大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.2, 307-320. Dec 2001

# 정적분과 응용- 교과서 내용의 균일성?*

석 용 징**

## Ⅰ. 서론

고등학교 수학교과서의 내용은 표현과 전개 방법에 있어 직관에 호소해야 하므로 이론적 엄밀성을 잃게 되는 것이 현실이다. 지난 수십 년 동안 여러 차례에 걸쳐 개정된 교과과정은 끊임없는 교육의 질적 수준 향상을 위한 노력으로 평가할 수 있다. 그러나 이러한 노력에도 불구하고 미분이나 적분 같은 고등한 수학 개념은 교과서의 구조적인 제약으로 전개상의 난맥을 보이고 있다(박세희, 1983). 특히 정적분과 응용에 대하여 대부분 14-19쪽에 그 내용을 제한함으로써 파생되는 어려움을 읽을 수 있다. 따라서 교과서의 지은이나 교사들이 최선의 방법으로 기술하고 가르쳐야 하는 현실이다.

중등 수학의 최종 목표인 미분적분법에서 엄밀성을 희생하고 기능적인 계산 기술을 강조하는 것은 효율성을 높이기 위한 어쩔 수 없는 선택이라고 치더라도 주제의 난이도와 중요성에 비추어 지나친 분량의 제한으로 기인하는 것으로 판단되는 지나친 metaphor 사용, 중요한 소재의 누락, 용어와 기호의 혼용 및 오용, 진술의 오류 등 국내의 고등학교 교과서들은 외국의 경우에 비추어 최선이라고 표현하기에 여러 가지 균일하지 않은 현상을 보이고 있다고 판단된다.

외국의 경우 교과 과정뿐 아니라 교과서 제작에도 심혈을 기울여 우리의 현실과는 다소 실정이 다르다고 할 수 있다. 저자들은 각 주제별로 작업을 완성하여 다년간에 걸친 작업 결과를 묶어 교과서를 완성한다고 한다(대한수학회, 2001).

한편 전통적으로 적분 단원에서 고안하는 힘 또는 참을성을 시험하는 다양한 계산 기술에 대한 문제들은 기술의 구사, 그 자체에 중점을 두었으나 적분 계산(상징기호 계산 및 수치 계산)을 수행하는 컴퓨터 환경의 보편성으로 인하여 우리는 적분 계산이라는 기능적인 측면으로부터 적분 개념, 그 자체로 관심을 옮길 수 있도록 하는 가능성을 생각할 수 있게 되었다 (Karian, 1992).

제 7차 중등수학 교육 과정에서는 미적분 단원을 고등학교 수학 1, II에서 감소시키고 미분적분이라는 선택 과목을 두어, 이에 따른 교과서들이 개발되고 있는 시점에서 중등 수학의 최고 목표인 정적분과 응용 부분에 대한 현행 국내 교과서의 고찰은 교육과정에 대한 토론 못지 않게 중요한 시점이다(교육부, 1988a, b)

따라서 본 연구에서는 제 6차 중등수학 교과과정에 따른 현행 고등학교 수학 II 교과서 중에서 임의로 6가지를 택하여 [가], [나], [다], [라], [마], [바] 라고 표시하고, 정적분과 응용에서 보이는 특징과 관련한 적합한 토론 주제

* 이 연구는 2000년도 강원대학교 학술진흥재단 기성회연구 일반지원에 의하여 수행됨.
** 강원대학교

를 도출하는 것이 본 논문의 목표이다. 이것을 검토하여 보다 효율성을 높일 수 있는 교재 개발에 도움이 되었으면 하는 것이 이 논문의 목적이며, 그러한 작업을 위한 적절한 주제들의 도출이라고 생각할 수 있다. 따라서 논문의 성격상 교육학적 논의를 지양하고 단순 비교와 상식적인 호소에 의지하여 적절한 논의 주제를 도출하기로 하며, 논문의 목적에 따라 다소 주관적인 견해가 나타나는 것은 토론의 성격으로 남겨두기로 한다.

## II. 정적분과 응용에 나타난 교과서 내용의 다양성

### 1) 정적분의 정의 과정과 공식화

리만(Riemann) 적분의 장점은 다음과 같은 일반성에 있다.

임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 다음이 성립하는 $\delta>0$가 있다.

$$\|\triangle x\| < \delta \text{ 이면 } \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\triangle x \right| < \varepsilon$$

이는 정적분 $\int_a^b f$ 이 리만 합(Riemann sum)

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\triangle x$$

로 임의의 정확도로 근사 될 수 있다는 것을 의미한다.

그러나, 수학뿐 아니라 모든 일이 그러하듯이 한 가지 장점은 다른 면에서는 단점이 되기도 한다. 그것은 정의에 포함된 두 가지 의존성에 있다.

① 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 내에서 $c_i$의 선택

② 분할 $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$의 선택

이와 같은 두 가지 의존성으로 인하여 리만 적분을 엄격하게 취급하는 것은 고등학교 수준에서 기술적으로 쉬운 일이 아니다(Berlinski, 1995).

수학 II 교과서에서는 이와 같은 엄밀성을 배제하고 직관과 간단한 상식적으로 호소에 의존하여 정적분을 정의하는데 다음과 같은 특징들을 보이고 있다.

[나], [라], [마], [바]에서는

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x,$$

$$\left(\triangle x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a+k\cdot\triangle x\right)$$

로 표시하여 각 소구간의 끝점에서의 함수값 $f(x_k)$로 지정하여 나타냈다. [바]에서는

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\triangle x$$

에서 명백히 또는 암묵적으로 각 소구간의 시작점을 택하여도 무방함을 언급하고 있다.

