implications. First, the code-switching highlights diverse aspects of mathematics learning. Learning mathematics is concerned with developing not only technicality but also mathematical creativity. Second, the dialectical relationship between objectivity and subjectivity suggests that teaching and learning mathematics is socioculturally constructed. Indeed, it is shown that not all metaphors are mathematically appropriated. They should be consistent with the cultural model of a mathematical concept under discussion. In general, this sociocultural perspective on mathematical metaphor highlights the sociocultural organization of teaching and learning mathematics and provides a theoretical viewpoint to understand epistemological diversities in mathematics classroom.