특히 [다]에서는

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\triangle x$$

로 나타내어 $x_k$ 대신 구간 $[x_{k-1}, x_k]$에 속하는 임의의 수 $c_k$를 대입하여도 위의 등식이 성립함을 서술하고 있는데, 이것은 리만 합

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\triangle x$$

의 극한값으로써 정적분을 소개하는 유일한 교재임을 발견할 수 있다.

우리는 이와 같이 정적분의 도입과정에서부터 표현이 균일하지 않음을 볼 수 있다. [나], [라], [마], [바]에서는 리만 합이 아닌 상합(upper sum) 또는 하합(lower sum)을 이용한 경우로 앞에서 언급한 바와 같이 편의상 어쩔 수 없는 선택이기는 하나, 후속 학습으로 전개되는 응용 단원에서 나타나는 다양한 공식화 과정에서 불가피하게 만나는 어려움을 생각하면 엄격성을 배제하고 직관에 의존하는 상식적 원칙을 사용하여 [다]에서와 같이 리만 합의 극

한으로 도입하는 것이 바람직하다고 판단된다.

정의(엄밀하게는 정적분의 정의가 아님)를 이용하여 직접 계산하는 기회를 제공함으로써 리만 합의 극한으로써의 정적분이 매우 번거로운 연산 과정인지 알도록 하는 일은 유의미한 학습경험이며, 이것을 통하여 기본정리가 얼마나 막강하며 영향력 있는 수학적 결과인지 깨닫게 해 주는 교육적 효과를 기대할 수 있다. 그러나 미분 단원에서는 정의에 따라 연습을 강조하는 것과 대조적으로, 대부분의 교과서에서는 다음 <표 1>에서 알 수 있듯이

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x$$

형태로 주어지는 무한급수를

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

형식으로 고쳐 쓰게 한 다음, 미적분의 기본정리를 이용하여 간접적으로 쉽게 계산하는 부분만 강조하고 있다. [가]에서만 간단한 예

$$\int_0^3 x^3$$

을 구분구적법을 이용하여 구하는 예를 통하여 리만 합을 구하고, 그 극한을 구하도록 함으로써 두 가지 과정을 동시에 비교하게 하여 그 차이점을 발견하도록 하고 있다.

<표 1>

| | 가 | 나 | 다 | 라 | 마 | 바 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 합을 구하고 그 극한을 직접 계산 | o | x | x | x | x | x |
| 무한합을 정적분으로 고쳐 계산 | o | x | o | o | o | o |
| 부분합의 극한 정적분 정의 | o | o | o | o | o | o |

참고로 [가], [다]에서는 다음과 같이 공식화한 것을 알 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)\frac{a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\triangle x$$

$$= \int_0^a f(x)dx$$

또는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{ka}{n}\right)\frac{a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x$$

$$= \int_0^a f(x)dx$$

특히 [나]에서는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\triangle x$$

와 같이 정적분의 정의를 하고, 이와 같은 새로운 연산의 의미를 곡선 아래 넓이와의 관계로 제한하여 전개하는데, 뒤에서 정적분의 응용에서 속도, 거리, 위치의 취급하면서 물리 내용을 직접 인용한 것과 같은 맥락으로 볼 수 있다.

대부분의 교과과정에서 전통적으로 교사나 학생의 고안하는 힘(또는 참을성)을 시험하는 다양한 적분 기술에 대한 문제들은 기술의 구사, 그 자체를 목표로 삼는 것처럼 보인다. 적분 계산(상징 기호 계산 및 수치 계산)을 수행하는 컴퓨터 환경의 보편성으로 우리는 적분계산이라는 기능적인 측면으로부터 적분 개념, 그 자체로 많은 관심을 옮길 수 있도록 해주는 변화를 맞고 있다. 따라서 응용 문제에서 리만 합으로 표현하고, 그 극한을 적분으로 표현하는 능력은 미적분학의 보편적인 응용 과정에서 필수적인 기술이다. 학생이 리만 합의 기초적인 개념과 그 극한을 적분으로 나타내기, 즉

$$\sum_i f(x_i)\ \Delta x \ \rightarrow\ \int f(x)\ dx$$

를 이해하고 있다고 해도 일반화로의 도약과 공식으로 추상화하기에는 역부족이다. (Karian, 1992). 정적분의 기호로 고치는 과정은 공식화 과정에서 이용되는 매우 영향력이 있는 과정이

므로 반드시 강조되어야 하는 것이다(Berlinski, 1995).

적분에서 어려운 계산 기능만을 강조하는 일을 완화하고, 적분을 응용 상황에 연관시키는 일에 관심을 기울일 수 있게 하며, 적분 형식이 내포하는 정보를 이해할 수 있도록 지도하여야 한다.

이와 관련하여 현행 교과서들이 적분의 응용, 특히 부피 공식(회전체의 부피)을 소개하는 과정에서 단면의 넓이에 관한 정적분이라고 metaphor를 사용하여 소개하고 있는 데, 이것은 중요한 수학적 연산 과정을 무시한 표현이며, 이후에 나타나는 여러 가지 응용 공식들을 소개하는 데에도 도움이 안 되는 진술 방법이다.

정적분의 정의 과정에 있어 [라], [마]에서는 폐구간 $[a, b]$상에서 함수 $f(x)$가 연속이고 $f \geq 0$를 가정하여

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \triangle x$$

는 '직사각형들의 넓이의 합'으로써, 이 경우의 정적분은 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이에 가까워짐을 설명하고 있다.

여기서 넓이는 전혀 새로운 수학적 연산으로 새롭게 창조되는 것이며, 응용에서는 $f>0$인 연속 함수에 대하여 정의하는 것이 매우 유용하다(Berlinski, 1995).

$$\text{AREA} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \triangle x$$

그러나 [가], [나], [다], [바] 에서는 연속함수 $y=f(x)$에 대하여 $f \geq 0$라는 조건 없이 정적분의 정의하고 있으나 정의 과정에서는 '$n$개의 직사각형들의 넓이의 합'이라고 하고 있으므로 정확하지 않은 진술이다. 단, [바]에서는 특히 $f(x) \geq 0$일 때 정적분은 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 $x$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이임을 별도로 언급하고 있다. 그러나 [다]에서는 이와 같은 별도의 진술마저 하지 않고 있다.

특히 [바]에서는 넓이와 관련하여 물리교과에서의 전개 방식과 비슷하게 하고 있다. 참고로 고등학교 물리에서는 물체의 직선 운동에서 먼저 등가속도 운동일 때, 시간-속도 그래프를 도입하는 과정을 살펴보면, 속도 함수 그래프 아래의 사다리꼴 넓이를 이동 거리와 관련시켜 지도하고 있음을 볼 수 있다.

일반적으로 등가속도 운동이 아닌 직선 운동에서는 속도함수가 나타내는 곡선 아래의 넓이를 사다리꼴들로 채워나가는 과정으로 넓이와 이동 거리를 관련시켜 지도하는데, 이것은 대학에서 정적분을 근사 하는 방법의 하나인 사다리꼴 근사 방법을 상식적 호소에 의존하는 것이다. 첫째로 등가속도 운동에서는 시간-속도 그래프가 직선으로 나타나고, 이동 거리는 평균 속도

$$\frac{v+v_0}{2}$$

개념을 사용하여 간단히 구할 수 있다. 사다리꼴의 넓이와 같은 양의 직사각형의 넓이를 생각하게 되는 것이다. 이것은 [적분의 평균값]에 대한 상식적 호소에 의존한 것이다. 일반적으로 등가속도 운동이 아닌 경우에는 그 시간-속도 그래프가 일반적으로 곡선으로 나타나고, 곡선 아래의 넓이는 시간 간격을 작게 하면 앞의 경우로 근사하여 생각하게 함으로써 결국 사다리꼴을 사용하는 과정이 나타나게 된 것이다. 이와 같이 고등학교 물리 교과에서는 곡선 아래의 넓이 개념만이 이용되고 있고 있으며, 수학적 연산으로서의 정적분 개념은 전혀 사용되고 있지 않다(장준성 외 2인, 1995a, b).

여기서 우리는 인접 교과인 물리와 수학의 지도 계열성 문제 및 취급 방법에 큰 간격이 있음을 지적하여 둔다. 이것에 대한 수학교육 전문가와 과학교육 전문가의 연구가 긴밀한 후

속 연구로 남겨 두기로 한다.

2) 여러 가지 정리 [치환적분법 I, II]

정적분의 치환적분법의 소개에 대하여 다음 두 가지 유형으로 나누어 선택적으로 지도하고 있다. 두 가지 형식을 구분하여 설명하는 교과서는 [마] 이고, 나머지는 모두 정리 중 한가지를 소개하는 데 아래의 형식 2와 같이 소개하는 교재는 [나], [라], [바] 이며, 형식 1과 같은 방향을 강조하는 것은 [가], [다]이다. [가], [다]에서는 비록 예시일지라도 형식 2를 소개하고 있으므로 정리 1의 형식과 혼동의 우려가 있으므로 두 형식을 동시에 소개하여 차별화 하여 구분하는 것이 형식을 이해한다는 목적에 부합한다.

[정적분의 치환적분법 1]

| |
|---|
| $t=g(x)$라 두고 $\alpha=g(a), \beta=g(b)$이면 $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{a}^{b} f(t)dt$ |

정적분의 치환적분법 1에서 변수 $t$와 $x$를 바꾸면 다음 공식이 나온다.

[정적분의 치환적분법 2]

| |
|---|
| $x=g(t)$로 두고 $\alpha=g(a), \beta=g(b)$ 이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt$ |

특별히 첫 번째의 형식은 두 번째 형식과는 구별하여 다음과 같이 취급한다.

간단히 부정적분에서는 다음과 같은 학습자료를 이용하면 형식을 이해하기 쉽다.

$$\int (x^2+1)^2 \cdot 2x=\frac{(x^2+1)^3}{3}+C$$

여기서

$$f(x)=x^2,\ \ g(x)=x^2+1$$

로 두면 피적분함수

$$(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

는

$$f(g(x)) \cdot g'(x)$$

꼴이므로 우변의 적분 결과는 $f$의 한 원시함수 $F$가

$$\frac{1}{3}x^3$$

이므로 $F(g(x))$ 꼴인

$$\frac{1}{3}(x^2+1)^3$$

로 이해하라는 의미를 갖고 있다.

[가], [다]에서는 "$x$를 $t$의 함수 $g(t)$로 바꾸어 부정적분을 구하는 것이 치환적분법이다"라고 진술하는데, 이것은 치환적분법을 한 가지 형식(정리 1)으로 제한하는 것이므로 주의를 요한다. 한편 [나]에서는 "합성함수 $f(g(x))$의 $g(x)$를 $u$로 치환하여 적분하는 방법을 치환적분법이라고 한다"라고 진술하여 치환적분법을 정리 2의 형식으로 제한하고 있는 데, 이것도 마찬가지로 부적절한 표현이다.

치환적분법을 진술하는 과정에 있어서도 $t=g(x)$가 '미분가능'이라고 진술한 것은 [나], 특히 '미분가능'이며 '증가(또는 감소)'라고 엄격히 진술한 것은 [라]이며, 나머지는 그러한 조건들 없이 소개하고 있다. [나], [라]에서도 증명 과정에서 그러한 조건이 쓰이고 있지 않다는 것은 조건 진술이 불필요함을 반증하고 있다. 치환적분법의 목적이 적분하는 형식을 강조하고자한 것이라면 더욱 그러하다. '미분가능'이라는 용어를 사용하는 것은, 피적분함수가 결국 '적분가능'이라는 사실을 사용하는 것과 같은 맥락의 의미인데, 특히 후자의 수학적 개념은 대학 수준의 고등 미적분(advanced calculus)에서 취급하는 것임을 고려한다면 "미분

가능"이라는 용어의 사용은 부적절하다 할 수 있겠다(박세희, 1983).

### 3) 여러 가지 정리 [미적분의 기본정리 I, II]

미적분의 여러 가지 개념들이 결코 사소하지 않은 방식으로 연결되고 있음을 미적분의 기본정리를 이용하여 알 수 있는 것이다. 위치의 미분이 속도이고, 속도의 부정적분이 거리이며, 거리의 미분이 속도이다. 이와 같이 미적분의 기본정리는 모호한 채로 남을 수 있었던 일련의 몇 가지 개념들의 관련성을 밝혀준 영향력을 강조하는 것이 교육적으로 의미가 있다(Berlinski, 1995). 정리의 활약과 영향력의 범위는 일반화되는 것이다. 그것은 넓이와 위치(또는 거리), 속력과 거리와의 관계를 조명하게 된다. 그것은 동시에 위치, 넓이, 속력, 거리를 나타내는 연속함수들 사이의 관계를 조명함으로써 연속성의 속성 그 자체에 관한 발견으로 이어지게 된 것이다.

미적분의 기본정리는 다음의 두 부분으로 구성된다.

| |
|---|
| $f(x)$가 연속함수일 때, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ |

여기서는 이것을 미적분의 기본정리 1이라고 부르기로 한다.

다음 정리는 미적분의 기본정리 2라고 부르기로 한다.

| |
|---|
| 연속함수 $f(x)$의 원시함수를 $F(x)$라고 하면 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ |

미적분의 기본정리 1, 2는 다음과 같은 특징이 있다. 기본정리 2는 정적분과 부정적분의 관계를 보인 것으로서, 두 값 사이의 관계를 진술하고 있다. 기본정리 1은 두 함수 사이의 관계이며, 연속성이 갖는 성질에 대한 고찰이다. 기본정리 2는 두 수 사이의 관계이며, 정적분과 부정적분과의 관계를 보인 것으로서 매우 막강하고 영향력 있는 정리이다.

먼저 국내 교과서들이 미적분의 기본정리의 취급에 대하여 균일하지 않고 동시에 그 명칭에 대해서도 일관성이 없다는 것을 지적하여 둔다. [바]에서는 미적분의 기본정리 1과 2를 구별 없이 '미분. 적분의 기본정리'라고 쓰고 있으며, [라]에서는 정리 1은 '적분과 미분과의 관계', 정리 2는 '정적분의 기본정리'라고 부르며, [가]에서는 정리 1은 명칭 없이, 정리 2는 단순히 정적분이라고 쓰고 있으며, [나]에서는 정리 1은 '정적분과 미분과의 관계', 정리 2는 명칭 없이 소개하고 있으며, [마]에서는 정리 1은 소개하지 않고, 정리 2는 '정적분의 기본 공식'이라 나타내고 있으며, [다]에서는 정리 1은 소개 없이, 정리 2는 '정적분의 기본정리'라고 하고 있다. 특기할만한 사실은 표와 같이 [다], [마]에서는 기본정리 1은 취급조차 하지 않았다.

그러나 기본정리 1을 소개하는 앞의 교과서 중에서도 오직 [가]에서만 기본정리 1에 대한 다음과 같은 설명을 달아 놓고 있다.

(설명) 함수 f의 원시함수의 하나를 F라고 하면

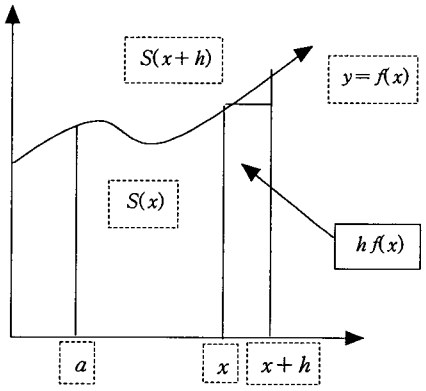
$$\int_a^x f = [F]_a^x = F(x) - F(a)$$

양변을 $x$에 관하여 미분하면 $F' = f$

이것을 대부분의 교사들은 공식에 대한 증명으로 받아들이고 있는 것으로 경험을 통하여 알 수 있다. 그러나 이것은 '증명'이라고 볼 수

없는 설명에 불과하다. 기본정리 1의 직접적인 결과인 기본정리 2를 이용하여 역으로 기본정리 1에 대한 설명을 하고 있으므로 수학사적으로 보아 적절하지 않은 설명이라고 하겠다. 이제 미분 단원에서도 자주 활용되듯이 근사 개념을 이용하여 비 형식적으로 적절하게 지도할 수 있다. 엄밀성을 배제하면 [라]에서 암묵적으로 나타나 있듯이 근사 개념을 이용한 다음과 같은 학습자료를 이용하여 정적분과 미분과의 관계에 대한 이해를 증진시킬 수 있는 것이다 (Devlin, 1994). 실제로 근사 개념을 이용한 설명 방법은 미분 단원과 적분의 응용에서 나타나고 있는 데, 마찬가지로 정적분에서도 잘 활용될 수 있을 것이다. 참고로 미분계수를 기울기로서의 기하 개념만 지도할 것이 아니라, 근사 개념에 이용하는 접근도 고려할 수 있다.

4) 근사 개념을 이용한 증명




함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f\geq 0$이라고 하자.

이 때, 구간 $[a, b]$에 속하는 임의의 점 $x$에 대하여 $a$에서 $x$까지의 함수 $f(x)$의 정적분을 S(x)라고 하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

따라서 $S(x+h)$는 $a$에서 $x+h$까지의 함수 $f(x)$의 정적분이므로

$$S(x+h)\fallingdotseq S(x)+h\cdot f(x)$$

즉,

$$\frac{[S(x+h)-S(x)]}{h}\ h\fallingdotseq f(x)$$

$h$일 때,

$$S'(x)=f(x).$$

이와 같이 근사 개념을 이용하면 비록 엄밀성은 없지만 미적분의 기본정리 1에 대한 이해를 쉽게 도울 수 있다.

형식적으로는 대체로 다음과 같은 순서로 지도되는 것이다. 증명 과정에서 나타나는 예비정리들의 소개 때문에 대학 수준에서 무리 없이 진행될 수 있다.

[예비정리: 최대-최소 정리]

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$ 상에서 연속이면 적당한 $c, d\in[a, b]$가 존재하여 모든 $x\in[a, b]$에 대하여 $f(c)\leq f(x)\leq f(d)$이다.

[미적분 기본정리 1의 개략적인 증명]

구간의 모든 $x$에 대하여 $f(x)>0$이라 가정하고, $a<x<b$ 인 $x$를 잡아

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

로 나타낸다.

충분히 작은 $h>0$ 에 대하여

$$a<x<x+h<b$$

가 되고, 폐구간 $[x, x+h]$의 모든 $t$에 대하여, 예비정리에 따라, 적당한 $c, d\in[x, x+h]$가 존재하여

$$f(c)\leq f(t)\leq f(d)$$

$F(x+h)-F(x)$는 $x$에서 $x+h$까지 곡선 밑의 넓이를 나타내므로

$$hf(c)\leq F(x+h)-F(x)\leq hf(d)$$

양변을 $h$로 나누면,

$$f(c) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(d)$$

이제 $h \to 0$일 때, $c, d$는 $x$에 가까이 가고, 연속성의 정의에 따라, $f(c), f(d)$는 $f(x)$에 가까이 가므로

$$F'(x) = f(x).$$

5) 새로운 주제 1 [적분의 평균값의 정리]

앞의 증명 과정에서 다음과 같은 예비정리를 이용하여 간단히 진술할 수 있다.

적분의 평균값의 정리는 미분의 평균값의 정리와 마찬가지로 매우 유용하며, 고등학교 물리에서도 등가속도 운동에서 속도-시간 그래프에서 넓이와 거리와의 관계를 보이면서 간단하게 평균속도의 개념을 이용한 적분의 평균값의 의미를 상식적 수준으로 사용하고 있음을 발견할 수 있다(장준성 외, 1995a, b). 또한 7차 수학교육과정에서는 미분적분이라는 선택과목으로 하여 독립적으로 운영하기로 하였으므로 적분의 평균값 정리의 도입을 검토할 수 있다(교육부, 1998a, b).

[예비정리] (적분의 평균값의 정리)

| |
|---|
| 함수 f가 [a, b] 상에서 연속이면, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ 인 c가 구간 내에 있다. |

이것은 엄격하게는 연속함수에 대한 [중간값의 정리]와 앞에서 소개한 [최대-최소 정리] 이용하면 간단히 증명할 수 있으나 [중간값의 정리]의 엄격한 증명은 대학 수준에서 가능한 것이다 .

그러나 적분의 평균값의 정리는 "곡선 아래의 넓이와 같은 직사각형이 있다"는 직관에 호소하는 상식적 원칙에 의존하면 이해하기가 쉬운 것이다.

이제 이것을 사용하여 미적분의 기본정리 1의 증명 과정을 간략히 할 수 있다(Berlinski, 1995).

(미적분의 기본정리 1의 증명 과정 중에서)

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx$$

$= f(c)$ , 적분의 평균값의 정리

$f$는 연속이므로,

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$$

따라서

$$F'(x) = f(x).$$

참고로 미적분의 기본정리 2의 조건을 진술하는 과정에서 다음 3가지의 유형이 나타나고 있다.

① 연속함수 $f(x)$의 부정적분의 하나(또는 한 부정적분)를 $F(x)$ - [나], [다], [라]

② $\int f(x)dx = F(x) + C$(또는 $F' = f$)일 때 - [마], [바]

③ 연속함수 $f(x)$의 한 원시함수를 $F(x)$라고 하면 -[가]

이것과 관련하여 부정적분의 정의를 살펴보면 다음과 같이 다양한 현상이 나타나고 있으며 대부분의 저자들이 표현에 고심한 흔적이 보인다.

[라], [바]에서는 부정적분에 대하여 다음과 같이 진술하고 있다.

"$F' = f$가 되는 함수 $F$를 $f$의 원시함수 또는 부정적분이라 하고, 기호

$$\int f$$

로 나타낸다. (중략). 그러므로 $f$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 ( $f$의 부정적분은)

$$\int f = F + C$$

이다."

이 경우 "함수 $F$를 $f$의 부정적분이고, 기호

$$\int f$$

로 나타낸다"고 하고서, $f$의 부정적분은

$$\int f = F + C$$

라고 다시 표현하고 있으므로 적절한 진술이라 할 수 없다. [나]에서는 같은 내용인데, 단지 원시함수라는 용어를 사용하지 않고 있다. [다]에서는 "$F' = f$가 되는 함수 $F$를 $f$의 부정적분 또는 원시함수라 하고, 일반적으로 $f$의 부정적분은

$$\int f = F + C$$

라 나타낸다"고 하여 적어도 "부정적분 $F$를 기호

$$\int f$$

로 나타내고"라는 앞의 부분이 없어 상충되는 표현을 피하였다. [마]에서는 "주어진 함수 $f$에 대하여 미분하여 $f$가 되는 함수를 $f$의 부정적분이라고 하고, 기호로

$$\int f$$

로 나타낸다"고 하여 상충된 표현이 없다. [가]에서는 " $F' = f$가 되는 함수 $F$를 $f$의 한 원시함수이며, $f$의 한 원시함수를 $F$라 할 때, $f$의 부정적분은

$$\int f = F + C \text{ "}$$

라고 하여 원시함수와 부정적분이라는 두 용어를 차별화하고 있다.

미적분의 기본정리 2의 진술과정 중 [나], [다], [라]에서 앞의 ①과 같이 '부정적분의 하나를' 또는 '한 부정적분을'이라고 한 것은 적절하지 않다. 왜냐하면 정의 과정에서 나타나 있듯이 부정적분이라는 용어는 각각의 특정 함수들을 뜻하는 의미가 강하기 때문이다. 마찬가지로 [가]에서와 같이 '한 원시 함수'라고 강조한 것도 적절한 표현이라 할 수 없다. [마], [바]와 같이 ②처럼 순전히 기호만으로 진술하면 이와 같은 용어의 정의에서 나타날 수 있는 문제점을 원초적으로 배제하는 것이라 볼 수 있다. 참고로 외국의 교재를 보면 primitive(원시함수)보다는 anti-derivative라는 용어에 단수 또는 복수 개념으로 구별하여 쓰고 있음을 지적하여 둔다.

### 6) 새로운 주제 2 [Integrals with Variable Limits]

정적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

에서 적분의 상한을 변수 $t$로 두면

$$\int_a^x f(t)dt = G(x)$$

로 함수 G(x) 가 정의된다. 미적분의 기본공식 1은 $f$가 연속일 때

$$\frac{d}{dt}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

와 같이 두 함수 사이의 관계를 보인다.

미적분의 기본정리 1도 함수 $f$가 연속이면 적분의 상한을 변수 $x$로 둔

$$\int_a^x f(t)\ dt$$

는 $x$의 함수이며, 그 도함수가 $f(x)$임을 보인 것으로, 두 함수 사이의 관계를 밝힌 것이다 .

따라서 상한, 하한이 변수로 되어 있는 적분의 소개는 매우 중요한 수학적 관점을 제공하는 것이며, 미적분의 기본 공식 1을 연습하는 기회를 제공하는 소재이므로 도입 여부에 대한

긍정적인 검토가 있어야 한다. 외국의 교과서도 상한, 하한이 변수로 된 적분을 강조하는 소주제이며 이에 관련하여 국내의 교과서의 실태는 다음과 같다.

그러나 오직 [가], [나], [바]에서만 예시를 통하여 제공하고 있을 뿐이다. [가], [나]에서는

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x^2} e^t dt$$

와 같이 정적분의 범위를 변수로 나타난 형태(Integrals with variable limits)를 취급하고 있다.

특히 [바]에서는 이와 다르게

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt = f(a)$$

임을 증명하는 유형의 형태로 함수로 이해하도록 지도하고 있다. 참고로 이것은 앞에서 도입을 강조한 [적분의 평균값의 정리]가 선수 학습된 경우라면 간단히 이해될 수 있는 예이다.

곡선

$$y=\frac{1}{x}$$

아래 1에서 $t$까지의 넓이

$$\int_{1}^{t}\frac{1}{x}dx = G(t)$$

로 두면

$$G(t)=\ln t$$

이며, 이것은 $\ln t$의 새롭게 수학적 연산

$$\int_{1}^{t}\frac{1}{x}dx$$

로 재구성한 것이 된다.

특히

$$\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt$$

와 같이 원시함수는 없어 기존의 함수로 표현할 수 없는 예를 이용하면 그 자체로써 어떤 새로운 함수로 정의됨으로써 수학에서 상징 기호의 풍부함을 보여주는 것이다. 이와 같이 상한, 하한이 변수로 나타나 있는 적분, 예를 들어

$$\int_{a}^{x} f(t)\ dt$$

를 함수

$$F: x \to \int_{a}^{x} f(t)\ dt$$

로 보고, $x$에 대한 함수로 이해하도록 지도하는 것은 적분 표현을 가진 함수를 도입하여 함수 표현의 다양성에 관한 중요한 수학적인 개념이다(Berlinski, 1995).

### 6) 인접교과와의 관계-정적분의 응용(속도, 거리, 위치)

대학에서 교양수학인 미분적분학을 지도해 본 경험으로부터 적지 않은 교재들이 적분의 응용에서 직선 운동의 경우 속도-속력의 용어를 문제에서 잘 못 사용하는 경우가 자주 있다. 마찬가지로 위치와 거리를 잘못 사용하는 경우가 많으며, 기호로 나타낼 때 위치나 거리를 똑같이 $s$ 또는 $s(t)$와 같이 혼용하는 경우가 자주 있다. 이것은 현행 고등학교 수학교과서에서도 발견하였다. 속도 $v(t)>0$일 때, 구별하지 않아도 된다고 강조한 교과서를 발견하기 힘든 실정이다.

정적분의 응용(점 P의 운동)에 있어서 현행 6종의 교과서는 다음과 같은 특징이 있다. 특기할 만한 점은 [나]에서는 특별한 설명 없이 공식만을 소개하고 있는데, 취급 방법 및 용어와 기호를 물리 교과에서와 같이 똑같이 사용하고 있다는 점이다. 이는 여러 가지 예비 지식이 선행되어야 하므로 학생과 교사에게 극심한 부담을 주게된다. 따라서 인접 교과라고 할 수 있는 물리에서 해당 내용이 선행 지식으로 지도되어진다는 전제가 있어야만 지도 연계성에 무리가 없을 것이다.

앞에서 언급한 바와 같이 [라]에서는 위치함

수와 (운동) 거리함수를 모두 $s, s(t)$와 같이 혼용하고 있는 데, 이것은 대학 교양수학인 미적분 교재에서도 자주 발견되는 오류이다. [마]에서는 속도함수 $v(t)>0$일 때는 위치와 거리를 혼용해도 좋다고 단서를 달아놓고 있다.

직선운동 공식들을 대부분 간단한 해설도 없이 진술만 하고 있으며 [마]에서만 간단한 수학적 해설을 하고 있다. 그러나 평면 운동의 경우 [나]를 제외한 대부분의 교과서에서 해설을 하고 있다.

대부분의 교과서에서는 '경과(이동) 거리'라고 나타내고 공식을 유도하는 과정에서 '곡선의 길이'(수학 개념)를 근사를 이용하여 유도하고 있다. 이것은 앞에서 미적분의 기본정리 1에 대한 해설이 필요하며, 근사를 이용한 비형식적 전개가 가능하다는 본고의 주장을 뒷받침하는 것이다. 특히 함수 $y=f(x)$로 주어진 곡선의 길이 공식(수학 개념)을 매개변수방정식(운동방정식)으로 주어진 이동거리 공식(물리 개념)으로부터 유도한 교과서는 [마], [바]이다.

이와 관련하여 중등수학에 자주 나타나는 물리적 개념에 대하여 다음과 같이 요약할 수 있다(Berlinski, 1995). Galileo는 물체의 자유낙하 운동을 수학적으로 모델링하여 자유 낙하 법칙을 발견했다. 즉, 자유낙하 물체의 가속도가 상수 $g$(중력가속도 9.8 m/초$^2$)이라는 것이다. 일반적으로 낙하하는 물체의 운동 방정식을 가속도로부터 끌어내는 것이 미적분의 기술이다. 위치함수를 두 번 미분한 것이 가속도이다. 가속도 $a(t)$로부터 위치함수 $p(t)$를 얻어내기 위해서는 적분을 두 번 반복하면 되고, 각 단계에서 상수가 나온다.

가속도 $a(t)=g=9.8m/\text{초}^2$

속도 $v(t) = \int g\ dt = gt + C_1$

위치 $P(t) = \int v(t)dt = \int (gt + C_1)\ dt$

$$= \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

두 상수 $C_1$, $C_2$는 각각 다음과 같다.

$C_1 = v(0) =$ 초기 속도.

$C_2 = P(0) = H$ (최초의 위치),

여기서 우리는 물리교과에서 자유 낙하하는 물체의 운동을 적분 표현 없이 등가속도 운동의 평균속도 개념을 이용하여 낙하 거리

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

를 유도하고 있다는 것을 강조한다. 고등학교 물리에서 등가속도 운동에서 시간-속도 그래프를 이용하여 넓이와 운동 거리와의 관계를 적분 계산 없이 보이고 있음을 발견할 수 있다(장준성 외, 1995a, b), (Devlin, 1994).

그러나 시간-속도 그래프에서 각 개념들의 관계, 특히 넓이와 거리와의 관계를 평면적인(2차원적인) 방법으로 이해하는 일은 인지적으로 쉽지 않은 것이라고 수학교육자들에 의하여 연구된 바 있다(Devlin, 1994).

따라서 교사들이 중력가속도에서 낙하운동을 유도하는 과정에 적분을 이용하면 물리, 수학을 연계시키는 유의미한 학습활동을 제공할 수 있음을 제언한다.

참고로 중학 수학 3의 이차방정식의 활용 단원에 다음과 비슷한 예들이 흔히 인용된다(박두일 외, 1994).

지상 10m의 높이에서 20m/초로 위로 똑바로 던져 올린 물체의 $x$초 후의 높이는

$$(10+20x-5x^2)\text{m}$$

라고 한다. 이 물체의 높이가 30 m 로 되는 것은 던져 올린 지 몇 초 후 ?

이것과 관련하여 수학 II 수준에서 중등수학에서 편의상 간단히 인용된 물리 공식들을 올바르게 이해하는 기회를 제공을 생각해 볼 수

있다. 이를테면 앞의 예에서 이차항의 계수 $-5$에 관한 올바른 이해가 필요하며, 이 때 연직 위로 던진 물체의 운동에 대한 물리 내용을 연계시켜야 한다.

다음과 같이 고등학교 수학 II 정적분의 응용에서 가속도, 속도, 위치, 거리를 미분-적분을 이용하여 소개하는 데 여러 가지 개념 사이의 관계를 앞과 같이 물리 교과와 연계시켜서 유용한 학습 활동을 할 수 있으나 다음과 같은 점을 볼 수 있었다

① 수학 II에서 물리 개념에 대한 용어와 기호에 부주의한 사용.

② 물리 II의 내용을 인용하는 방식은 인접 교과와의 지도 연계성 및 학습 위계에 문제.

③ 인접교과인 물리 II와 수학 II의 전개 방식에 너무 큰 차이.

적분을 중심으로 논의한 내용을 다음과 같이 4개의 분야로 나누어 요약하여 말할 수 있다. 이는 6차 교육과정에 따른 현재 사용 중인 수학 II 적분 단원에 대한 토론이며, 이것을 통하여 보다 효율적인 교과서 개발에 이용할 수 있을 것이며, 교사들은 현장에서 보다 유의미한 학습 활동에 참고 자료로 쓸 수 있을 것이다.

[도입과정]

· 부정적분 또는 원시함수 도입 진술과정에 많이 나타난 상충된 표현.

· 넓이를 새로운 수학적 연산(정적분)으로 정의 과정에서 진술의 부정확성.

[합의 극한과 공식화]

· 정의에 따라 계산하는 활동(구분구적법)을 통하여 정적분이 번거로운 연산 과정이라는 점을 강조한다.

· 회전체 부피공식에서 단면의 적분이라는 metaphor는 지양하며, 일반적인 공식화 과정을 강조한다.

[여러 가지 정리]

· 미적분의 기본정리 I, II의 도입과 명칭에 대한 균일화가 명백히 필요하다.

· 기본정리의 증명은 근사 개념을 이용하여 올바르게 제시한다.

· 치환적분법은 형태를 지도하는 것이므로, 두 가지로 나누어 명백히 한다.

· 새로운 주제의 도입

① 상한(하한)이 변수인 정적분을 도입, 함수 표현의 다양성을 도입한다.

② 적분의 평균값정리는 직관에 호소하는 상식적 방법으로 도입을 검토한다.

[인접 교과와 지도 연계성]

· 거리함수와 위치함수를 같은 문자로 나타내는 모호함을 지양한다.

· 물리교과 용어, 표현을 수학 II에 직접 인용은 지도 순서에 매우 의존한다.

## III. 결론

고등학교 수학 교과서의 내용은 표현과 전개 방법에 있어 직관에만 호소해야 하므로 이론적 엄밀성을 잃게 되는 것이 현실이다. 한편, 정적분과 응용 단원에서는 주제의 인지적 난이도에 비하여 분량의 지나친 제한으로 전개상에 균일하지 않은 다양한 모습으로 나타나고 있다. 실제로 6차 교육과정에 따른 수학 II 교과서들을 정적분과 응용 부분을 중심으로 비교 분석한 결과 다음과 같은 문제를 지적할 수 있다.

① 지나친 metaphor 사용-공식화 과정

② 용어, 진술의 지나친 다양성과 중요 기호의 혼용

③ 이론적 전개의 무리

- 지도 연계성(정적분의 응용과 물리교과)
- 증명의 오류(미적분 기본공식 I)
- 공식의 취급(치환적분법 I, II 의 차별화)

④ 새로운 주제의 도입 검토

- 적분의 평균값의 정리
- 상한, 하한이 변수로 된 정적분

제 7차 수학교육과정에서는 미분적분이라는 선택과목을 독립적으로 운영하기로 하여 이와 같은 기존의 문제점을 충분히 해소할 수 있다고 판단된다. 따라서 앞의 목록에 대한 문제점을 검토하여 보다 효율적인 교재 개발에 도움이 되었으면 한다.

## 참고문헌

교육부(1998). 고등 학교 교육과정(I) -별책[4]. 대한교과서주식회사.

교육부(1998). 수학과 교육 과정-별책[8]. 대한교과서주식회사.

대한수학회(2001). 제 19회 수학교육 심포지엄. 수학교육논총 제 19집.

박두일 외 2인(1994). 중학교 수학 3. (주)교학사.

박세희(1983). 고교 교과서내용의 몇가지 문제점-미분법의 내용을 중심으로 하여. 대한수학회 제1회 수학교육심포지움.

박세희 외 2인 (1996). 고등학교 수학 II. 동아서적(주).

이현구 외 6인 (1995). 고등학교 수학 II. (주)천재교육.

우정호 (1995). 고등학교 수학 II. 지학사.

양승갑 외 2인 (1995). 고등학교 수학 II. 금성교과서(주).

장준성 외 2인 (1995). 고등학교 물리 I. (주)지학사.

장준성 외 2인 (1995). 고등학교 물리 II. (주)지학사.

조승제 (1995). 고등학교 수학 II. 재능교육.

조태근 외 6인 (1995). 고등학교 수학 II. 금성교과서(주).

Berlinski, D. (1995). *A tour of the calculus.* New York : Vintage Books.

Harel, G., & Dubinsky, E. (1992). The concept of function-aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes(Vol. 25).

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns.* New York: Scientific Amer. Library.

Karian, Z. (1992). Symbolic computation in undergraduate mathematics education. *MAA Notes* (Vol. 24).

# Uniformity in Highschool Mathematics Textbooks in Definite Integral and its applications?

Seok, Yong Jing(Kangwon National University)

Traditionally, there are many inherent restrictions in highschool mathematics textbooks. They are restricted in its contents and inevitably resorted to reader's ability of

intuition. So they are usually lacked logical precisions and have various differences in expressions.

We are mainly concerned with the definite integral and its applications in current highschool mathematics II textbooks according to 6th curriculum. We choose 6 of them arbitrarily and survey by comparison to deduce some controversial topics among them as follows.

1) absurd metaphors in formula process

2) confusions in important notations and too much choices in terms and statements.

3) lack of precisions in :

- teaching hierarchy (between some contents of Physics and the applications of definite integral)

- introducing a proof of theorem (fundamental theorem of Calculus I)

- introducing the methods (integral substitutions I, II)

4) adopting small topics such as

- mean value theorem of integral

- integrals with variable limits.

In coming 7th curriculum, highschool students in Korea are supposed to choose calculus as a whole, independent course. So we hope that the suggested controversial topics are to be referred by authors to improve the preceding Mathematics II textbooks and for teachers to use them for better mathematics education.